¡¡APRUEBE SU EXAMEN CON SCHAUM!!

Ecuaciones diferenciales

Schaum

3ª EDICIÓN

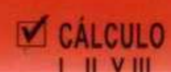
Richard Bronson • Gabriel Costa

- 563 PROBLEMAS COMPLETAMENTE RESUELTOS
- CIENTOS DE PROBLEMAS DE PRÁCTICA CON RESPUESTAS
- UN CAPÍTULO NUEVO SOBRE MODELADO
- LA GUÍA IDÓNEA PARA NOTAS SOBRESALIENTES

Mc Graw Hill

Utilícelo para las siguientes asignaturas:

☑ ECUACIONES DIFERENCIALES ☑ INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES



☑ MODELADO MATEMÁTICO

ECUACIONES DIFERENCIALES

ECUACIONES DIFERENCIALES

Tercera edición

RICHARD BRONSON

Fairleigh Dickinson University

GABRIEL B. COSTA

United States Military Academy / Seton Hall University

Revisor técnico

Raúl Gómez Castillo

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Estado de México



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA
LISBOA • MADRID • NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO
AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • SAN LUIS • SIDNEY • TORONTO

CONTENIDO

ACERCA DE LOS AUTORES

RICHARD BRONSON es doctor y profesor de matemáticas de Fairleigh Dickinson University. En 1968, obtuvo el doctorado en Matemáticas Aplicadas en el Stevens Institute of Technology. El doctor Bronson ha sido editor asociado del periódico *Simulation*, editor de *SIAM News*, y colaborador de Bell Laboratories. Ha dirigido investigaciones acerca de modelos matemáticos y simulación por computadora en Technion, en Israel, y en Wharton School of Bussiness, de la University of Pennsylvania. El doctor Bronson cuenta con más de treinta artículos técnicos y libros.

GABRIEL B. COSTA es doctor, sacerdote católico y profesor en Ciencias Matemáticas en la United States Military Academy, en West Point, de Nueva York, en donde además funge como capellán. El doctor Costa cuenta también con una residencia en Seton Hall University. En 1984, obtuvo el doctorado en el área de ecuaciones diferenciales en el Stevens Institute of Technology. Entre las aficiones académicas de Gabriel B. Costa están la educación de las matemáticas y el *sabermetrics*, la búsqueda del conocimiento objetivo del béisbol.

CONCEPTOS BÁSICOS

1

ECUACIONES DIFERENCIALES

Una *ecuación diferencial* es una ecuación que involucra una función desconocida y sus derivadas.

EJEMPLO 1.1. Las siguientes son ecuaciones diferenciales que incluyen la función desconocida y.

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 3 \tag{1.1}$$

$$e^y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 \tag{1.2}$$

$$4\frac{d^3y}{dx^3} + (\operatorname{sen} x)\frac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0 \tag{1.3}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5x \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{1.5}$$

Una ecuación diferencial es una *ecuación diferencial ordinaria* (EDO) si la función desconocida depende solamente de una variable independiente. Si la función desconocida depende de dos o más variables independientes, la ecuación diferencial es una *ecuación diferencial parcial* (EDP). *Con excepción de los capítulos 31 y 34, el enfoque principal de este libro será sobre ecuaciones diferenciales ordinarias.*

EJEMPLO 1.2. De las ecuaciones (*1.1*) a la (*1.4*) son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias, pues la función desconocida y depende únicamente de la variable x. La ecuación (*1.5*) es una ecuación diferencial parcial, pues y depende tanto de la variable t como de la x.

El *orden* de una ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.

EJEMPLO 1.3. La ecuación (*1.1*) es una ecuación diferencial de primer orden; (*1.2*), (*1.4*) y (*1.5*) son ecuaciones diferenciales de segundo orden. [Obsérvese en (*1.4*) que el orden de la mayor *derivada* que aparece en la ecuación es dos.] La ecuación (*1.3*) es una ecuación diferencial de tercer orden.

NOTACIÓN

Las expresiones y', y'', y''', $y^{(4)}$, ..., $y^{(n)}$ se usan a menudo para representar respectivamente a la primera, la segunda, la tercera, la cuarta, ..., la n-ésima derivada de y con respecto a la variable independiente en consideración. De este modo, y'' representa d^2y/dx^2 si la variable independiente es x, pero con d^2y/dp^2 se representa que la variable independiente es p. Obsérvese que los paréntesis se usan en $y^{(n)}$ para distinguirla de la n-ésima potencia, y^n. Si la variable independiente es tiempo, generalmente denotado por t, las comillas a menudo se reemplazan por puntos. Así, $\dot{y}$, $\ddot{y}$ y $\dddot{y}$ representan dy/dt, d^2y/dt^2 y d^3y/dt^3, respectivamente.

SOLUCIONES

Una *solución* de una ecuación diferencial en la función y desconocida y la variable independiente x en el intervalo $\mathcal{I}$, es una función $y(x)$ que satisface la ecuación diferencial de manera idéntica para toda x en $\mathcal{I}$.

EJEMPLO 1.4. ¿Es $y(x) = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x$ una solución de $y'' + 4y = 0$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias?

Derivando y, tenemos que

$$y' = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \operatorname{sen} 2x \quad \text{y} \quad y'' = -4c_1 \operatorname{sen} 2x - 4c_2 \cos 2x$$

De aquí que,

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= (-4c_1 \operatorname{sen} 2x - 4c_2 \cos 2x) + 4(c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x) \\ &= (-4c_1 + 4c_1)\operatorname{sen} 2x + (-4c_2 + 4c_2)\cos 2x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por esto, $y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x$ satisface la ecuación diferencial para todos los valores de x y es una solución en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

EJEMPLO 1.5. Determine si $y = x^2 - 1$ es una solución de $(y')^4 + y^2 = -1$.

Obsérvese que el lado izquierdo de la ecuación diferencial debe ser no negativo para cada función real $y(x)$ y cualquier x, puesto que es la suma de términos elevados a la segunda y cuarta potencias, en tanto que el lado derecho de la ecuación es negativo. Debido a que ninguna función $y(x)$ satisfará esta ecuación, la ecuación diferencial no tiene solución.

Vemos que algunas ecuaciones diferenciales tienen un número infinito de soluciones (ejemplo 1.4), mientras que otras ecuaciones diferenciales no tienen solución (ejemplo 1.5). También es posible que una ecuación diferencial tenga exactamente una solución. Considere $(y')^4 + y^2 = 0$, que por idénticas razones a las expresadas en el ejemplo 1.5 sólo tiene una solución $y \equiv 0$.

Una *solución particular* de una ecuación diferencial es cualquier solución única. La *solución general* de una ecuación diferencial es el conjunto de todas las soluciones.

EJEMPLO 1.6. La solución general a la ecuación diferencial del ejemplo 1.4 se puede demostrar que es (véanse capítulos 8 y 9) $y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x$. Es decir, cada solución particular de la ecuación diferencial tiene ésta como forma general. Algunas soluciones particulares son: *a*) $y = 5 \operatorname{sen} 2x - 3 \cos 2x$ (con $c_1 = 5$ y $c_2 = -3$), *b*) $y = \operatorname{sen} 2x$ (con $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$) y *c*) $y \equiv 0$ (con $c_1 = c_2 = 0$).

La solución general de una ecuación diferencial no se puede expresar siempre por medio de una fórmula única. Como un ejemplo, considere la ecuación diferencial $y' + y^2 = 0$, que tiene dos soluciones particulares $y = 1/x$ y $y \equiv 0$.

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL Y DE VALORES EN LA FRONTERA

Una ecuación diferencial acompañada de condiciones subsidiarias sobre la función desconocida y sus derivadas, todas dadas al mismo valor de la variable independiente, constituyen un *problema de valor inicial*. Las condiciones subsidiarias son *condiciones iniciales*. Si las condiciones subsidiarias se dan a más de un valor de la variable independiente, el problema es un *problema de valores en la frontera* y las condiciones son las *condiciones en la frontera*.

EJEMPLO 1.7. El problema $y'' + 2y' = e^x$; $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 2$ es un problema de valor inicial, porque las dos condiciones subsidiarias están ambas dadas en $x = \pi$. El problema $y'' + 2y' = e^x$; $y(0) = 1$, $y(1) = 1$ es un problema de valores en la frontera, porque las dos condiciones subsidiarias están dadas para los diferentes valores $x = 0$ y $x = 1$.

Una *solución* para un problema de valor inicial o bien de valores en la frontera es una función $y(x)$ que resuelve a la ecuación diferencial y además satisface a todas las condiciones subsidiarias.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.1. Determine el orden, la función desconocida y la variable independiente de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y''' - 5xy' = e^x + 1$ *b*) $t\ddot{y} + t^2\dot{y} - (\operatorname{sen} t)\sqrt{y} = t^2 - t + 1$

c) $s^2 \dfrac{d^2t}{ds^2} + st\dfrac{dt}{ds} = s$ *d*) $5\left(\dfrac{d^4b}{dp^4}\right)^5 + 7\left(\dfrac{db}{dp}\right)^{10} + b^7 - b^5 = p$

a) Tercer orden, porque la derivada de mayor orden es la tercera. La función desconocida es y; la variable independiente es x.

b) Segundo orden, porque la derivada de mayor orden es la segunda. La función desconocida es y; la variable independiente es t.

c) Segundo orden, porque la derivada de mayor orden es la segunda. La función desconocida es t; la variable independiente es s.

d) Cuarto orden, porque la derivada de mayor orden es la cuarta. Al elevar derivadas a varias potencias no se altera el número de derivadas implicadas. La función desconocida es b; la variable independiente es p.

1.2. Determine el orden, la función desconocida y la variable independiente de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y\dfrac{d^2x}{dy^2} = y^2 + 1$ *b*) $y\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2 = x^2 + 1$

c) $2\dddot{x} + 3\dot{x} - 5x = 0$ *d*) $17y^{(4)} - t^6y^{(2)} - 4.2y^5 = 3\cos t$

a) Segundo orden. La función desconocida es x; la variable independiente es y.

b) Primer orden, porque la derivada de mayor orden es la primera, aun cuando esté elevada a la segunda potencia. La función desconocida es x; la variable independiente es y.

c) Tercer orden. La función desconocida es x; la variable independiente es t.

d) Cuarto orden. La función desconocida es y; la variable independiente es t. Obsérvese la diferencia de notación entre la cuarta derivada $y^{(4)}$, con paréntesis, y la quinta potencia y^5, sin paréntesis.

1.3. Determine si $y(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$ es una solución de $y'' + 2y' + y = 0$.

Derivando $y(x)$, se sigue que

$$y'(x) = -2e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x} = -e^{-x} - xe^{-x}$$

$$y''(x) = e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = xe^{-x}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, obtenemos

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x} + 2(-e^{-x} - xe^{-x}) + (2e^{-x} + xe^{-x}) = 0$$

Por lo tanto, $y(x)$ es una solución.

1.4. ¿Es $y(x) \equiv 1$ una solución de $y'' + 2y' + y = x$?

A partir de $y(x) \equiv 1$, tenemos que $y'(x) \equiv 0$ y $y''(x) \equiv 0$. Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, obtenemos

$$y'' + 2y' + y = 0 + 2(0) + 1 = 1 \neq x$$

De este modo, $y(x) \equiv 1$ no es una solución.

1.5. Demuestre que $y = \ln x$ es una solución de $xy'' + y' = 0$ en $\mathscr{I} = (0, \infty)$ pero no es una solución en $\mathscr{I} = (-\infty, \infty)$.

En $(0, \infty)$ tenemos $y' = 1/x$ y $y'' = -1/x^2$. Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, obtenemos

$$xy'' + y' = x\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} = 0$$

De este modo, $y = \ln x$ es una solución en $(0, \infty)$.

Observe que $y = \ln x$ no podría ser una solución en $(-\infty, \infty)$, pues el logaritmo no está definido para los números negativos y para el cero.

1.6. Demuestre que $y = 1/(x^2 - 1)$ es una solución de $y' + 2xy^2 = 0$ en $\mathscr{I} = (-1, 1)$ pero no en cualquier intervalo más grande que contenga a $\mathscr{I}$.

En $(-1, 1)$, $y = 1/(x^2 - 1)$ y su derivada $y' = -2x/(x^2 - 1)^2$ son funciones bien definidas. Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, tenemos

$$y' + 2xy^2 = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} + 2x\left[\frac{1}{x^2-1}\right]^2 = 0$$

De este modo, $y = 1/(x^2 - 1)$ es una solución en $\mathscr{I} = (-1, 1)$.

Note, sin embargo, que $1/(x^2 - 1)$ no está definida en $x = \pm 1$, y por lo tanto no podría ser una solución en ningún intervalo que contenga cualquiera de estos dos puntos.

1.7. Determine si cualquiera de las funciones *a*) $y_1 = \operatorname{sen} 2x$, *b*) $y_2(x) = x$ o *c*) $y_3(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$ es una solución para el problema de valor inicial $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

a) $y_1(x)$ es una solución para la ecuación diferencial y satisface la primera condición inicial $y(0) = 0$. Sin embargo, $y_1(x)$ no satisface la segunda condición inicial ($y_1'(x) = 2 \cos 2x$; $y_1'(0) = 2 \cos 0 = 2 \neq 1$); de aquí que no sea una solución para el problema de valor inicial. *b*) $y_2(x)$ satisface ambas condiciones iniciales, pero no satisface la ecuación diferencial; por eso, $y_2(x)$ no es una solución. *c*) $y_3(x)$ satisface la ecuación diferencial y ambas condiciones iniciales; por lo tanto, es una solución para el problema de valor inicial.

1.8. Halle la solución para el problema de valor inicial $y' + y = 0$; $y(3) = 2$, si la solución general para la ecuación diferencial se sabe que es (véase capítulo 8) $y(x) = c_1 e^{-x}$, donde c_1 es una constante arbitraria.

Puesto que $y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial para cada valor de c_1, buscamos el valor de c_1 que también satisfaga la condición inicial. Obsérvese que $y(3) = c_1 e^{-3}$. Para satisfacer la condición inicial $y(3) = 2$, es suficiente escoger c_1, de modo que $c_1 e^{-3} = 2$, es decir, escoger $c_1 = 2e^3$. Sustituyendo este valor por c_1 en $y(x)$, obtenemos $y(x) = 2e^3 e^{-x} = 2e^{3-x}$ como la solución del problema de valor inicial.

1.9. Halle una solución para el problema de valor inicial $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, si se sabe que la solución general para la ecuación diferencial (véase capítulo 9) es $y(x) = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x$.

Dado que $y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial para todos los valores de c_1 y c_2 (véase el ejemplo 1.4), buscamos aquellos valores de c_1 y c_2 que también satisfagan las condiciones iniciales. Note que $y(0) = c_1 \operatorname{sen} 0 + c_2 \cos 0 = c_2$. Para satisfacer la primera condición inicial, $y(0) = 0$, elegimos $c_2 = 0$. Además, $y'(x) = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \operatorname{sen} 2x$; de este

modo, $y'(0) = 2c_1 \cos 0 - 2c_2 \operatorname{sen} 0 = 2c_1$. Para satisfacer la segunda condición inicial, $y'(0) = 1$, escogemos $2c_1 = 1$, o $c_1 = \frac{1}{2}$. Sustituyendo estos valores de c_1 y c_2 en $y(x)$, obtenemos $y(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$ como la solución del problema de valor inicial.

1.10. Encuentre una solución para el problema de valores en la frontera $y'' + 4y = 0$; $y(\pi/8) = 0$, $y(\pi/6) = 1$, si la solución general para la ecuación diferencial es $y(x) = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x$.

Observe que

$$y\left(\frac{\pi}{8}\right) = c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + c_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

Para satisfacer la condición $y(\pi/8) = 0$, necesitamos

$$c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + c_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 0 \qquad (1)$$

Además,

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + c_2\left(\frac{1}{2}\right)$$

Para satisfacer la segunda condición, $y(\pi/6) = 1$, precisamos

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 1 \qquad (2)$$

Resolviendo (*1*) y (*2*) simultáneamente, hallamos

$$c_1 = -c_2 = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$$

Sustituyendo estos valores en $y(x)$, obtenemos

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{3}-1}(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)$$

como la solución al problema de valores en la frontera.

1.11. Encuentre una solución para el problema de valores en la frontera $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 2$, si se sabe que la solución general para la ecuación diferencial es $y(x) = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x$.

Puesto que $y(0) = c_1 \operatorname{sen} 0 + c_2 \cos 0 = c_2$, debemos escoger $c_2 = 1$ para satisfacer la condición $y(0) = 1$. Dado que $y(\pi/2) = c_1 \operatorname{sen} \pi + c_2 \cos \pi = -c_2$, debemos elegir $c_2 = -2$ para satisfacer la segunda condición, $y(\pi/2) = 2$. Así, para satisfacer ambas condiciones en la frontera de forma simultánea, requerimos que c_2 sea igual a 1 y a -2, lo cual es imposible. Por lo tanto, no existe una solución para este problema.

1.12. Determine c_1 y c_2 de modo que $y(x) = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x + 1$ satisfaga las condiciones $y(\pi/8) = 0$ y $y'(\pi/8) = \sqrt{2}$.

Obsérvese que

$$y\left(\frac{\pi}{8}\right) = c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 = c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + c_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + 1$$

Para satisfacer la condición $y(\pi/8) = 0$, necesitamos que $c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + c_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) + 1 = 0$, o de manera equivalente,

$$c_1 + c_2 = -\sqrt{2} \qquad (1)$$

Dado que $y'(x) = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \operatorname{sen} 2x$,

$$y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2c_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 2c_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - 2c_2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}c_1 - \sqrt{2}c_2$$

Para satisfacer la condición $y'(\pi/8) = \sqrt{2}$, necesitamos que $\sqrt{2}c_1 - \sqrt{2}c_2 = \sqrt{2}$, o de manera equivalente,

$$c_1 - c_2 = 1 \qquad (2)$$

Resolviendo simultáneamente (*1*) y (2), obtenemos $c_1 = -\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$ y $c_2 = -\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)$.

1.13. Determine c_1 y c_2 de modo tal que $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + 2 \operatorname{sen} x$ satisfaga las condiciones $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$.

Porque $\operatorname{sen} 0 = 0$, $y(0) = c_1 + c_2$. Para satisfacer la condición $y(0) = 0$, necesitamos que

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad (1)$$

A partir de

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^x + 2\cos x$$

tenemos que $y'(0) = 2c_1 + c_2 + 2$. Para satisfacer la condición $y'(0) = 1$, necesitamos que $2c_1 + c_2 + 2 = 1$, o bien

$$2c_1 + c_2 = -1 \qquad (2)$$

Resolviendo simultáneamente (*1*) y (2), obtenemos $c_1 = -1$ y $c_2 = 1$.

PROBLEMAS ADICIONALES

En los problemas del 1.14 al 1.23, determine *a*) el orden, *b*) la función desconocida y *c*) la variable independiente para cada una de las ecuaciones diferenciales dadas.

1.14. $(y'')^2 - 3yy' + xy = 0$

1.15. $x^4 y^{(4)} + xy''' = e^x$

1.16. $t^2 \ddot{s} - t\dot{s} = 1 - \operatorname{sen} t$

1.17. $y^{(4)} + xy''' + x^2 y'' - xy' + \operatorname{sen} y = 0$

1.18. $\dfrac{d^n x}{dy^n} = y^2 + 1$

1.19. $\left(\dfrac{d^2 r}{dy^2}\right)^2 + \dfrac{d^2 r}{dy^2} + y\dfrac{dr}{dy} = 0$

1.20. $\left(\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right)^{3/2} + y = x$

1.21. $\dfrac{d^7 b}{dp^7} = 3p$

1.22. $\left(\dfrac{db}{dp}\right)^7 = 3p$

1.23. $y^{(6)} + 2y^4 y^{(3)} + 5y^8 = e^x$

1.24. ¿Cuáles de las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial $y' - 5y = 0$?

a) $y = 5$, *b*) $y = 5x$, *c*) $y = x^5$, *d*) $y = e^{5x}$, *e*) $y = 2e^{5x}$, *f*) $y = 5e^{2x}$

1.25. ¿Cuáles de las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial $y' - 3y = 6$?

a) $y = -2$, *b*) $y = 0$, *c*) $y = e^{3x} - 2$, *d*) $y = e^{2x} - 3$, *e*) $y = 4e^{3x} - 2$

1.26. ¿Cuáles de las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial $\dot{y} - 2ty = t$?

a) $y = 2$, *b*) $y = -\frac{1}{2}$, *c*) $y = e^{t^2}$, *d*) $y = e^{t^2} - \frac{1}{2}$, *e*) $y = -7e^{t^2} - \frac{1}{2}$

1.27. ¿Cuáles de las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial $dy/dt = y/t$?

a) $y = 0$, *b*) $y = 2$, *c*) $y = 2t$, *d*) $y = -3t$, *e*) $y = t^2$

1.28. ¿Cuáles de las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3}$$

a) $y = x$, *b*) $y = x^8 - x^4$, *c*) $y = \sqrt{x^8 - x^4}$, *d*) $y = (x^8 - x^4)^{1/4}$

1.29. ¿Cuáles de las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$?

a) $y = e^x$, *b*) $y = \operatorname{sen} x$, *c*) $y = 4e^{-x}$, *d*) $y = 0$, *e*) $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

1.30. ¿Cuáles de las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial $y'' - xy' + y = 0$?

a) $y = x^2$, *b*) $y = x$, *c*) $y = 1 - x^2$, *d*) $y = 2x^2 - 2$, *e*) $y = 0$

1.31. ¿Cuáles de las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = e^t$?

a) $x = e^t$, *b*) $x = e^{2t}$, *c*) $x = e^{2t} + e^t$, *d*) $x = te^{2t} + e^t$, *e*) $x = e^{2t} + te^t$

En los problemas del 1.32 al 1.35, halle c de modo tal que $x(t) = ce^{2t}$ satisfaga la condición inicial dada.

1.32. $x(0) = 0$ **1.33.** $x(0) = 1$ **1.34.** $x(1) = 1$ **1.35.** $x(2) = -3$

En los problemas del 1.36 al 1.39, halle c de modo tal que $y(x) = c(1 - x^2)$ satisfaga la condición inicial dada.

1.36. $y(0) = 1$ **1.37.** $y(1) = 0$ **1.38.** $y(2) = 1$ **1.39.** $y(1) = 2$

En los problemas del 1.40 al 1.49, halle c_1 y c_2 de modo tal que $y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$ satisfaga la condiciones dadas. Determine si las condiciones dadas son condiciones iniciales o condiciones en la frontera.

1.40. $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

1.41. $y(0) = 2,\ y'(0) = 1$

1.42. $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

1.43. $y(0) = 1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

1.44. $y'(0) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

1.45. $y(0) = 1,\ y'(\pi) = 1$

1.46. $y(0) = 1,\ y(\pi) = 2$

1.47. $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

1.48. $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$

1.49. $y(0) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

En los problemas del 1.50 al 1.54, halle los valores de c_1 y c_2 de modo tal que las funciones dadas satisfagan las condiciones iniciales prescritas.

1.50. $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + 4 \operatorname{sen} x$; $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

1.51. $y(x) = c_1x + c_2 + x^2 - 1$; $\quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2$

1.52. $y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + 3e^{3x}$; $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

1.53. $y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + 1$; $\quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 0$

1.54. $y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + x^2e^x$; $\quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1$

UNA INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS Y A LOS MÉTODOS CUALITATIVOS

2

MODELOS MATEMÁTICOS

Los *modelos matemáticos* se pueden pensar como ecuaciones. En este capítulo, y en otras partes del libro (por ejemplo, véanse los capítulos 7, 14 y 31), consideraremos ecuaciones que modelan ciertas situaciones del mundo real.

Por ejemplo, cuando consideramos un simple circuito eléctrico de corriente directa (CD), la ecuación $V = RI$ *representa el modelo* de la caída de voltaje (medida en voltios) a través de una resistencia (medida en ohmios), donde I es la corriente (medida en amperios). Esta ecuación se denomina Ley de Ohm, llamada así en honor de G. S. Ohm (1787-1854), físico alemán.

Una vez construidos, ciertos modelos se pueden usar para predecir muchas situaciones físicas. Por ejemplo, el pronóstico del tiempo, el crecimiento de un tumor, o el resultado de la rueda de una ruleta, todos ellos se pueden conectar con alguna forma de modelos matemáticos.

En este capítulo consideramos variables que son continuas y cómo se pueden usar las *ecuaciones diferenciales* en la aplicación de los modelos matemáticos. En el capítulo 34 se introduce la idea de *ecuaciones en diferencias*. Éstas son ecuaciones en las que consideramos variables *discretas*; es decir, variables que sólo pueden aceptar ciertos valores, tales como números enteros. Con escasas modificaciones, todo lo que se presenta acerca de los modelos con ecuaciones diferenciales se puede tomar también como cierto para los modelos con ecuaciones en diferencias.

EL "CICLO DE LOS MODELOS"

Supongamos que tenemos una situación de la *vida real* (queremos encontrar la cantidad de material radiactivo en cierto elemento). La *investigación* debe ser capaz de construir un modelo para esta situación (bajo la forma de una ecuación diferencial "muy difícil"). Se puede usar la tecnología para ayudarnos a resolver la ecuación (los programas de computación nos dan una respuesta). Las respuestas tecnológicas son luego *interpretadas* o *comunicadas* a la luz de la situación de la vida real (la cantidad de material radiactivo). La figura 2-1 ilustra este ciclo.

MÉTODOS CUALITATIVOS

Construir un modelo puede resultar un proceso prolongado y difícil; suele llevar varios años de investigación. Una vez formulados, quizá sea virtualmente imposible resolver los modelos de modo analítico. Entonces, el investigador cuenta con dos opciones:

- Simplificar, o "hacer pequeños cambios al modelo para mejorarlo" y hacerlo más manejable. Éste es un enfoque válido, siempre y cuando la simplificación no comprometa excesivamente la conexión con el "mundo real" y, por lo tanto, su utilidad.

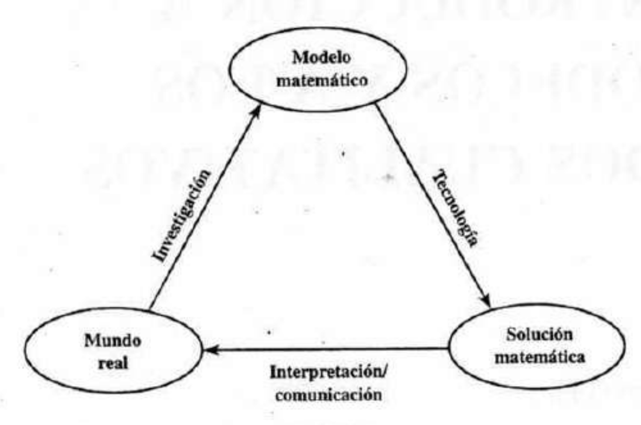


Figura 2-1

- Dejar el modelo tal como está, y usar otras técnicas, tales como métodos gráficos o numéricos (véanse los capítulos 18, 19 y 20). Esto representa un enfoque *cualitativo*. En tanto que no tengamos una solución exacta, analítica, en cierta forma obtenemos *algo* de información que puede arrojar *cierta* luz sobre el modelo y su aplicación. Las herramientas tecnológicas pueden ser de extrema ayuda en este enfoque (véase el apéndice B).

PROBLEMAS RESUELTOS

Los problemas 2.1 a 2.11 tratan con varios modelos, muchos de los cuales representan situaciones del mundo real. Asuma que los modelos son válidos, inclusive en los casos en donde algunas de las variables son discretas.

2.1. Discuta el modelo: $T_F = 32 + 1.8\ T_C$.

Este modelo convierte temperaturas de grados de la escala Celsius a grados de la escala Fahrenheit.

2.2. Discuta el modelo: $PV = nRT$.

Éste modela a los gases ideales y se conoce como Ley de un gas perfecto. Aquí, P representa la presión (en atmósferas), V es el volumen (en litros), n es el número de moles, R es la constante universal de los gases ($R = 8.3145$ J/mol K) y T es la temperatura (en kelvins).

2.3. ¿Qué nos dice la ley de Boyle?

La ley de Boyle establece que, para un gas ideal a temperatura constante, $PV = k$, donde P (atmósferas), V (litros) y k es una constante (atmósferas-litros).

Otra forma de establecer esto es que la presión y el volumen son inversamente proporcionales.

2.4. Discuta el modelo: $I = \dfrac{dq}{dt}$.

Esta fórmula se usa en electricidad; I representa la corriente (amperios), q representa la carga (culombios), t es el tiempo (segundos). Los problemas que incluyan este modelo se presentarán tanto en el capítulo 7 como en el capítulo 14.

2.5. Discuta el modelo: $m\dfrac{d^2y}{dt^2} + a\dfrac{dy}{dt} + ky = F(t)$.

Éste es un modelo clásico: sistema forzado de masa-resorte. Aquí, y es el desplazamiento (m), t es el tiempo (seg), m es la masa (kg), a es una constante de fricción o amortiguamiento (kg/seg), k es la constante del resorte (kg/seg^2) y $F(t)$ es la función de forzado (N).

Las variaciones de este modelo se pueden usar en problemas que van desde absorbedores de golpes en automóviles hasta para responder a aspectos de la columna vertebral en seres humanos.

La ecuación diferencial usa varios conceptos clásicos, incluyendo la segunda ley de Newton y la ley de Hooke. Volveremos sobre esta ecuación en el capítulo 14.

2.6. Considere que $M(t)$ representa la masa de un elemento en kg. Suponga que la investigación ha demostrado que la tasa de decaimiento instantáneo de este elemento (kg/año) es proporcional a la cantidad presente: $M'(t) \propto M(t)$. Establezca un modelo para esta relación.

La relación de proporcionalidad $M'(t) \propto M(t)$ se puede convertir en una ecuación introduciendo una constante de proporcionalidad, k (1/año). De este modo, nuestro modelo se transforma en $M'(t) = kM(t)$. Observamos que $k < 0$, porque $M(t)$ está decreciendo en tamaño.

Esta ecuación se clasificará como "ecuación separable" (véase capítulo 3). La solución de este tipo de ecuación diferencial, que se describe cualitativamente como "decaimiento exponencial", se tratará en el capítulo 4.

2.7. Considere el problema anterior. Suponga que la investigación reveló que la tasa de decaimiento es proporcional a la raíz cuadrada de la cantidad presente. Establezca el modelo para esta situación.

$M'(t) \propto \sqrt{M(t)}$ implica que $M'(t) = k\sqrt{M(t)}$. Aquí observamos que las unidades de k son $\frac{\text{kg}^{1/2}}{\text{año}}$. La solución para este tipo de ecuación diferencial se verá en el capítulo 4.

2.8. Establezca el modelo para una población $P(t)$, si su tasa de crecimiento es proporcional a la cantidad presente en el tiempo t.

Este problema se deriva del problema 2.6; es decir, tenemos un modelo de "crecimiento exponencial", $P'(t) = kP(t)$, donde $k > 0$.

2.9. Suponga que la población descrita en el problema 2.8 tiene una composición inicial de 1 000. Es decir, $P(0) = 1\,000$. A usted le dijeron también que la solución de la ecuación diferencial $P'(t) = kP(t)$ está dada por $P(t) = 1\,000e^{kt}$, donde t está en años. Discuta este modelo.

Dado que $k > 0$, sabemos que $P(t)$ se incrementará exponencialmente conforme $t \to \infty$. Estamos obligados a concluir que éste _no_ es (muy probablemente) un modelo razonable, debido al hecho de que nuestro crecimiento es ilimitado.

Sin embargo, agregamos que este modelo _podría_ ser de utilidad en un _corto_ periodo. "¿Qué tan útil?" y "¿en qué tan corto periodo?" son preguntas que se deben buscar cualitativamente, y dependen de las limitantes y los requerimientos del problema particular que se tenga.

2.10. Considere las hipótesis de los dos problemas previos. Además, suponga que la tasa de crecimiento de $P(t)$ es proporcional al producto de la cantidad presente y cierto término de "población máxima", $100\,000 - P(t)$, donde 100 000 representa la capacidad guía. Es decir, $P(t) \to 100\,000$, mientras que $t \to \infty$. La introducción de la constante de proporcionalidad k nos conduce a la ecuación diferencial, $P'(t) = kP(t)(100\,000 - P(t))$. Discuta este modelo.

Si $P(t)$ es mucho menos que 100 000, la ecuación diferencial se puede aproximar como $P'(t) \approx kP(t)\,(100\,000) = KP(t)$, donde $K = k(100\,000)$. Esto aproximaría de manera muy cercana el crecimiento exponencial. Así, para "pequeños" $P(t)$, debería haber una pequeña diferencia entre este modelo y el modelo anterior que se discutió en los problemas 2.8 y 2.9.

Si $P(t)$ es cercana a 100 000 (lo que significa que $100\,000 - P(t) \approx 0$), entonces la ecuación diferencial se puede aproximar como $P'(t) \approx kP(t)(0) = 0$. Una solución aproximada para esto es $P(t) = 100\,000$, pues sólo una constante tiene una derivada igual a 0. De modo que "a largo plazo", $P(t)$ se "nivela" con 100 000, la capacidad guía de la población.

En este problema, usamos un enfoque cualitativo: pudimos descifrar cierta información y expresarla de una manera descriptiva, aunque no teníamos la solución de la ecuación diferencial. Este tipo de ecuación es un ejemplo de un _modelo logístico de población_ y se usa extensivamente en estudios sociológicos. Véase también el problema 7.7.

2.11. Algunas veces las ecuaciones diferenciales están "acopladas" (véanse capítulos 17 y 25); considere el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{dt} = 2R - 3RF \\ \dfrac{dF}{dt} = -4F + 5RF \end{cases} \tag{1}$$

Aquí, R representa el número de conejos de una población, en tanto que F representa el número de zorros, y t es el tiempo (meses). Asuma que este modelo refleja la relación entre conejos y zorros. ¿Qué nos dice este modelo?

El sistema de ecuaciones (*1*) refleja una relación "predador-presa". Los términos RF en ambas ecuaciones se pueden interpretar como un "término de interacción". Es decir, ambos factores son necesarios para tener efecto sobre las ecuaciones.

Vemos que el coeficiente de R en la primera ecuación es +2; si no existiese ningún término RF en esta ecuación, R se incrementaría sin límite alguno. El coeficiente –3 de RF tiene un impacto negativo sobre la población de conejos.

Poniendo nuestra atención en la segunda ecuación, vemos que F está multiplicado por –4, lo que indica que la población de zorros disminuiría si no interactuara con los conejos. El coeficiente positivo para RF indica un impacto positivo sobre la población de zorros.

Los modelos predador-presa se usan de manera extensa en muchas áreas desde poblaciones de la vida silvestre hasta en la planeación de estrategias militares. En muchos de estos modelos se emplean métodos cualitativos.

PROBLEMAS ADICIONALES

2.12. Usando el problema 2.1, encuentre un modelo que convierta temperaturas de grados en la escala Fahrenheit a grados en la escala Celsius.

2.13. La ley de Charles establece que, para un gas ideal a presión constante, $\frac{V}{T} = k$, donde V (litros), T (kelvins) y k es una constante (litros/K). ¿Qué nos dice este modelo?

2.14. Discuta la segunda ley del movimiento de Newton: $F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$.

2.15. Suponga que un cuarto está siendo enfriado de acuerdo con el modelo $T(t) = \sqrt{576 - t}$, donde t (horas) y T (grados Celsius). Si comenzamos el proceso de enfriamiento en $t = 0$, ¿cuándo dejará de funcionar este modelo? ¿Por qué?

2.16. Suponga que el cuarto del problema 2.15 se está enfriando de tal modo que $T(t) = t^2 - 20t + \sqrt{576}$, donde las variables y condiciones son como las de dicho problema. ¿Cuánto tiempo tomará enfriar el cuarto hasta su temperatura mínima? ¿Por qué?

2.17. Considere el modelo discutido en el problema 2.5. Si asumimos que el sistema está "no amortiguado" y "no forzado", es decir $F(t) \equiv 0$ y $a = 0$, la ecuación se reduce a $m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0$. Si hacemos que $m = 1$ y $k = 4$ para una posterior simplificidad, tenemos que $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0$. Supongamos que sabemos que $y(t)$ = sen $2t$ satisface el modelo. Describa el movimiento de desplazamiento, $y(t)$.

2.18. Considere el problema anterior. Encuentre *a*) la función de velocidad; *b*) la función de aceleración.

2.19. Considere la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = (y-1)(y-2)$. Describa *a*) el comportamiento de y en $y = 1$ y $y = 2$; *b*) ¿qué sucede con y si $y < 1$?; *c*) ¿qué sucede con y si $1 < y < 2$?; *d*) ¿qué sucede con y si $y > 2$?

2.20. Suponga que un compuesto químico, X, es tal que su tasa de decaimiento es proporcional al cubo de su diferencia a partir de una cantidad dada, M, donde tanto X como M están dados en gramos y el tiempo está medido en horas. Realice el modelo de esta relación mediante una ecuación diferencial.

2.21. Suponga que A y B son dos tanques interconectados por varias tuberías y desagües. Si $A(t)$ y $B(t)$ representan el número de galones de azúcar líquida en el tanque respectivo en el tiempo t (horas), ¿qué representan $A'(t)$ y $B'(t)$?

2.22. Considere el problema 2.21. Suponga que el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales da el modelo de la mezcla de los tanques:

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = aA + bB + c \\ \dfrac{dB}{dt} = dA + eB + f \end{cases} \tag{1}$$

donde a, b, c, d, e y f son constantes. ¿Qué le está sucediendo al azúcar líquida y cuáles son las unidades de las seis constantes?

CLASIFICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

3

FORMA ESTÁNDAR Y FORMA DIFERENCIAL

La *forma estándar* o *normal* para una ecuación diferencial de primer orden en la función desconocida $y(x)$ es

$$y' = f(x, y) \tag{3.1}$$

donde la derivada y' sólo aparece sobre el lado izquierdo de *(3.1)*. Aunque no todas, muchas de las ecuaciones diferenciales de primer orden se pueden escribir en la forma estándar por medio de la resolución algebraica de y' haciendo que $f(x, y)$ sea igual a la parte derecha de la ecuación resultante.

El lado derecho de *(3.1)* siempre se puede escribir como el cociente de otras dos funciones, $M(x, y)$ y $-N(x, y)$. Entonces, *(3.1)* se convierte en $dy/dx = M(x, y)/-N(x, y)$, la cual es equivalente a la *forma diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3.2}$$

ECUACIONES LINEALES

Considere una ecuación diferencial en la forma estándar *(3.1)*. Si $f(x, y)$ se puede escribir como $f(x, y) = -p(x)y + q(x)$ (es decir, como una función de x multiplicada por y, más otra función de x), la ecuación diferencial es *lineal*. Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden siempre se pueden expresar como

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{3.3}$$

Las ecuaciones lineales se resuelven en el capítulo 6.

ECUACIONES DE BERNOULLI

Una ecuación diferencial de *Bernoulli* es una ecuación de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \tag{3.4}$$

donde n denota un número real. Cuando $n = 1$ o $n = 0$, una ecuación de Bernoulli se reduce a una ecuación lineal. Las ecuaciones de Bernoulli se resuelven en el capítulo 6.

ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Una ecuación diferencial en su forma estándar *(3.1)* es *homogénea* si

$$f(tx, ty) = f(x, y) \tag{3.5}$$

para cualquier número real t. Las ecuaciones homogéneas se resuelven en el capítulo 4.

Nota: En el sistema general de las ecuaciones diferenciales, la palabra "homogénea" tiene un significado completamente diferente (véase capítulo 8). Sólo en el contexto de las ecuaciones diferenciales de primer orden "homogénea" tiene en realidad el significado definido antes.

ECUACIONES SEPARABLES

Considere una ecuación diferencial de la forma (*3.2*). Si $M(x, y) = A(x)$ (una función sólo de x) y $N(x, y) = B(y)$ (una función sólo de y), la ecuación diferencial es *separable*, o presenta sus *variables separadas*. Las ecuaciones separables se resuelven en el capítulo 4.

ECUACIONES EXACTAS

Una ecuación diferencial en forma diferencial (*3.2*) es *exacta* si

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{3.6}$$

Las ecuaciones exactas se resuelven en el capítulo 5 (donde se da una definición más precisa de exactitud).

PROBLEMAS RESUELTOS

3.1. Escriba la ecuación diferencial $xy' - y^2 = 0$ en su forma estándar.

Resolviendo para y', obtenemos $y' = y^2/x$ que tiene la forma (*3.1*) con $f(x, y) = y^2/x$.

3.2. Escriba la ecuación diferencial $e^x y' + e^{2x} y = \operatorname{sen} x$ en su forma estándar.

Resolviendo para y', obtenemos

$$e^x y' = -e^{2x} y + \operatorname{sen} x$$

o bien

$$y' = -e^x y + e^{-x} \operatorname{sen} x$$

que tiene la forma (*3.1*) con $f(x, y) = -e^x y + e^{-x} \operatorname{sen} x$.

3.3. Escriba la ecuación diferencial $(y' + y)^5 = \operatorname{sen}(y'/x)$ en forma estándar.

Esta ecuación no se puede resolver algebraicamente para y', y *no se puede* escribir en la forma estándar.

3.4. Escriba la ecuación diferencial $y(yy' - 1) = x$ en forma diferencial.

Resolviendo para y', tenemos

$$y^2 y' - y = x$$

$$y^2 y' = x + y$$

o bien

$$y' = \frac{x + y}{y^2} \tag{1}$$

que está en forma estándar con $f(x, y) = (x + y)/y^2$. Hay un número infinito de formas diferenciales diferentes asociadas con (*1*). Cuatro de tales formas son:

a) Tómese $M(x, y) = x + y$, $N(x, y) = -y^2$. Entonces

$$\frac{M(x,y)}{-N(x,y)} = \frac{x+y}{-(-y^2)} = \frac{x+y}{y^2}$$

y (*1*) es equivalente a la forma diferencial

$$(x+y)dx+(-y^2)dy=0$$

b) Tómese $M(x,y)=-1,\ N(x,y)=\dfrac{y^2}{x+y}$. Entonces

$$\frac{M(x,y)}{-N(x,y)}=\frac{-1}{-y^2/(x+y)}=\frac{x+y}{y^2}$$

y (*1*) es equivalente a la forma diferencial

$$(-1)dx+\left(\frac{y^2}{x+y}\right)dy=0$$

c) Tómese $M(x,y)=\dfrac{x+y}{2},\ N(x,y)=\dfrac{-y^2}{2}$. Entonces

$$\frac{M(x,y)}{-N(x,y)}=\frac{(x+y)/2}{-(-y^2/2)}=\frac{x+y}{y^2}$$

y (*1*) es equivalente a la forma diferencial

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)dx+\left(\frac{-y^2}{2}\right)dy=0$$

d) Tómese $M(x,y)=\dfrac{-x-y}{x^2},\ N(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2}$. Entonces

$$\frac{M(x,y)}{-N(x,y)}=\frac{(-x-y)/x^2}{-y^2/x^2}=\frac{x+y}{y^2}$$

y (*1*) es equivalente a la forma diferencial

$$\left(\frac{-x-y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{y^2}{x^2}\right)dy=0$$

3.5. Escriba la ecuación diferencial $dy/dx = y/x$ en forma diferencial.

Esta ecuación tiene un número infinito de formas diferentes. Una de ellas es

$$dy=\frac{y}{x}dx$$

que se puede escribir en la forma (*3.2*) como

$$\frac{y}{x}dx+(-1)dy=0 \tag{1}$$

Multiplicando (*1*) por x, obtenemos

$$ydx+(-x)dy=0 \tag{2}$$

como una segunda forma diferencial. Multiplicando (*1*) por $1/y$, obtenemos

$$\frac{1}{x}dx+\frac{-1}{y}dy=0 \tag{3}$$

como una tercera forma diferencial. Incluso otras formas diferenciales se deducen de (*1*) multiplicando esa ecuación por cualquier otra función de x y y.

3.6. Escriba la ecuación diferencial $(xy+3)dx+(2x-y^2+1)dy=0$ en forma estándar.

Esta ecuación está en forma diferencial. La reescribimos así

$$(2x-y^2+1)dy=-(xy+3)dx$$

que presenta la forma estándar

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(xy+3)}{2x-y^2+1}$$

o bien

$$y'=\frac{xy+3}{y^2-2x-1}$$

3.7. Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales.

a) $y'=(\operatorname{sen}x)y+e^x$ *b)* $y'=x\operatorname{sen}y+e^x$ *c)* $y'=5$ *d)* $y'=y^2+x$

e) $y'+xy^5=0$ *f)* $xy'+y=\sqrt{y}$ *g)* $y'+xy=e^xy$ *h)* $y'+\frac{x}{y}=0$

a) La ecuación es lineal; aquí $p(x)=-\operatorname{sen}x$ y $q(x)=e^x$.

b) La ecuación no es lineal, debido al término sen y.

c) La ecuación es lineal; aquí $p(x)=0$ y $q(x)=5$.

d) La ecuación no es lineal, a causa del término y^2.

e) La ecuación no es lineal, a causa del término y^5.

f) La ecuación no es lineal, a causa del término $y^{1/2}$.

g) La ecuación es lineal. Reescríbala como $y'+(x-e^x)y=0$ con $p(x)=x-e^x$ y $q(x)=0$.

h) La ecuación no es lineal, a causa del término $1/y$.

3.8. Determine si cualesquiera de las ecuaciones diferenciales del problema 3.7 son ecuaciones de Bernoulli.

Todas las ecuaciones lineales son ecuaciones de Bernoulli con $n=0$. Además, tres de las ecuaciones no lineales, *e)*, *f)* y *h)*, lo son también. Reescriba *e)* como $y'=-xy^5$; ésta tiene la forma *(3.4)* con $p(x)=0$, $q(x)=-x$ y $n=5$. Reescriba *f)* como

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x}y^{1/2}$$

Ésta tiene la forma *(3.4)* con $p(x)=q(x)=1/x$ y $n=1/2$. Reeescriba *h)* como $y'=-xy^{-1}$ con $p(x)=0$, $q(x)=-x$ y $n=-1$.

3.9. Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son homogéneas:

a) $y'=\frac{y+x}{x}$ *b)* $y'=\frac{y^2}{x}$ *c)* $y'=\frac{2xye^{x/y}}{x^2+y^2\operatorname{sen}\frac{x}{y}}$ *d)* $y'=\frac{x^2+y}{x^3}$

a) La ecuación es homogénea, pues

$$f(tx,ty)=\frac{ty+tx}{tx}=\frac{t(y+x)}{tx}=\frac{y+x}{x}=f(x,y)$$

b) La ecuación no es homogénea, porque

$$f(tx,ty)=\frac{(ty)^2}{tx}=\frac{t^3y^2}{tx}=t\frac{y^2}{x}\neq f(x,y)$$

c) La ecuación es homogénea, pues

$$f(tx,ty)=\frac{2(tx)(ty)e^{tx/ty}}{(tx)^2+(ty)^2\operatorname{sen}\frac{tx}{ty}}=\frac{t^2 2xye^{x/y}}{t^2x^2+t^2y^2\operatorname{sen}\frac{x}{y}}$$
$$=\frac{2xye^{x/y}}{x^2+y^2\operatorname{sen}\frac{x}{y}}=f(x,y)$$

d) La ecuación no es homogénea, puesto que

$$f(tx,ty)=\frac{(tx)^2+ty}{(tx)^3}=\frac{t^2x^2+ty}{t^3x^3}=\frac{tx^2+y}{t^2x^3}\neq f(x,y)$$

3.10. Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son separables:

a) $\operatorname{sen} x\, dx+y^2dy=0$ *b*) $xy^2dx-x^2y^2dy=0$ *c*) $(1+xy)dx+y\, dy=0$

a) La ecuación diferencial es separable; aquí $M(x, y) = A(x) = \operatorname{sen} x$ y $N(x, y) = B(y) = y^2$.

b) La ecuación no es separable en su forma presente, pues $M(x, y) = xy^2$ no es una función sólo de x. Pero si dividimos ambos lados de la ecuación por x^2y^2, obtenemos la ecuación $(1/x)dx + (-1)dy = 0$, que es separable. Aquí, $A(x) = 1/x$ y $B(y) = -1$.

c) La ecuación no es separable, pues $M(x, y) = 1 + xy$, que no es una función sólo de x.

3.11. Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas.

a) $3x^2y\, dx+(y+x^3)dy=0$ *b*) $xy\, dx+y^2dy=0$

a) La ecuación es exacta; aquí $M(x,y)=3x^2y$, $N(x,y)=y+x^3$ y $\partial M/\partial y=\partial N/\partial x=3x^2$.

b) La ecuación no es exacta. Aquí $M(x,y)=xy$ y $N(x,y)=y^2$; de aquí que $\partial M/\partial y=x$, $\partial N/\partial x=0$ y $\partial M/\partial y\neq\partial N/\partial x$.

3.12. Determine si la ecuación diferencial $y' = y/x$ es exacta.

La exactitud sólo se define para ecuaciones de la forma diferencial, no para la forma estándar. La ecuación diferencial dada tiene muchas formas diferenciales. Una de tales formas está dada en el problema 3.5, ecuación (*1*), como

$$\frac{1}{x}dx+\frac{-1}{y}dy=0$$

Aquí $M(x, y)=x/y$, $N(x, y)=-1$,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{1}{x}\neq 0=\frac{\partial N}{\partial x}$$

y la ecuación no es exacta. Una segunda forma diferencial para la misma ecuación diferencial está dada en la ecuación (*3*) del problema 3.5 así

$$\frac{1}{x}dx+\frac{-1}{y}dy=0$$

Aquí $M(x, y) = 1/x$, $N(x, y) = -1/y$,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=0=\frac{\partial N}{\partial x}$$

y la ecuación es exacta. De este modo, una ecuación diferencial dada tiene muchas formas diferenciales, algunas de las cuales pueden ser exactas.

3.13. Demuestre que una ecuación separable siempre es exacta.

Para una ecuación diferencial separable, $M(x, y) = A(x)$ y $N(x, y) = B(y)$. De este modo,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial A(x)}{\partial y} = 0 \quad y \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial B(y)}{\partial x} = 0$$

Dado que $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ la ecuación diferencial es exacta.

3.14. Un teorema de las ecuaciones diferenciales de primer orden establece que si $f(x, y)$ y $\partial f(x, y)/\partial y$ son continuas en un rectángulo $\mathfrak{R}$: $|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b$, entonces existe un intervalo alrededor de x_0 en el cual el problema de valor inicial $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ tiene una única solución. El problema de valor inicial $y' = 2\sqrt{|y|}$; $y(0) = 0$ tiene las dos soluciones $y = x|x|$ y $y \equiv 0$. ¿Viola este resultado el teorema?

No. Aquí, $f(x, y) = 2\sqrt{|y|}$ y, por lo tanto, $\partial f/\partial y$ no existe en el origen.

PROBLEMAS ADICIONALES

En los problemas del 3.15 al 3.25, escriba las ecuaciones diferenciales dadas en la forma estándar.

3.15. $xy' + y^2 = 0$

3.16. $e^x y' - x = y'$

3.17. $(y')^3 + y^2 + y = \operatorname{sen} x$

3.18. $xy' + \cos(y' + y) = 1$

3.19. $e^{(y'+y)} = x$

3.20. $(y')^2 - 5y' + 6 = (x + y)(y' - 2)$

3.21. $(x - y)dx + y^2 dy = 0$

3.22. $\frac{x+y}{x-y}dx - dy = 0$

3.23. $dx + \frac{x+y}{x-y}dy = 0$

3.24. $(e^{2x} - y)dx + e^x dy = 0$

3.25. $dy + dx = 0$

En los problemas del 3.26 al 3.35, se dan ecuaciones diferenciales tanto en su forma estándar como en su forma diferencial. Determine si las ecuaciones en la forma estándar son homogéneas y/o lineales y, si no son lineales, si son de Bernoulli; determine si las ecuaciones en forma diferencial, *tal como están dadas*, son separables y/o exactas.

3.26. $y' = xy$; $xydx - dy = 0$

3.27. $y' = xy$; $xdx - \frac{1}{y}dy = 0$

3.28. $y' = xy + 1$; $(xy + 1)dx - dy = 0$

3.29. $y' = \frac{x^2}{y^2}$; $\frac{x^2}{y^2}dx - dy = 0$

3.30. $y' = \frac{x^2}{y^2}$; $-x^2 dx + y^2 dy = 0$

3.31. $y' = -\frac{2y}{x}$; $2xydx + x^2dy = 0$

3.32. $y' = \frac{xy^2}{x^2y + y^3}$; $xy^2dx - (x^2y + y^3)dy = 0$

3.33. $y' = \frac{-xy^2}{x^2y + y^2}$; $xy^2dx + (x^2y + y^2)dy = 0$

3.34. $y' = x^3y + xy^3$; $(x^2 + y^2)dx - \frac{1}{xy}dy = 0$

3.35. $y' = 2xy + x$; $(2xye^{-x^2} + xe^{-x^2})dx - e^{-x^2}dy = 0$

ECUACIONES DIFERENCIALES SEPARABLES DE PRIMER ORDEN

4

SOLUCIÓN GENERAL

La solución para una ecuación separable de primer orden (véase capítulo 3)

$$A(x)dx + B(y)dy = 0 \tag{4.1}$$

es

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = c \tag{4.2}$$

donde c representa una constante arbitraria.

Las integrales obtenidas en la ecuación (*4.2*) pueden ser, para todos los propósitos prácticos, imposibles de calcular. En tales casos, las técnicas numéricas (véanse los capítulos 18, 19 y 20) se usan para obtener una solución aproximada. Incluso si se pueden realizar las integraciones que se indican en (*4.2*), tal vez no sea posible resolver algebraicamente para y en términos de x. En tal caso, la solución queda en la forma implícita.

SOLUCIONES AL PROBLEMA DE VALOR INICIAL

La solución al problema de valor inicial

$$A(x)dx + B(y)dy = 0; \quad y(x_0) = y_0 \tag{4.3}$$

puede obtenerse, como de costumbre, utilizando en primer lugar la ecuación (*4.2*) para resolver la ecuación diferencial y luego aplicar la condición inicial para calcular c directamente.

De manera alternativa, la solución para la ecuación (*4.3*) se puede obtener a partir de

$$\int_{x_0}^{x} A(x)dx + \int_{y_0}^{y} B(y)dy = 0 \tag{4.4}$$

Sin embargo, la ecuación (*4.4*) tal vez no determine la solución de (*4.3*) *de manera única*; es decir, (*4.4*) puede tener muchas soluciones, de las cuales sólo una satisfará el problema de valor inicial.

REDUCCIÓN DE ECUACIONES HOMOGÉNEAS

La ecuación diferencial homogénea

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{4.5}$$

que tiene la propiedad de que $f(tx, ty) = f(x, y)$ (véase el capítulo 3) se puede transformar en una ecuación diferencial separable realizando la sustitución

$$y = xv \tag{4.6}$$

junto con su correspondiente derivada

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \tag{4.7}$$

La ecuación resultante en las variables v y x se resuelve como una ecuación diferencial separable; la solución que se requiere para la ecuación (*4.5*) se obtiene por medio de una sustitución hacia atrás.

De manera alternativa, la solución para (*4.5*) se puede obtener volviendo a escribir la ecuación diferencial como

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)} \tag{4.8}$$

y luego sustituyendo

$$x = yu \tag{4.9}$$

y la derivada correspondiente

$$\frac{dx}{dy} = u + y\frac{du}{dy} \tag{4.10}$$

en la ecuación (*4.8*). Después de simplificar, la ecuación diferencial resultante será una con variables (esta vez, u y y) separables.

Comúnmente, resulta indistinto qué método de solución se use (véanse problemas 4.12 y 4.13). Sin embargo, algunas veces una de las sustituciones (*4.6*) o (*4.9*) es definitivamente superior a la otra. En tales casos, la mejor sustitución por lo general resulta evidente a partir de la forma de la propia ecuación diferencial. (Véase problema 4.17.)

PROBLEMAS RESUELTOS

4.1. Resuelva $xdx - y^2dy = 0$.

Para esta ecuación diferencial, $A(x) = x$ y $B(y) = -y^2$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (*4.2*), tenemos

$$\int xdx + \int (-y^2)dy = c$$

la cual, después de aplicar las operaciones de integración indicadas, se convierte en $x^2/2 - y^3/3 = c$. Resolviendo explícitamente para y, obtenemos la solución como

$$y = \left(\frac{3}{2}x^2 + k\right)^{1/3}; \quad k = -3c$$

4.2. Resuelva $y' = y^2x^3$.

Primero volvemos a escribir esta ecuación en la forma diferencial (véase capítulo 3) $x^3dx - (1/y^2)dy = 0$. Luego $A(x) = x^3$ y $B(y) = -1/y^2$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (*4.2*), tenemos

$$\int x^3dx + \int (-1/y^2)dy = c$$

o, realizando las operaciones de integración indicadas, $x^4/4+1/y=c$. Resolviendo explícitamente para *y*, obtenemos la solución así

$$y=\frac{-4}{x^4+k},\quad k=-4c$$

4.3. Resuelva $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+2}{y}$.

Esta ecuación se puede volver a escribir en la forma diferencial

$$(x^2+2)dx-y\,dy=0$$

la cual es separable con $A(x)=x^2+2$ y $B(y)=-y$. Su solución es

$$\int(x^2+2)dx-\int y\,dy=c$$

o bien

$$\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{2}y^2=c$$

Resolviendo para *y*, obtenemos la solución en forma implícita como

$$y^2=\frac{2}{3}x^3+4x+k$$

con $k=-2c$. Resolviendo implícitamente para *y*, obtenemos las dos soluciones

$$y=\sqrt{\frac{2}{3}x^3+4x+k}\quad \text{y}\quad y=-\sqrt{\frac{2}{3}x^3+4x+k}$$

4.4. Resuelva $y'=5y$.

Primero vuelva a escribir esta ecuación en la forma diferencial $5\,dx-(1/y)dy=0$, la cual es separable. Su solución es

$$\int 5\,dx+\int(-1/y)dy=c$$

o bien, realizando las operaciones de integración, $5x-1n|y|=c$.

Con el fin de resolver explícitamente para *y*, primero volvemos a escribir la solución como $\ln|y|=5x-c$ y luego tomamos el exponencial de ambos lados. De este modo, $e^{1n|y|}=e^{5x-c}$. Notando que $e^{1n|y|}=|y|$, obtenemos $|y|=e^{5x}e^{-c}$, o $y=\pm e^{-c}e^{5x}$. La solución está dada explícitamente por $y=ke^{5x}$, $k=\pm e^{-c}$.

Obsérvese que la presencia del término $(-1/y)$ en la forma diferencial de la ecuación diferencial requiere de la restricción $y\neq 0$ en nuestra deducción de la solución. Esta restricción es equivalente a la restricción $k\neq 0$, pues $y=ke^{5x}$. Sin embargo, por inspección, $y\equiv 0$ es una solución de la ecuación diferencial tal como se dio originalmente. De este modo, $y=ke^{5x}$ es la solución para toda *k*.

La ecuación diferencial dada originalmente también es lineal. Véase el problema 6.9 para un método alternativo de solución.

4.5. Resuelva $y'=\dfrac{x+1}{y^4+1}$.

Esta ecuación, en forma diferencial, es $(x+1)dx+(-y^4-1)dy=0$, la cual es separable. Su solución es

$$\int(x+1)dx+\int(-y^4-1)dy=c$$

o, llevando a cabo las operaciones de integración,

$$\frac{x^2}{2}+x-\frac{y^5}{5}-y=c$$

Puesto que es algebraicamente imposible resolver esta ecuación de manera explícita para *y*, la solución debe quedar en su presente forma implícita.

4.6. Resuelva $dy = 2t(y^2+9)dt$.

Esta ecuación se puede volver a escribir como

$$\frac{dy}{y^2+9} - 2t\,dt = 0$$

la cual es separable en las variables y y t. Su solución es

$$\int \frac{dy}{y^2+9} - \int 2t\,dt = c$$

o bien, realizando las integrales dadas,

$$\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{y}{3}\right) - t^2 = c$$

Resolviendo para y, obtenemos

$$\arctan\left(\frac{y}{3}\right) = 3(t^2+c)$$

$$\frac{y}{3} = \tan(3t^2+3c)$$

o bien

$$y = 3\tan(3t^2+k)$$

con $k = 3c$.

4.7. Resuelva $\dfrac{dx}{dy} = x^2 - 2x + 2$.

Esta ecuación se puede reescribir en forma diferencial

$$\frac{dx}{x^3-2x+2} - dt = 0$$

la cual es separable en las variables x y t. Su solución es

$$\int \frac{dx}{x^3-2x+2} - \int dt = c$$

Calculando la primera integral al completar el cuadrado, obtenemos

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2+1} - \int dt = c$$

o bien

$$\arctan(x-1) - t = c$$

Resolviendo para x como función de t, obtenemos

$$\arctan(x-1) = t + c$$

$$x - 1 = \tan(t+c)$$

o bien

$$x = 1 + \tan(t+c)$$

4.8. Resuelva $e^x dx - y\,dy = 0$; $y(0) = 1$.

La solución para la ecuación diferencial está dada por la ecuación (*4.2*) así

$$\int e^x dx + \int (-y)dy = c$$

o bien, realizando las operaciones de integración indicadas, se obtiene $y^2 = 2e^x + k$, $k = -2c$. Aplicando la condición inicial, obtenemos $(1)^2 = 2e^0 + k$, $1 = 2 + k$ o bien $k = -1$. De este modo la solución al problema de valor inicial es

$$y^2 = 2e^x - 1 \quad \text{o bien} \quad y = \sqrt{2e^x - 1}$$

[Obsérvese que no podemos elegir la raíz cuadrada negativa, pues entonces $y(0) = -1$, lo que viola la condición inicial.]

Para asegurarnos de que y sigue siendo real, debemos restringir x de modo tal que $2e^x - 1 \geq 0$. Para garantizar que y' existe [obsérvese que $y'(x) = dy/dx = e^x/y$], debemos restringir x, de modo que $2e^x - 1 \neq 0$. Estas condiciones juntas implican que $2e^x - 1 > 0$, o bien $x > \ln \frac{1}{2}$.

4.9. Use la ecuación (*4.4*) para resolver el problema 4.8.

Para este problema, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $A(x) = e^x$, y $B(y) = -y$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (*4.4*), obtenemos

$$\int_0^x e^x dx + \int_1^y (-y) dy = 0$$

Llevando a cabo estas integrales, tenemos

$$e^x \Big|_0^x + \left(\frac{-y^2}{2}\right)\Bigg|_1^y = 0 \quad \text{o bien} \quad e^x - e^0 + \left(\frac{-y^2}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

De este modo, $y^2 = 2e^x - 1$ y, tal como en el problema 4.8, $y = \sqrt{2e^x - 1}$, $x > \ln \frac{1}{2}$.

4.10. Resuelva $x \cos x \, dx + (1 - 6y^5) dy = 0$; $y(\pi) = 0$.

Aquí, $x_0 = \pi$, $y_0 = 0$, $A(x) = x \cos x$ y $B(y) = 1 - 6y^5$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (*4.4*), obtenemos

$$\int_\pi^x x \cos x \, dx + \int_0^y (1 - 6y^5) dy = 0$$

Calculando estas integrales (la primera mediante integración por partes), encontramos que

$$x \operatorname{sen} x \Big|_\pi^x + \cos x \Big|_\pi^x + (y - y^6)\Big|_0^y = 0$$

o bien

$$x \operatorname{sen} x + \cos x + 1 = y^6 - y$$

Dado que no podemos resolver esta ecuación explícitamente para y, debemos conformarnos con su solución en su presente forma implícita.

4.11. Resuelva $y' = \dfrac{y + x}{x}$.

Esta ecuación diferencial no es separable, pero es homogénea, tal como lo muestra el problema 3.9*a*). Sustituyendo las ecuaciones (*4.6*) y (*4.7*) en la ecuación, obtenemos

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{xv + x}{x}$$

que se puede simplificar algebraicamente a

$$x\frac{dv}{dx} = 1 \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{x}dx - dv = 0$$

Esta última ecuación es separable, su solución es

$$\int \frac{1}{x} dx - \int dv = c$$

la cual, al ser evaluada, da $v = \ln|x| - c$, o bien

$$v = \ln|kx| \tag{1}$$

donde hemos colocado $c = -\ln|k|$ y observamos que $\ln|x| + \ln|k| = \ln|kx|$. Finalmente, sustituyendo $v = y/x$ hacia atrás en (*1*), obtenemos la solución a la ecuación diferencial dada como $y = x\ln|kx|$.

4.12. Resuelva $y' = \dfrac{2y^4 + x^4}{xy^3}$.

Esta ecuación diferencial no es separable. En cambio, presenta la forma $y' = f(x, y)$, con

$$f(x,y) = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3}$$

donde

$$f(tx,ty) = \frac{2(ty)^4 + (tx)^4}{(tx)(ty)^3} = \frac{t^4(2y^4 + x^4)}{t^4(xy^3)} = \frac{2y^4 + x^4}{xy^3} = f(x,y)$$

de modo que es homogénea. Sustituyendo las ecuaciones (*4.6*) y (*4.7*) en la ecuación diferencial dada, obtenemos

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2(xv)^4 + x^4}{x(xv)^3}$$

la cual se puede simplificar mediante operaciones algebraicas para obtener

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^4 + 1}{v^3} \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{x}dx - \frac{v^3}{v^4 + 1}dv = 0$$

Esta última ecuación es separable; su solución es

$$\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{v^3}{v^4 + 1}dv = c$$

Integrando, obtenemos $\ln|x| - \frac{1}{4}\ln(v^4 + 1) = c$, o

$$v^4 + 1 = (kx)^4 \qquad (1)$$

donde hemos colocado $c = -\ln|k|$ y luego usado las identidades

$$\ln|x| + \ln|k| = \ln|kx| \quad \text{y} \quad 4\ln|kx| = \ln(kx)^4$$

Finalmente, sustituyendo $v = y/x$ de regreso en la ecuación (*1*), obtenemos

$$y^4 = c_1x^8 - x^4 \; (c_1 = k^4) \qquad (2)$$

4.13. Resuelva la ecuación diferencial del problema 4.12 usando las ecuaciones (*4.9*) y (*4.10*).

En primer lugar volvemos a escribir la ecuación diferencial de este modo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{xy^3}{2y^4 + x^4}$$

Luego, sustituyendo (*4.9*) y (*4.10*) en esta nueva ecuación diferencial, obtenemos

$$u + y\frac{du}{dy} = \frac{(yu)y^3}{2y^4 + (yu)^4}$$

que mediante operaciones algebraicas se puede simplificar y convertir en

$$y\frac{du}{dy} = -\frac{u + u^5}{2 + u^4}$$

o bien
$$\frac{1}{y}dy+\frac{2+u^4}{u+u^5}du=0 \qquad (1)$$

La ecuación (*1*) es separable; su solución es

$$\int\frac{1}{y}dy+\int\frac{2+u^4}{u+u^5}du=c$$

La primera integral es $\ln|y|$. Para evaluar la segunda integral, usamos fracciones parciales sobre el integrando para obtener

$$\frac{2+u^4}{u+u^5}=\frac{2+u^4}{u(1+u^4)}=\frac{2}{u}-\frac{u^3}{1+u^4}$$

Por lo tanto,

$$\int\frac{2+u^4}{u+u^5}du=\int\frac{2}{u}du-\int\frac{u^3}{1+u^4}du=2\ln|u|-\frac{1}{4}\ln(1+u^4)$$

La solución para (*1*) está en $\ln|y|+2\ln|u|-\frac{1}{4}\ln(1+u^4)=c$, la cual se puede reescribir como

$$ky^4u^8=1+u^4 \qquad (2)$$

donde $c=-\frac{1}{4}\ln|k|$. Sustituyendo $u=x/y$ de regreso en (*2*), nuevamente tenemos (*2*) del problema 4.12.

4.14. Resuelva $y'=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$.

Esta ecuación diferencial no es separable. En cambio presenta la forma $y'=f(x,y)$, con

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

donde
$$f(tx,ty)=\frac{2(tx)(ty)}{(tx)^2-(ty)^2}=\frac{t^2(2xy)}{t^2(x^2-y^2)}=\frac{2xy}{x^2-y^2}=f(x,y)$$

de modo que es homogénea. Sustituyendo las ecuaciones (*4.6*) y (*4.7*) en la ecuación diferencial tal como se dio originalmente, obtenemos

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{2x(xv)}{x^2-(xv)^2}$$

la cual se puede simplificar algebraicamente así

$$x\frac{dv}{dx}=-\frac{v(v^2+1)}{v^2-1}$$

o bien
$$\frac{1}{x}dx+\frac{v^2-1}{v(v^2+1)}dv=0 \qquad (1)$$

Utilizando fracciones parciales, podemos expandir (*1*) de la siguiente forma

$$\frac{1}{x}dx+\left(-\frac{1}{v}+\frac{2v}{v^2+1}\right)dv=0 \qquad (2)$$

La solución para esta ecuación separable se encuentra integrando ambos lados de (*2*). Al hacer esto, obtenemos $\ln|x|-\ln|v|+\ln(v^2+1)=c$, que se puede simplificar así

$$x(v^2+1)=kv \quad (c=\ln|k|) \qquad (3)$$

Sustituyendo $v=y/x$ en (*3*), encontramos que la solución de la ecuación diferencial dada es $x^2+y^2=ky$.

4.15. Resuelva $y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

Esta ecuación diferencial es homogénea. Sustituyendo las ecuaciones (*4.6*) y (*4.7*) en ella, obtenemos

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2+(xv)^2}{x(xv)}$$

que se puede simplificar algebraicamente así

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{x}dx - v\,dv = 0$$

La solución para esta ecuación diferencial separable es $\ln|x| - v^2/2 = c$, o de manera equivalente

$$v^2 = \ln x^2 + k \quad (k = -2c) \tag{1}$$

Sustituyendo $v = y/x$ en (*1*), encontramos que la solución a la ecuación diferencial dada es

$$y^2 = x^2\ln x^2 + kx^2$$

4.16. Resuelva $y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$; $y(1) = -2$.

La solución para la ecuación diferencial está dada en el problema 3.15 como $y^2 = x^2\ln x^2 + kx^2$. Aplicando la condición inicial, obtenemos $(-2)^2 = (1)^2\ln(1)^2 + k(1)^2$, o bien $k = 4$. (Recuerde que ln 1 = 0.) De esta forma, la solución al problema de valor inicial es

$$y^2 = x^2\ln x^2 + 4x^2 \quad \text{o bien} \quad y = -\sqrt{x^2\ln x^2 + 4x^2}$$

Se toma la raíz cuadrada negativa, para ser consistente con la condición inicial.

4.17. Resuelva $y' = \dfrac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}}$.

La ecuación diferencial no es separable, pero es homogénea. Observando el término (x/y) en el exponente, intentamos la sustitución $u = x/y$, que es una forma equivalente de (*4.9*). Volviendo a escribir la ecuación diferencial como

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}}{2xye^{(x/y)^2}}$$

tenemos que usar las sustituciones (*4.9*) y (*4.10*), y simplificando,

$$y\frac{du}{dy} = \frac{1+e^{u^2}}{2ue^{u^2}} \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{y}dy - \frac{2ue^{u^2}}{1+e^{u^2}}du = 0$$

Esta ecuación es separable; su solución es

$$\ln|y| - \ln(1+e^{u^2}) = c$$

que se puede volver a escribir como

$$y = k(1+e^{u^2}) \quad (c = \ln|k|) \tag{1}$$

Sustituyendo $u = x/y$ en (*1*), obtenemos la solución de la ecuación diferencial dada como

$$y = k\left[1 + e^{(x/y)^2}\right]$$

4.18. Pruebe que todas las soluciones de la ecuación (*4.2*) satisfacen la ecuación (*4.1*).

Vuelva a escribir (*4.1*) como $A(x)+B(y)y'=0$. Si $y(x)$ es una solución, debe satisfacer la ecuación de manera idéntica en x; de aquí que,

$$A(x)+B[y(x)]y'(x)=0$$

Integrando ambos lados de esta ecuación con respecto a x, obtenemos

$$\int A(x)dx+\int B[y(x)]\,y'(x)dx=c$$

En la segunda integral, haga el cambio de variables $y = y(x)$, por ello $dy = y'(x)\ dx$. El resultado de esta sustitución es (*4.2*).

4.19. Pruebe que todas las soluciones del sistema (*4.3*) son soluciones de (*4.4*).

Siguiendo el mismo razonamiento del problema 4.18, excepto que ahora integramos de $x = x_0$ a $x = x$, obtenemos

$$\int_{x_0}^{x} A(x)dx+\int_{x_0}^{x} B[y(x)]y'(x)dx=0$$

La sustitución $y = y(x)$ da nuevamente el resultado deseado. Observe que mientras que x varía de x_0 a x, y varía de $y(x_0) = y_0$ a $y(x) = y$.

4.20. Pruebe que si $y'=f(x,y)$ es homogénea, entonces la ecuación diferencial se puede reescribir como $y' = g(y/x)$, donde $g(y/x)$ depende sólo del cociente y/x.

Tenemos que $f(x,y)=f(tx,ty)$. Como esta ecuación es válida para toda t, debe ser válida, en particular, para $t = 1/x$. Así, $f(x,y)=f(1,\ y/x)$. Si ahora definimos $g(y/x)=f(1,\ y/x)$, entonces tenemos $y'=f(x,y)=f(1,\ y/x)=g(y/x)$, tal como se pide.

Observe que esta forma sugiere la sustitución $v = y/x$ que es equivalente a (*4.6*). Si, arriba, hubiéramos colocado $t = 1/y$, entonces $f(x, y) = f(x/y, 1) = h(x, y)$, lo que sugiere la solución alternativa (*4.9*).

4.21. Una función $g(x, y)$ es *homogénea de grado n* si $g(tx, ty) = t^n g(x, y)$ para toda t. Determine si las siguientes funciones son homogéneas y, de ser así, encuentre su grado:

a) $xy+y^2$, *b*) $x+y\,\text{sen}\,(y/x)^2$, *c*) $x^3+xy^2e^{x/y}$ y *d*) $x+xy$

a) $(tx)(ty)+(ty)^2=t^2(xy+y^2)$; homogénea de grado dos.

b) $tx+ty\ \text{sen}\left(\dfrac{ty}{tx}\right)^2=t\left[x+y\ \text{sen}\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right]$; homogénea de grado uno.

c) $(tx)^3+(tx)(ty)^2e^{tx/ty}=t^3(x^3+xy^2e^{x/y})$; homogénea de grado tres.

d) $tx+(tx)(ty)=tx+t^2xy$; no homogénea.

4.22. La siguiente es una definición alternativa de una ecuación diferencial homogénea: una ecuación diferencial $M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$ es *homogénea* si tanto $M(x, y)$ como $N(x, y)$ son homogéneas del mismo grado (véase problema 4.21). Demuestre que esta definición comprende la que se dio en el capítulo 3.

Si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas de grado n, entonces

$$f(tx,ty)=\frac{M(tx,ty)}{-N(tx,ty)}=\frac{t^nM(x,y)}{-t^nN(x,y)}=\frac{M(x,y)}{-N(x,y)}=f(x,y)$$

PROBLEMAS ADICIONALES

En los problemas del 4.23 al 4.45, resuelva las ecuaciones diferenciales o los problemas de valor inicial dados.

4.23. $x\,dx + y\,dy = 0$

4.24. $x\,dx - y^3\,dy = 0$

4.25. $dx + \frac{1}{y^4}dy = 0$

4.26. $(t+1)dt - \frac{1}{y^2}dy = 0$

4.27. $\frac{1}{x}dx - \frac{1}{y}dy = 0$

4.28. $\frac{1}{x}dx + dy = 0$

4.29. $x\,dx + \frac{1}{y}dy = 0$

4.30. $(t^2+1)dt + (y^2+y)dy = 0$

4.31. $\frac{4}{t}dt - \frac{y-3}{y}dy = 0$

4.32. $dx - \frac{1}{1+y^2}dy = 0$

4.33. $dx - \frac{1}{y^2-6y+13}dy = 0$

4.34. $y' = \frac{y}{x^2}$

4.35. $y' = \frac{xe^x}{2y}$

4.36. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y}$

4.37. $\frac{dy}{dx} = y^2$

4.38. $\frac{dx}{dt} = x^2t^2$

4.39. $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}$

4.40. $\frac{dy}{dt} = 3+5y$

4.41. $\operatorname{sen} x\,dx + y\,dy = 0; \quad y(0) = -2$

4.42. $(x^2+1)dx + \frac{1}{y}dy = 0; \quad y(-1) = 1$

4.43. $xe^{x^2}dx + (y^5-1)dy = 0; \quad y(0) = 0$

4.44. $y' = \frac{x^2y - y}{y+1}; \quad y(3) = -1$

4.45. $\frac{dx}{dt} = 8 - 3x; \quad x(0) = 4$

En los problemas del 4.46 al 4.54, determine si las ecuaciones diferenciales dadas son homogéneas y, de ser así, resuélvalas.

4.46. $y' = \frac{y-x}{x}$

4.47. $y' = \frac{2y-x}{x}$

4.48. $y' = \frac{x^2+2y^2}{xy}$

4.49. $y' = \frac{2x+y^2}{xy}$

4.50. $y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}$

4.51. $y' = \frac{2xy}{y^2-x^2}$

4.52. $y' = \frac{y}{x+\sqrt{xy}}$

4.53. $y' = \frac{y^2}{xy+(xy^2)^{1/3}}$

4.54. $y' = \frac{x^4+3x^2y^2+y^4}{x^3y}$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN EXACTAS

5

DEFINICIÓN DE LAS PROPIEDADES

Una ecuación diferencial

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{5.1}$$

es *exacta* si existe una función $g(x, y)$ tal que

$$dg(x, y) = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \tag{5.2}$$

Prueba de exactitud: Si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas sobre algún rectángulo del plano xy, entonces (*5.1*) es exacta si y sólo si

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \tag{5.3}$$

MÉTODO DE SOLUCIÓN

Para resolver la ecuación (*5.1*), asumiendo que es exacta, primero resolvemos las ecuaciones

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \tag{5.5}$$

para $g(x, y)$. La solución para (*5.1*) entonces está dada implícitamente por

$$g(x, y) = c \tag{5.6}$$

donde c representa una constante arbitraria.

La ecuación (*5.6*) es inmediata de las ecuaciones (*5.1*) y (*5.2*). Si (*5.2*) se sustituye en (*5.1*), obtenemos $dg(x, y(x)) = 0$. Integrando esta ecuación (obsérvese que podemos escribir 0 como $0\,dx$), tenemos $\int dg(x, y(x)) = \int 0\,dx$, la cual, a su vez, implica (*5.6*).

FACTORES DE INTEGRACIÓN

En general, la ecuación (*5.1*) no es exacta. Ocasionalmente, es posible transformar a (*5.1*) en una ecuación diferencial exacta por medio de una sensata multiplicación. Una función $I(x, y)$ es un *factor de integración* para (*5.1*) si la ecuación

$$I(x, y)[M(x, y)dx + N(x, y)dy] = 0 \tag{5.7}$$

es exacta. Una solución para (*5.1*) se obtiene resolviendo la ecuación diferencial exacta definida por (*5.7*). Algunos de los factores de integración más comunes se muestran en la tabla 5-1 y en las condiciones siguientes:

Si $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \equiv g(x)$ una función sólo de x, entonces

$$I(x, y) = e^{\int g(x)dx} \tag{5.8}$$

Si $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \equiv h(y)$, una función sólo de y, entonces

$$I(x, y) = e^{\int h(y)dy} \tag{5.9}$$

Tabla 5.1

Grupo de términos	Factor de integración $I(x, y)$	Diferencial exacta $dg(x, y)$
$y\,dx - x\,dy$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$
$y\,dx - x\,dy$	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$
$y\,dx - x\,dy$	$-\frac{1}{xy}$	$\frac{x\,dy - y\,dx}{xy} = d\left(\ln\frac{y}{x}\right)$
$y\,dx - x\,dy$	$-\frac{1}{x^2+y^2}$	$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$
$y\,dx + x\,dy$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{y\,dx + x\,dy}{xy} = d(\ln xy)$
$y\,dx + x\,dy$	$\frac{1}{(xy)^n},\ n>1$	$\frac{y\,dx + x\,dy}{(xy)^n} = d\left[\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right]$
$y\,dy + x\,dx$	$\frac{1}{x^2+y^2}$	$\frac{y\,dy + x\,dx}{x^2+y^2} = d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right]$
$y\,dy + x\,dx$	$\frac{1}{(x^2+y^2)^n},\ n>1$	$\frac{y\,dy + x\,dx}{(x^2+y^2)^n} = d\left[\frac{-1}{2(n-1)(x^2+y^2)^{n-1}}\right]$
$ay\,dx + bx\,dy$ (a, b constantes)	$x^{a-1}y^{b-1}$	$x^{a-1}y^{b-1}(ay\,dx + bx\,dy) = d(x^a y^b)$

Si $M = yf(xy)$ y $N = xg(xy)$, entonces

$$I(x, y) = \frac{1}{xM - yN} \tag{5.10}$$

En general, los factores de integración son difíciles de descubrir. Si una ecuación diferencial no presenta una de las formas dadas antes, entonces es probable que la búsqueda de un factor de integración no tenga éxito, para lo cual se recomiendan otros métodos de solución.

PROBLEMAS RESUELTOS

5.1. Determine si la ecuación diferencial $2xy\,dx + (1 + x^2)dy = 0$ es exacta.

Esta ecuación tiene la forma de la ecuación (*5.1*) con $M(x, y) = 2xy$ y $N(x, y) = 1 + x^2$. Puesto que $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x = 2x$ la ecuación diferencial es exacta.

5.2. Resuelva la ecuación diferencial dada en el problema 5.1.

Fue demostrado que esta ecuación es exacta. Ahora determinemos una función $g(x, y)$ que satisfaga las ecuaciones (*5.4*) y (*5.5*). Sustituyendo $M(x, y) = 2xy$ en (*5.4*), obtenemos $\partial g/\partial x = 2xy$. Integrando ambos lados de la ecuación con respecto a x, hallamos

$$\int \frac{\partial g}{\partial x}dx = \int 2xy\,dx$$

o bien
$$g(x, y) = x^2y + h(y) \tag{1}$$

Obsérvese que cuando integramos con respecto a x, la constante (*con respecto a* x) de integración puede depender de y.

Ahora determinamos $h(y)$. Derivando (*1*) con respecto a y, obtenemos $\partial g/\partial y = x^2 + h'(y)$. Sustituyendo esta ecuación junto con $N(x, y) = 1 + x^2$ en (*5.5*), tenemos

$$x^2 + h'(y) = 1 + x^2 \quad \text{o bien} \quad h'(y) = 1$$

Integrando esta última ecuación con respecto a y, obtenemos $h(y) = y + c_1$ (c_1 = constante). Sustituyendo esta expresión en (*1*) se tiene

$$g(x, y) = x^2y + y + c_1$$

La solución de la ecuación diferencial, que está dada implícitamente por (*5.6*) como $g(x, y) = c$ es

$$x^2y + y = c_2 \qquad (c_2 = c - c_1)$$

Resolviendo para y explícitamente, obtenemos la solución así $y = c_2/(x^2 + 1)$.

5.3. Determine si la ecuación diferencial $y\,dx - x\,dy = 0$ es exacta.

Esta ecuación tiene la forma de la ecuación (*5.1*) con $M(x, y) = y$ y $N(x, y) = -x$. Aquí

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

que no son iguales, de modo que la ecuación diferencial dada no es exacta.

5.4. Determine si la ecuación diferencial

$$(x + \operatorname{sen} y)dx + (x\cos y - 2y)dy = 0$$

es exacta.

Aquí $M(x, y) = x + \operatorname{sen} y$ y $N(x, y) = x\cos y - 2y$. De este modo, $\partial M/\partial y = \partial N/dx = \cos y$, y la ecuación diferencial es exacta.

5.5. Resuelva la ecuación diferencial dada en el problema 5.4.

Ya se demostró que esta ecuación es exacta. Ahora buscamos una función $g(x, y)$ que satisfaga (*5.4*) y (*5.5*). Sustituyendo $M(x, y)$ en (*5.4*), obtenemos $\partial g/\partial x = x + \operatorname{sen} y$. Integrando ambos lados de la ecuación con respecto a x, encontramos que

$$\int \frac{\partial g}{\partial x} dx = \int (x + \operatorname{sen} y) dx$$

o bien

$$g(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + x\operatorname{sen} y + h(y) \qquad (1)$$

Para hallar $h(y)$, derivamos (*1*) con respecto a y, obteniendo $\partial g/\partial y = x\cos y + h'(y)$, y luego sustituimos este resultado junto con $N(x, y) = x\cos y - 2y$ en (*5.5*). Así, hallamos

$$x\cos y + h'(y) = x\cos y - 2y \quad \text{o bien} \quad h'(y) = -2y$$

de lo cual se sigue que $h(y) = -y^2 + c_1$. Sustituyendo esta $h(y)$ en (*1*), obtenemos

$$g(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + x\operatorname{sen} y - y^2 + c_1$$

La solución de la ecuación diferencial está dada implícitamente por (*5.6*) como

$$\frac{1}{2}x^2 + x\operatorname{sen} y - y^2 = c_2 \quad (c_2 = c - c_1)$$

5.6. Resuelva $y' = \dfrac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}$.

Volviendo a escribir esta ecuación en forma diferencial, obtenemos

$$(2 + ye^{xy})dx + (xe^{xy} - 2y)dy = 0$$

Aquí, $M(x, y) = 2 + ye^{xy}$ y $N(x, y) = xe^{xy} - 2y$ y, pues $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x = e^{xy} + xye^{xy}$, la ecuación diferencial es exacta. Sustituyendo $M(x, y)$ en (*5.4*), encontramos que $\partial g/\partial x = 2 + ye^{xy}$; integrando luego con respecto a x, obtenemos

$$\int \frac{\partial g}{\partial x} dx = \int [2 + ye^{xy}] dx$$

o bien

$$g(x, y) = 2x + e^{xy} + h(y) \qquad (1)$$

Para hallar $h(y)$, primero derivamos (*1*) con respecto a y, obteniendo $\partial g/\partial y = xe^{xy} + h'(y)$; luego sustituimos este resultado junto con $N(x, y)$ en (*5.5*) para obtener

$$xe^{xy} + h'(y) = xe^{xy} - 2y \quad \text{o bien} \quad h'(y) = -2y$$

Luego sigue que $h(y) = -y^2 + c_1$. Sustituyendo esta $h(y)$ en (*1*), obtenemos

$$g(x, y) = 2x + e^{xy} - y^2 + c_1$$

La solución a la ecuación diferencial está dada implícitamente por (*5.6*) así

$$2x + e^{xy} - y^2 = c_2 \quad (c_2 = c - c_1)$$

5.7. Determine si la ecuación diferencial $y^2dt+(2yt+1)dy=0$ es exacta.

Ésta es una ecuación para la función desconocida $y(t)$. En términos de las variables t y y, tenemos que $M(t, y)=y^2$, $N(t, y)=2yt+1$, y

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y^2)=2y=\frac{\partial}{\partial t}(2yt+1)=\frac{\partial N}{\partial t}$$

de modo que la ecuación diferencial es exacta.

5.8. Resuelva la ecuación diferencial dada en el problema 5.7.

Ya se demostró que esta ecuación es exacta, así que el procedimiento de solución dado por las ecuaciones *(5.4)* hasta la *(5.6)*, con t reemplazando a x, es aplicable. Aquí

$$\frac{\partial g}{\partial t}=y^2$$

Integrando ambos lados de la ecuación con respecto a t, obtenemos

$$\int\frac{\partial g}{\partial t}dt=\int y^2dt$$

o bien
$$g(x, y)=y^2t+h(y) \tag{1}$$

Derivando *(1)* con respecto a y, obtenemos

$$\frac{\partial g}{\partial y}=2yt+\frac{dh}{dy}$$

Por eso,
$$2yt+\frac{dh}{dy}=2yt+1$$

donde el lado derecho de esta última ecuación es el coeficiente de dy en la ecuación diferencial original. Se sigue que

$$\frac{dh}{dy}=1$$

$h(y)=y+c_1$, y *(1)* se convierte en $g(t, y)=y^2t+y+c_1$. La solución a la ecuación diferencial está dada implícitamente por (5.6), así

$$y^2t+y=c_2 \qquad (c_2=c-c_1) \tag{2}$$

Podemos resolver explícitamente para y mediante la fórmula cuadrática, por lo tanto

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{1+4c_2t}}{2t}$$

5.9. Determine si la ecuación diferencial

$$(2x^2t-2x^3)dt+(4x^3-6x^2t+2xt^2)dx=0$$

es exacta.

Ésta es una ecuación para la función desconocida $x(t)$. En términos de las variables t y x, encontramos que

$$\frac{\partial}{\partial x}(2x^2t-2x^3)=4xt-6x^2=\frac{\partial}{\partial t}(4x^3-6x^2t+2xt^2)$$

de modo que la ecuación diferencial es exacta.

5.10. Resuelva la ecuación diferencial dada en el problema 5.9.

Se ha demostrado que esta ecuación diferencial es exacta, así que el procedimiento de solución dado por las ecuaciones de la (5.4) a la (5.6), con t y x reemplazando a x y y, respectivamente, es aplicable. Buscamos una función $g(t, x)$ que tenga la propiedad de que dg sea el lado derecho de la ecuación diferencial dada. Aquí

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 2x^2t - 2x^3$$

Integrando ambos lados con respecto a t, tenemos

$$\int \frac{\partial g}{\partial t}dt = \int (2x^2t - 2x^3)dt$$

o bien

$$g(x, t) = x^2t - 2x^3t + h(x) \tag{1}$$

Derivando (1) con respecto a x, obtenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xt^2 - 6x^2t + \frac{dh}{dx}$$

De aquí,

$$2xt^2 - 6x^2t + \frac{dh}{dx} = 4x^3 - 6x^2t + 2xt^2$$

donde el lado derecho de esta última ecuación es el coeficiente de dx en la ecuación diferencial original. Se sigue que

$$\frac{dh}{dx} = 4x^3$$

Ahora $h(x) = x^4 + c_1$, y (1) se convierte en

$$g(t, x) = x^2t^2 - 2x^3t + x^4 + c_1 = (x^2 - xt)^2 + c_1$$

La solución para la ecuación diferencial está dada implícitamente por (5.6) como

$$(x^2 - xt)^2 = c_2 \qquad (c_2 = c - c_1)$$

o bien, tomando las raíces cuadradas de ambos lados de esta última ecuación, así

$$x^2 - xt = c_3 \qquad c_3 = \pm\sqrt{c_2} \tag{2}$$

Podemos resolver explícitamente para x con la fórmula cuadrática, de donde

$$x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4c_3}}{2}$$

5.11. Resuelva $y' = \dfrac{-2xy}{1+x^2}$; $y(2) = -5$.

La ecuación diferencial tiene la forma diferencial dada en el problema 5.1. Su solución está dada en (2) del problema 5.2 como $x^2y + y = c_2$. Usando la condición inicial, $y = -5$ cuando $x = 2$, obtenemos $(2)^2(-5) + (-5) = c_2$, o bien $c_2 = -25$. Por lo tanto, la solución al problema de valor inicial es $x^2y + y = -25$ o bien $y = -25/(x^2 + 1)$.

5.12. Resuelva $\dot{y} = \dfrac{-y^2}{2yt+1}$; $y(1) = -2$.

Esta ecuación diferencial en su forma estándar tiene la forma diferencial del problema 5.7. Su solución está dada en (2) del problema 5.8 como $y^2t + y = c_2$. Usando la condición inicial $y = -2$ cuando $t = 1$, obtenemos $(-2)^2(1) + (-2) = c_2$, o bien $c_2 = 2$.

La solución para el problema de valor inicial es $y^2t + y = 2$, en forma implícita. Resolviendo para y directamente, usando la forma cuadrática, tenemos

$$y = \frac{-1 - \sqrt{1+8t}}{2t}$$

donde el signo negativo frente al radical se eligió para ser consistente con la condición inicial dada.

5.13. Resuelva $\dot{x} = \dfrac{2x^2(x-t)}{4x^3 - 6x^2t + 2xt^2}$; $x(2) = 3$.

Esta ecuación diferencial en su forma estándar tiene la forma diferencial del problema 5.9. Su solución está dada en (2) del problema 5.10 como $x^2 - xt = c_3$. Usando la condición inicial $x = 3$ cuando $t = 2$, obtenemos $(3)^2 - 3(2) = c_3$, o $c_3 = 3$. La solución para el problema de valor inicial es $x^2 + xt = 3$, en forma implícita. Resolviendo para x directamente, usando la fórmula cuadrática, tenemos

$$x = \frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2+12})$$

donde el signo positivo frente al radical se eligió para ser consistente con la condición inicial dada.

5.14. Determine si $-1/x^2$ es un factor de integración para la ecuación diferencial $y\,dx - x\,dy = 0$.

En el problema 5.3 se demostró que la ecuación diferencial no es exacta. Multiplicándola por $-1/x^2$, obtenemos

$$\frac{-1}{x^2}(y\,dx - x\,dy) = 0 \quad \text{o bien} \quad \frac{-y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy = 0 \tag{1}$$

La ecuación (*1*) tiene la forma de la ecuación (*5.1*) con $M(x, y) = -y/x^2$ y $N(x, y) = 1/x$. Ahora

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-1}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

así que (*1*) es exacta, lo que implica que $-1/x^2$ es un factor de integración para la ecuación diferencial original.

5.15. Resuelva $y\,dx - x\,dy = 0$.

Usando los resultados del problema 5.14 podemos volver a escribir la ecuación diferencial como

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0$$

la cual es exacta. La ecuación (*1*) se puede resolver usando los pasos descritos en las ecuaciones (*5.4*) a la (*5.6*).

De manera alternativa, de la tabla 5-1 vemos que (*1*) se puede reescribir como $d(y/x) = 0$. Por lo tanto, por integración directa, tenemos $y/x = c$, o $y = cx$, como la solución.

5.16. Determine si $-1/(xy)$ es también un factor de integración para la ecuación diferencial definida en el problema 5.14.

Multiplicando la ecuación diferencial $y\,dx - x\,dy = 0$ por $-1(xy)$, obtenemos

$$\frac{-1}{xy}(y\,dx - x\,dy) = 0 \quad \text{o bien} \quad -\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy = 0 \tag{1}$$

La ecuación (*1*) tiene la forma de la ecuación (*5.1*) con $M(x, y) = -1/x$ y $N(x, y) = 1/y$. Ahora

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

de modo que (*1*) es exacta, lo cual implica que $-1/xy$ es también un factor de integración para la ecuación diferencial original.

5.17. Resuelva el problema 5.15 usando el factor de integración dado en el problema 5.16.

Usando los resultados del problema 5.16, podemos volver a escribir la ecuación diferencial como

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{xy} = 0 \tag{1}$$

la cual es exacta. La ecuación (*1*) se puede resolver usando los pasos descritos en las ecuaciones de la (*5.4*) a la (*5.6*).

De manera alternativa, vemos de la tabla 1-5 que (*1*) se puede reescribir como $d[\ln(y/x)] = 0$. Luego, por integración directa, $\ln(y/x) = c_1$. Tomando la exponencial de ambos lados, encontramos que $y/x = e^{c_1}$, o finalmente

$$y = cx \quad (c = e^{c_1})$$

5.18. Resuelva $(y^2 - y)dx + x\,dy = 0$.

Esta ecuación diferencial no es exacta y ningún factor de integración es inmediatamente evidente. Obsérvese, sin embargo, que si los términos se agrupan estratégicamente, la ecuación diferencial se puede volver a escribir como

$$-(y\,dx - x\,dy) + y^2\,dx = 0 \tag{1}$$

El grupo de términos entre paréntesis tiene muchos factores de integración (véase tabla 5-1). Tratando cada factor de integración en forma separada, encontramos que el único que hace que toda la ecuación sea exacta es $I(x, y) = 1/y^2$. Utilizando este factor de integración, podemos reescribir (*1*) como

$$-\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} + 1\,dx = 0 \tag{2}$$

Dado que (*2*) es exacta, se puede resolver usando los pasos descritos en las ecuaciones de la (*5.4*) a la (*5.6*).

Alternativamente, vemos de la tabla 5-1 que (*2*) se puede volver a escribir como $-d(x/y) + 1dx = 0$, o como $d(x/y) = 1dx$. Integrando, obtenemos la solución

$$\frac{x}{y} = x + c \quad \text{o bien} \quad y = \frac{x}{x + c}$$

5.19 Resuelva $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$.

Esta ecuación diferencial no es exacta, y ningún factor de integración es inmediatamente evidente. Observe, sin embargo, que la ecuación diferencial se puede reescribir como

$$(y\,dx + x\,dy) + (-xy^2\,dx + x^2y^2\,dy) = 0 \tag{1}$$

El primer grupo de términos tiene muchos factores de integración (véase tabla 5-1). Uno de estos factores, concretamente $I(x, y) = 1/(xy)^2$, es un factor de integración para toda la ecuación. Multiplicando (*1*) por $1/(xy)^2$, encontramos que

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{(xy)^2} + \frac{-xy^2\,dx + x^2y^2\,dy}{(xy)^2} = 0$$

o, de manera equivalente,

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{(xy)^2} = \frac{1}{x}dx - 1dy \tag{2}$$

Dado que (*2*) es exacta, se puede resolver usando los pasos descritos en las ecuaciones de la (*5.4*) a la (*5.6*).

Alternativamente, de la tabla 5-1 vemos que

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{(xy)^2} = d\left(\frac{-1}{xy}\right)$$

de modo que (*2*) se puede volver a escribir como

$$d\left(\frac{-1}{xy}\right) = \frac{1}{x}dx - 1\,dy$$

Integrando ambos lados de esta ecuación, encontramos

$$\frac{-1}{xy} = \ln|x| - y + c$$

que es la solución en su forma implícita.

5.20. Resuelva $y' = \dfrac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}$.

Reescribiendo esta ecuación en forma diferencial, tenemos

$$(3yx^2)\,dx + (-x^3 - 2y^4)\,dy = 0$$

la cual no es exacta. Además, no hay ningún factor de integración inmediatamente evidente. Podemos, sin embargo, volver a arreglar esta ecuación así

$$x^2(3y\,dx - x\,dy) - 2y^4\,dy = 0 \qquad (1)$$

El grupo entre paréntesis es de la forma $ay\,dx + bx\,dy$, donde $a = 3$ y $b = -1$, que tiene un factor de integración x^2y^{-2}. Dado que la expresión entre paréntesis ya está multiplicada por x^2, probamos un factor de integración de la forma $I(x, y) = y^{-2}$. Multiplicando (1) por y^{-2} tenemos

$$x^2y^{-2}(3x\,dx - x\,dy) - 2y^2\,dy = 0$$

que se puede simplificar (véase tabla 5-1) a

$$d(x^3y^{-1}) = 2y^2\,dy \qquad (2)$$

Integrando ambos lados de (2), obtenemos

$$x^3y^{-1} = \frac{2}{3}y^3 + c$$

como la solución en forma implícita.

5.21. Convierta $y' = 2xy - x$ en una ecuación diferencial exacta.

Volviendo a escribir esta ecuación en forma diferencial, tenemos

$$(-2xy + x)dx + dy = 0 \qquad (1)$$

Aquí, $M(x, y) = -2xy + x$ y $N(x, y) = 1$. Pues

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

no son iguales, (*1*) no es exacta. Pero

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{(-2x) - (0)}{1} = -2x$$

es una función sólo de x. Utilizando la ecuación (*5.8*), tenemos $I(x, y) = e^{\int -2x\,dx} = e^{-x^2}$ como factor de integración. Multiplicando (*1*) por e^{-x^2}, obtenemos

$$(-2xye^{-x^2} + xe^{-x^2})dx + e^{-x^2}\,dy = 0 \qquad (2)$$

que es exacta.

5.22. Convierta $y^2\,dx + xy\,dy = 0$ en una ecuación diferencial exacta.

Aquí, $M(x, y) = y^2$ y $N(x, y) = xy$. Pues

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y$$

no son iguales, (*1*) no es exacta. Pero

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{2y-y}{y^2}=\frac{1}{y}$$

es una función sólo de y. Usando la ecuación (*5.9*), tenemos $I(x, y)=e^{-\int(1/y)dy}=e^{-\ln y}=1/y$. como un factor de integración. Multiplicando la ecuación diferencial dada por $I(x, y)=1/y$, obtenemos la ecuación exacta $y\,dx+x\,dy=0$.

5.23. Convierta $y'=\dfrac{xy^2-y}{x}$ en una ecuación diferencial exacta.

Volviendo a escribir esta ecuación en forma diferencial, tenemos

$$y(1-xy)dx+x\,dy=0 \tag{1}$$

Aquí $M(x, y)=y(1-xy)$ y $N(x, y)=x$. Pues

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1-2xy \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=1$$

no son iguales, (*1*) no es exacta. Sin embargo, la ecuación (*5.10*) es aplicable y proporciona el factor de integración

$$I(x, y)=\frac{1}{x[y(1-xy)]-yx}=\frac{-1}{(xy)^2}$$

Multiplicando (*1*) por $I(x, y)$, obtenemos

$$\frac{xy-1}{x^2y}dx-\frac{1}{xy^2}dy=0$$

que es exacta.

PROBLEMAS ADICIONALES

En los problemas del 5.24 al 5.40, pruebe si las diferentes ecuaciones diferenciales son exactas y resuelva aquellas que lo sean.

5.24. $(y+2xy^3)dx+(1+3x^2y^2+x)dy=0$

5.25. $(xy+1)dx+(xy-1)dy=0$

5.26. $e^{x^3}(3x^2y-x^2)dx+e^{x^3}dy=0$

5.27. $3x^2y^2\,dx+(2x^3y+4y^3)dy=0$

5.28. $y\,dx+x\,dy=0$

5.29. $(x-y)dx+(x+y)dy=0$

5.30. $(y\operatorname{sen}x+xy\cos x)dx+(x\operatorname{sen}x+1)dy=0$

5.31. $-\dfrac{y^2}{t^2}dt+\dfrac{2y}{t}dy=0$

5.32. $-\dfrac{2y}{t^3}dt+\dfrac{1}{t^2}dy=0$

5.33. $y^2dt+t^2dy=0$

5.34. $(4t^3y^3-2ty)dt+(3t^4y^2-t^2)dy=0$

5.35. $\dfrac{ty-1}{t^2y}dt-\dfrac{1}{ty^2}dy=0$

5.36. $(t^2-x)dt-t\,dx=0$

5.37. $(t^2+x^2)dt+(2tx-x)dx=0$

5.38. $2xe^{2t}dt+(1+e^{2t})dx=0$

5.39. $\operatorname{sen}t\cos x\,dt-\operatorname{sen}x\cos t\,dx=0$

5.40. $(\cos x+x\cos t)dt+(\operatorname{sen}t-t\operatorname{sen}x)\,dx=0$

En los problemas del 5.41 al 5.55, encuentre un factor de integración adecuado para cada ecuación diferencial y resuelva.

5.41. $(y+1)dx - x\,dy = 0$

5.42. $y\,dx + (1-x)dy = 0$

5.43. $(x^2+y+y^2)dx - x\,dy = 0$

5.44. $(y+x^3y^3)dx + x\,dy = 0$

5.45. $(y+x^4y^2)dx + x\,dy = 0$

5.46. $(3x^2y - x^2)dx + dy = 0$

5.47. $dx - 2xy\,dy = 0$

5.48. $2xy\,dx + y^2\,dy = 0$

5.49. $y\,dx + 3x\,dy = 0$

5.50. $\left(2xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)dx + 4x^2y\,dy = 0$

5.51. $xy^2\,dx + (x^2y^2 + x^2y)dy = 0$

5.52. $xy^2\,dx + x^2y\,dy = 0$

5.53. $(y+x^3+xy^2)dx - x\,dy = 0$

5.54. $(x^3y^2 - y)dx + (x^2y^4 - x)dy = 0$

5.55. $3x^2y^2\,dx + (2x^3y + x^3y^4)dy = 0$

En los problemas del 5.56 al 5.65, resuelva los problemas de valor inicial.

5.56. Problema 5.10 con $x(0) = 2$

5.57. Problema 5.10 con $x(2) = 0$

5.58. Problema 5.10 con $x(1) = -5$

5.59. Problema 5.24 con $y(1) = -5$

5.60. Problema 5.26 con $y(0) = -1$

5.61. Problema 5.31 con $y(0) = -2$

5.62. Problema 5.31 con $y(2) = -2$

5.63. Problema 5.32 con $y(2) = -2$

5.64. Problema 5.36 con $x(1) = 5$

5.65. Problema 5.38 con $x(1) = -2$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN



MÉTODO DE SOLUCIÓN

Una ecuación diferencial *lineal* de primer orden tiene la forma (véase capítulo 3)

$$y' p(x)y = q(x) \tag{6.1}$$

Un factor de integración para la ecuación (*6.1*) es

$$I(x) = e^{\int p(x)\,dx} \tag{6.2}$$

que depende sólo de x y es independiente de y. Cuando ambos lados de (*6.1*) se multiplican por $I(x)$ la ecuación resultante

$$I(x)y' + p(x)I(x)y = I(x)q(x) \tag{6.3}$$

es exacta. Esta ecuación se puede resolver por medio del método descrito en el capítulo 5. Un procedimiento más simple consiste en reescribir la ecuación (6.3) así

$$\frac{d(yI)}{dx} = Iq(x)$$

integrar ambos lados de esta última ecuación con respecto a x, y luego resolver para y la ecuación resultante.

REDUCCIÓN DE ECUACIONES DE BERNOULLI

Una ecuación diferencial de Bernoulli tiene la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \tag{6.4}$$

donde n es un número real. La sustitución

$$z = y^{1-n} \tag{6.5}$$

transforma a (*6.4*) en una ecuación diferencial lineal en la cual la función desconocida es $z(x)$.

PROBLEMAS RESUELTOS

6.1. Encuentre un factor de integración para $y' - 3y = 6$.

La ecuación diferencial tiene la forma de la ecuación (*6.1*), con $p(x) = -3$ y $q(x) = 6$, y es lineal. Aquí

$$\int p(x)\,dx = \int -3\,dx = -3x$$

de modo que (*6.2*) se convierte en

$$I(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{-3x} \tag{1}$$

6.2. Resuelva la ecuación diferencial del problema anterior.

Multiplicando la ecuación por el factor de integración definido por (*1*) del problema 6.1, obtenemos

$$e^{-3x}y' - 3e^{-3x}y = 6e^{-3x} \text{ o bien } \frac{d}{dx}(ye^{-3x}) = 6e^{-3x}$$

Integrando ambos lados de esta última ecuación con respecto a x, obtenemos

$$\int \frac{d}{dx}(ye^{-3x})dx = \int 6e^{-3x}dx$$

$$ye^{-3x} = -2e^{-3x} + c$$

$$y = ce^{3x} - 2$$

6.3. Encuentre un factor de integración para $y' - 2xy = x$.

La ecuación diferencial tiene la forma de la ecuación (*6.1*), con $p(x) = -2x$ y $q(x) = x$, y es lineal. Aquí

$$\int p(x)dx = \int (-2x)dx = -x^2$$

de modo que (*6.2*) se convierte en

$$I(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-x^2} \tag{1}$$

6.4. Resuelva la ecuación diferencial del problema anterior.

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor de integración definido por (*1*) del problema 6.3, obtenemos

$$e^{-x^2}y' - 2xe^{-x^2}y = xe^{-x^2} \text{ o bien } \frac{d}{dx}\left[ye^{-x^2}\right] = xe^{-x^2}$$

Integrando ambos lados de esta última ecuación con respecto a x, encontramos que

$$\int \frac{d}{dx}(ye^{-x^2})dx = \int xe^{-x^2}dx$$

$$ye^{-x^2} = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

$$y = ce^{x^2} - \frac{1}{2}$$

6.5. Encuentre un factor de integración para $y' + (4/x)y = x^4$.

La ecuación diferencial tiene la forma de la ecuación (*6.1*), con $p(x) = 4/x$ y $q(x) = x^4$, y es lineal. Aquí

$$\int p(x)dx = \int \frac{4}{x}dx = 4\ln|x| = \ln x^4$$

de modo que (*6.2*) se convierte en

$$I(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\ln x^4} = x^4 \tag{1}$$

6.6. Resuelva la ecuación diferencial del problema anterior.

Multiplicando la ecuación diferencial por el factor de integración definido por (*1*) del problema 6.5, obtenemos

$$x^4y' + 4x^3y = x^8 \quad \text{o bien} \quad \frac{d}{dx}(yx^4) = x^8$$

Integrando ambos lados de esta última ecuación con respecto a x, obtenemos

$$yx^4 = \frac{1}{9}x^9 + c \quad \text{o bien} \quad y = \frac{c}{x^4} + \frac{1}{9}x^5$$

6.7. Resuelva $y' + y = \operatorname{sen} x$.

Aquí $p(x) = 1$; por lo tanto $I(x) = e^{\int 1dx} = e^x$. Multiplicando la ecuación diferencial por $I(x)$, obtenemos

$$e^xy' + e^xy = e^x \operatorname{sen} x \quad \text{o bien} \quad \frac{d}{dx}(ye^x) = e^x \operatorname{sen} x$$

Integrando ambos lados de la ecuación con respecto a x (para integrar el lado derecho, usamos dos veces integración por partes), encontramos que

$$ye^x = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + c \quad \text{o bien} \quad y = ce^{-x} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos x$$

6.8. Resuelva el problema de valor inicial $y' + y = \operatorname{sen} x;\ y(\pi) = 1$.

Del problema 6.7, la solución de la ecuación diferencial es

$$y = ce^{-x} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos x$$

Aplicando directamente la condición inicial, obtenemos

$$1 = y(\pi) = ce^{-\pi} + \frac{1}{2} \quad \text{o bien} \quad c = \frac{1}{2}e^{\pi}$$

De este modo,
$$y = \frac{1}{2}e^{\pi}e^{-x} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}(e^{\pi - x} + \operatorname{sen} x - \cos x)$$

6.9. Resuelva $y' - 5y = 0$.

Aquí, $p(x) = -5$ y $I(x) = e^{\int(-5)dx} = e^{-5x}$. Multiplicando la ecuación diferencial por $I(x)$, obtenemos

$$e^{-5x}y' - 5e^{-5x}y = 0 \quad \text{o bien} \quad \frac{d}{dx}(ye^{-5x}) = 0$$

Integrando, obtenemos $ye^{-5x} = c$ o bien $y = ce^{5x}$.

Obsérvese que la ecuación diferencial también es separable. (Véase problema 4.4.)

6.10. Resuelva $\dfrac{dz}{dx} - xz = -x$.

Ésta es una ecuación diferencial para la función desconocida $z(x)$. Tiene la forma de la ecuación (*6.1*) con y reemplazado por z y $p(x) = q(x) = -x$. El factor de integración es

$$I(x) = e^{\int(-x)dx} = e^{-x^2/2}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $I(x)$, obtenemos

$$e^{-x^2/2}\frac{dz}{dx} - xe^{-x^2/2}z = -xe^{-x^2/2}$$

o bien
$$\frac{d}{dx}(ze^{-x^2/2}) = -xe^{-x^2/2}$$

Al integrar ambos lados de esta ecuación, tenemos

$$ze^{-x^2/2} = e^{-x^2/2} + c$$

de donde
$$z(x) = ce^{x^2/2} + 1$$

6.11. Resuelva el problema de valor inicial $z' - xz = x;\ z(0) = -4$.

La solución para esta ecuación diferencial está dada en el problema 6.10 como

$$z(x) = 1 + ce^{x^2/2}$$

Aplicando directamente la condición inicial, tenemos

$$-4 = z(0) = 1 + ce^0 = 1 + c$$

o bien $c = -5$. De este modo

$$z(x) = 1 - 5e^{x^2/2}$$

6.12. Resuelva $z' - \dfrac{2}{x}z = \dfrac{2}{3}x^4$.

Ésta es una ecuación diferencial lineal para la función desconocida $z(x)$. Tiene la forma de la ecuación (*6.1*) con y reemplazada por z. El factor de integración es

$$I(x) = e^{\int(-2/x)\,dx} = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $I(x)$, obtenemos

$$x^{-2}z' - 2x^{-3}z = \frac{2}{3}x^2$$

o bien
$$\frac{d}{dx}(x^{-2}z) = \frac{2}{3}x^2$$

Integrando ambos lados de esta última ecuación, tenemos

$$x^{-2}z = \frac{2}{9}x^3 + c$$

de donde
$$z(x) = cx^2 + \frac{2}{9}x^5$$

6.13. Resuelva $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{2}{10+2t}Q = 4$.

Ésta es una ecuación diferencial lineal para la función desconocida $Q(t)$. Tiene la forma de la ecuación (*6.1*) con y reemplazada por Q, x reemplazada por t, $p(t) = 2/(10+2t)$ y $q(t) = 4$. El factor de integración es

$$I(t) = e^{\int[2/(10+2t)]dt} = e^{\ln|10+2t|} = 10 + 2t \quad (t > -5)$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $I(t)$, obtenemos

$$(10+2t)\frac{dQ}{dt}+2Q=40+8t$$

o bien
$$\frac{d}{dt}[(10+2t)Q]=40+8t$$

Integrando ambos lados de esta última ecuación, tenemos

$$(10+2t)Q=40t+4t^2+c$$

de donde
$$Q(t)=\frac{40t+4t^2+c}{10+2t} \quad (t>-5)$$

6.14. Resuelva el problema de valor inicial $\frac{dQ}{dt}+\frac{2}{10+2t}Q=4;\ Q(2)=100.$

La solución a esta ecuación diferencial está dada en el problema 6.13 como

$$Q(t)=\frac{40t+4t^2+c}{10+2t} \quad (t>-5)$$

Aplicando directamente la condición inicial, tenemos

$$100=Q(2)=\frac{40(2)+4(4)+c}{10+2(2)}$$

o bien $c = 1304$. De este modo

$$Q(t)=\frac{4t^2+40t+1304}{2t+10} \quad (t>-5)$$

6.15. Resuelva $\frac{dT}{dt}+kT=100k$, donde k denota una constante.

Ésta es una ecuación diferencial para la función desconocida $T(t)$. Tiene la forma de la ecuación *(6.1)* con y reemplazada por T, x reemplazada por t, $p(t) = k$ y $q(t) = 100k$. El factor de integración es

$$I(t)=e^{\int k\,dt}=e^{kt}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $I(t)$, obtenemos

$$e^{kt}\frac{dT}{dt}+ke^{kt}T=100ke^{kt}$$

o bien
$$\frac{d}{dt}(Te^{kt})=100ke^{kt}$$

Integrando ambos lados de esta última ecuación, tenemos

$$Te^{kt}=100e^{kt}+c$$

de donde
$$T(t)=ce^{-kt}+100$$

6.16. Resuelva $y'+xy=xy^2$.

Esta ecuación no es lineal. Sin embargo, es una ecuación diferencial de Bernoulli que tiene la forma de la ecuación *(6.4)* con $p(x) = q(x) = x$ y $n = 2$. Hacemos la sustitución sugerida por *(6.5)*, específicamente, $z=y^{1-2}=y^{-1}$, de lo que sigue

$$y=\frac{1}{z} \quad \text{y} \quad y'=-\frac{z'}{z^2}$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación diferencial, obtenemos

$$-\frac{z'}{z^2}+\frac{x}{z}=\frac{x}{z^2} \quad \text{o bien} \quad z'-xz=-x$$

Esta última ecuación es lineal. Su solución se encuentra en el problema 6.10 como $z=ce^{x^2/2}+1$. Entonces, la solución de la ecuación diferencial original es

$$y=\frac{1}{z}=\frac{1}{ce^{x^2/2}+1}$$

6.17. Resuelva $y'-\frac{3}{4}y=x^4y^{1/3}$.

Ésta es una ecuación diferencial de Bernoulli con $p(x)=-3/x$, $q(x)=x^4$ y $n=\frac{1}{3}$. Utilizando la ecuación (*6.5*), hacemos la sustitución $z=y^{1-(1/3)}=y^{2/3}$. De este modo, $y=z^{3/2}$ y $y'=\frac{3}{2}z^{1/2}z'$. Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\frac{3}{2}z^{1/2}z'-\frac{3}{x}z^{3/2}=x^4z^{1/2} \quad \text{o bien} \quad z'-\frac{2}{x}z=\frac{2}{3}x^4$$

Esta última ecuación es lineal. Su solución se encuentra en el problema 6.12 como $z=cx^2+\frac{2}{9}x^5$. Dado que $z=y^{2/3}$, la solución del problema original está implícitamente dada por $y^{2/3}=cx^2+\frac{2}{9}x^5$, o explícitamente por $y=\pm(cx^2+\frac{2}{9}x^5)^{3/2}$.

6.18. Demuestre que el factor de integración hallado en el problema 6.1 es también un factor de integración tal como se le define en el capítulo 5, ecuación (*5.7*).

La ecuación diferencial del problema 6.1 se puede volver a escribir como

$$\frac{dy}{dx}=3y+6$$

que tiene la forma diferencial

$$dy=(3y+6)dx$$

o bien

$$(3y+6)dx+(-1)dy=0 \tag{1}$$

Multiplicando (*1*) por el factor de integración $I(x)=e^{-3x}$, obtenemos

$$(3ye^{-3x}+6e^{-3x})dx+(-e^{-3x})dy=0 \tag{2}$$

Estableciendo $\quad M(x,y)=3ye^{-3x}+6e^{-3x} \quad$ y $\quad N(x,y)=-e^{-3x}$

tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3e^{-3x}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

de lo cual concluimos que (2) es una ecuación diferencial exacta.

6.19. Encuentre la forma general de la solución de la ecuación (*6.1*).

Multiplicando (*6.1*) por (*6.2*), tenemos

$$e^{\int p(x)dx}y'+e^{\int p(x)dx}p(x)y=e^{\int p(x)dx}q(x) \tag{1}$$

Puesto que

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}\right]=e^{\int p(x)dx}p(x)$$

se sigue que a partir de la regla de derivación del producto tenemos que el lado izquierdo de (*1*) se iguala a $\frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}y\right]$. De este modo, (*1*) se puede volver a escribir así

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}y\right]=e^{\int p(x)dx}q(x) \tag{2}$$

Integrando ambos lados de (*2*) con respecto a x, tenemos

$$\int\frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}y\right]dx=\int e^{\int p(x)dx}q(x)\,dx$$

o bien

$$e^{\int p(x)dx}y+c_1=\int e^{\int p(x)dx}q(x)\,dx \tag{3}$$

Finalmente, estableciendo que $c_1=-c$ y resolviendo (*3*) para y, obtenemos

$$y=ce^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int e^{\int p(x)dx}q(x)\,dx \tag{4}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

En los problemas del 6.20 al 6.49, resuelva las ecuaciones diferenciales dadas.

6.20. $\frac{dy}{dx}+5y=0$

6.21. $\frac{dy}{dx}-5y=0$

6.22. $\frac{dy}{dx}-0.01y=0$

6.23. $\frac{dy}{dx}+2xy=0$

6.24. $y'+3x^2y=0$

6.25. $y'-x^2y=0$

6.26. $y'-3x^4y=0$

6.27. $y'+\frac{1}{x}y=0$

6.28. $y'+\frac{2}{x}y=0$

6.29. $y'-\frac{2}{x}y=0$

6.30. $y'-\frac{2}{x^2}y=0$

6.31. $y'-7y=e^x$

6.32. $y'-7y=14x$

6.33. $y'-7y=\operatorname{sen}2x$

6.34. $y'+x^2y=x^2$

6.35. $y'-\frac{3}{x^2}y=\frac{1}{x^2}$

6.36. $y'=\cos x$

6.37. $y'+y=y^2$

6.38. $xy'+y=xy^3$

6.39. $y'+xy=6x\sqrt{y}$

6.40. $y'+y=y^2$.

6.41. $y'+y=y^{-2}$

6.42. $y'+y=y^2e^x$

6.43. $\frac{dy}{dt}+50y=0$

6.44. $\frac{dz}{dt}-\frac{1}{2t}z=0$

6.45. $\frac{dN}{dt}=kN$, ($k=$ una constante)

6.46. $\dfrac{dp}{dt} - \dfrac{1}{t}p = t^2 + 3t - 2$

6.47. $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{2}{20-t}Q = 4$

6.48. $25\dfrac{dT}{dt} + T = 80e^{-0.04t}$

6.49. $\dfrac{dp}{dz} + \dfrac{2}{z}p = 4$

Resuelva los siguientes problemas de valor inicial.

6.50. $y' + \dfrac{2}{x}y = x;\ y(1) = 0$

6.51. $y' + 6xy = 0; y(\pi) = 5$

6.52. $y' + 2xy = 2x^3;\ y(0) = 1$

6.53. $y' + \dfrac{2}{x}y = -x^9 y^5;\ y(-1) = 2$

6.54. $\dfrac{dv}{dt} + 2v = 32;\ v(0) = 0$

6.55. $\dfrac{dq}{dt} + q = 4\cos 2t;\ q(0) = 1$

6.56. $\dfrac{dN}{dt} + \dfrac{1}{t}N = t; N(2) = 8$

6.57. $\dfrac{dT}{dt} + 0.069T = 2.07;\ T(0) = -30$

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

7

PROBLEMAS DE CRECIMIENTO Y DECAIMIENTO

Supongamos que $N(t)$ denota la cantidad de sustancia (o población) que está en crecimiento o bien en decaimiento. Si asumimos que dN/dt, la razón de cambio en el tiempo de esta cantidad de sustancia, es proporcional a la cantidad de sustancia presente, entonces $dN/dt = kN$, o bien

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0 \tag{7.1}$$

donde k es la constante de proporcionalidad. (Véanse problemas 7.1-7.7.)

Estamos asumiendo que $N(t)$ es una función derivable, y por lo tanto continua, en el tiempo. Para los problemas de población, donde $N(t)$ es realmente discreta y valuada por un número entero, esta hipótesis es incorrecta. No obstante, (*7.1*) aún proporciona una buena aproximación a las leyes físicas que gobiernan tal sistema. (Véase problema 7.5.)

PROBLEMAS DE TEMPERATURA

La ley del enfriamiento de Newton, que es igualmente aplicable para el calentamiento, establece que *la razón de cambio en el tiempo de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio que lo rodea.* Aquí, T denota la temperatura del cuerpo y T_m la temperatura del medio circundante. Entonces, la razón de cambio en el tiempo de la temperatura del cuerpo es dT/dt, y la ley de enfriamiento de Newton se puede formular como $dT/dt = -k(T - T_m)$, o como

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_m \tag{7.2}$$

donde k es una constante de proporcionalidad *positiva*. Una vez que k se escoge positiva se requiere el signo menos en la ley de Newton para hacer que dT/dt sea negativa en un proceso de enfriamiento, cuando T es mayor que T_m, y positiva en un proceso de calentamiento, cuando T es menor que T_m (véanse problemas 7.8-7.10).

PROBLEMAS DE CAÍDA DE CUERPOS

Considérese un cuerpo de masa m que cae verticalmente y que sólo está siendo influido por la gravedad g y una resistencia del aire que es proporcional a la velocidad del cuerpo. Asúmase que tanto la gravedad como la masa permanecen constantes y, por conveniencia, escójase la dirección descendente como positiva.

Segunda ley del movimiento de Newton: *La fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es igual a la razón de cambio del momento del cuerpo respecto al tiempo; o bien, para una masa constante*

$$F = m\frac{dv}{dt} \tag{7.3}$$

donde F es la fuerza neta sobre el cuerpo y v la velocidad del cuerpo, ambas en el tiempo t.

Para el problema que nos ocupa, existen dos fuerzas que actúan sobre el cuerpo: 1) la fuerza debida a la gravedad dada por el peso w del cuerpo, que se iguala a mg, y 2) la fuerza debida a la resistencia del aire dada por $-kv$, donde $k \geq 0$ es una constante de proporcionalidad. Se necesita el signo menos porque esta fuerza se opone a la velocidad; es decir, actúa en la dirección ascendente, o negativa (véase figura 7-1). La fuerza neta F sobre el cuerpo es, por lo tanto, $F = mg - kv$. Sustituyendo este resultado en (*7.3*), obtenemos

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt}$$

o bien

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \tag{7.4}$$

como la ecuación de movimiento para el cuerpo.

Si la resistencia del aire es despreciable o no existe, entonces $k = 0$ y (*7.4*) se simplifica a

$$\frac{dv}{dt} = g \tag{7.5}$$

(Véase problema 7.11.) Cuando $k > 0$, la velocidad límite v_l está definida por

$$v_l = \frac{mg}{k} \tag{7.6}$$

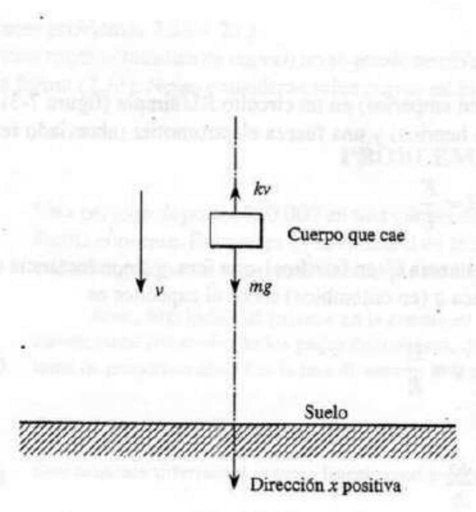


Figura 7-1

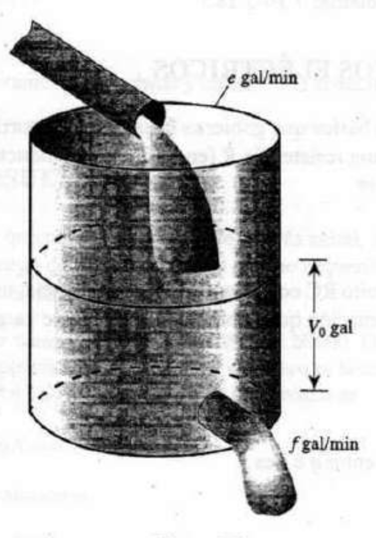


Figura 7-2

Advertencia: Las ecuaciones (*7.4*), (*7.5*) y (*7.6*) sólo son válidas si se satisfacen las condiciones dadas. Estas ecuaciones no son válidas si, por ejemplo, la resistencia del aire no es proporcional a la velocidad sino al cuadrado de la velocidad, o si la dirección ascendente se toma como positiva. (Véanse los problemas 7.14 y 7.15.)

PROBLEMAS DE DISOLUCIÓN

Considérese un tanque que inicialmente contiene V_0 gal de salmuera que contiene a lb de sal. Otra solución de salmuera, que contiene b lb de sal por galón, se vierte en el tanque a una tasa o ritmo de e gal/min en tanto que, simultáneamente, la solución bien agitada abandona el tanque a un ritmo de f gal/min (figura 7-2). El problema es encontrar la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo t.

Aquí, Q denota la cantidad (en libras) de sal que se encuentra en el tanque en cualquier tiempo t. La razón o tasa de cambio de Q respecto al tiempo, dQ/dt, se iguala al ritmo al cual la sal ingresa al tanque menos el ritmo al cual la sal deja el tanque. La sal entra al tanque a un ritmo de be lb/min. Para determinar el ritmo al cual la sal abandona el tanque, primero calculamos el volumen de salmuera en el tanque en un tiempo t determinado, que es el volumen inicial V_0 más el volumen de salmuera et agregado menos el volumen de salmuera ft extraído. Así, el volumen de salmuera en cualquier tiempo es

$$V_0 + et - ft \tag{7.7}$$

La concentración de sal en el tanque en un momento dado es $Q/(V_0 + et - ft)$, de lo que se desprende que la sal sale del tanque a una tasa de

$$f\left(\frac{Q}{V_0 + et - ft}\right)\text{lb/min}$$

De este modo,

$$\frac{dQ}{dt} = be - f\left(\frac{Q}{V_0 + et - ft}\right)$$

o bien

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{f}{V_0 + (e-f)t}Q = be \tag{7.8}$$

(Véanse problemas 7.16-7.18.)

CIRCUITOS ELÉCTRICOS

La ecuación básica que gobierna la cantidad de corriente I (en amperios) en un circuito RL simple (figura 7-3) consistente en una resistencia R (en ohmios), un inductor L (en henrios) y una fuerza electromotriz (abreviado fem) E (en voltios) es

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L} \tag{7.9}$$

Para un circuito RC consistente en una resistencia, una capacitancia C (en faradios), una fem, y sin inductancia (figura 7-4), la ecuación que gobierna la cantidad de carga eléctrica q (en culombios) sobre el capacitor es

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R} \tag{7.10}$$

La relación entre q e I es

$$I = \frac{dq}{dt} \tag{7.11}$$

(Véanse problemas 7.19-7.22.) Para circuitos más complejos, véase el capítulo 14.

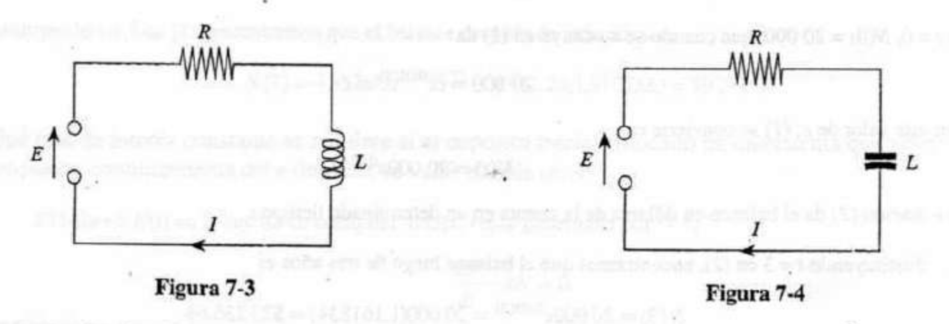


Figura 7-3

Figura 7-4

TRAYECTORIAS ORTOGONALES

Considérese una familia de curvas de un parámetro en el plano x-y definida por

$$F(x, y, c) = 0 \tag{7.12}$$

donde c indica el parámetro. El problema consiste en encontrar otra familia de curvas de un parámetro, llamadas las *trayectorias ortogonales* de la familia (*7.12*) y dadas analíticamente por

$$G(x, y, k) = 0 \tag{7.13}$$

de modo tal que cada curva de esta nueva familia (*7.13*) intersecte en ángulos rectos a cada curva de la familia original (*7.12*).

Primero derivamos implícitamente (*7.12*) con respecto a x, luego eliminamos c entre esta ecuación derivada y (*7.12*). Esto da una ecuación que conecta x, y y y', la cual resolvemos para y' para obtener una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{7.14}$$

Las trayectorias ortogonales de (*7.12*) son las soluciones de

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)} \tag{7.15}$$

(Véanse problemas 7.23-7.25.)

Para muchas familias de curvas, no se puede resolver explícitamente para dy/dx y obtener una ecuación diferencial de la forma (*7.14*). No se consideran tales curvas en este libro.

PROBLEMAS RESUELTOS

7.1. Una persona deposita \$20 000 en una cuenta de ahorro que paga 5 por ciento de interés anual, compuesto en forma continua. Encuentre *a*) la cantidad en la cuenta luego de tres años, y *b*) el tiempo requerido para que la cuenta duplique su valor, asumiendo que no hay retiros ni depósitos adicionales.

Aquí, $N(t)$ indica el balance en la cuenta en cualquier tiempo t. Inicialmernte, $N(0) = 20\,000$. El balance de la cuenta crece por medio de los pagos de intereses, que son proporcionales a la cantidad de dinero en la cuenta. La constante de proporcionalidad es la tasa de interés. En este caso, $k = 0.05$ y la ecuación (*7.1*) se convierte en

$$\frac{dN}{dt} - 0.05N = 0$$

Esta ecuación diferencial es tanto lineal como separable. Su solución es

$$N(t) = ce^{0.05t} \tag{1}$$

En $t = 0$, $N(0) = 20\,000$, que cuando se sustituye en (*1*) da

$$20\,000 = ce^{0.05(0)} = c$$

Con este valor de c, (*1*) se convierte en

$$N(t) = 20\,000e^{0.05t} \tag{2}$$

La ecuación (2) da el balance en dólares de la cuenta en un determinado tiempo t.

a) Sustituyendo $t = 3$ en (2), encontramos que el balance luego de tres años es

$$N(3) = 20\,000e^{0.05(3)} = 20\,000(1.161834) = \$23\,236.68$$

b) Buscamos el tiempo t en el que el balance sea $N(t) = \$40\,000$. Sustituyendo estos valores en (2) y resolviendo para t, obtenemos

$$40\,000 = 20\,000e^{0.05t}$$

$$2 = e^{0.05t}$$

$$\ln|2| = 0.05t$$

$$t = \frac{1}{0.05}\ln|2| = 13.86 \text{ años}$$

7.2. Una persona deposita \$5 000 en una cuenta que acumula interés compuesto de manera continua. Asumiendo que no hay extracciones ni depósitos adicionales, ¿cuánto habrá en la cuenta después de siete años si la tasa de interés es del 8.5 por ciento constante durante los primeros cuatro años y del 9.25 por ciento constante los tres años siguientes?

Aquí, $N(t)$ denota el balance de la cuenta en un tiempo t. Inicialmente, $N(0) = 5\,000$. Para los primeros cuatro años, $k = 0.085$ y la ecuación (*7.1*) se convierte en

$$\frac{dN}{dt} - 0.085N = 0$$

Su solución es

$$N(t) = ce^{0.085t} \quad (0 \le t \le 4) \tag{1}$$

En $t = 0$, $N(0) = 5000$, lo cual cuando se sustituye en (*1*) da

$$5000 = ce^{0.085(0)} = c$$

y (*1*) se convierte en

$$N(t) = 5\,000e^{0.085t} \quad (0 \le t \le 4) \tag{2}$$

Sustituyendo $t = 4$ en (2), encontramos que el balance luego de cuatro años es

$$N(t) = 5000e^{0.085(4)} = 5\,000(1.404948) = \$7\,024.74$$

Esta cantidad también representa el balance para el comienzo del periodo de los últimos tres años.

En los tres últimos años, la tasa de interés es de 9.25 por ciento y (*7.1*) se convierte en

$$\frac{dN}{dt} - 0.0925N = 0 \quad (4 \le t \le 7)$$

Su solución es

$$N(t) = ce^{0.0925t} \quad (4 \le t \le 7) \tag{3}$$

Para $t = 4$, $N(4) = \$7\,024.74$, que al ser sustituido en (*3*) da

$$7\,024.74 = ce^{0.0925(4)} = c(1.447735) \quad \text{o bien} \quad c = 4\,852.23$$

y (*3*) se convierte en

$$N(t) = 4\,852.23e^{0.0925t} \quad (4 \le t \le 7) \tag{4}$$

Sustituyendo $t = 7$ en (4), encontramos que el balance después de siete años es

$$N(7) = 4\,852.23e^{0.0925(7)} = 4\,852.23(1.910758) = \$9\,271.44$$

7.3. ¿Qué tasa de interés constante se requiere si el depósito inicial colocado en una cuenta que acumula interés compuesto continuamente debe duplicar su valor en seis años?

El balance $N(t)$ en la cuenta en cualquier tiempo t está gobernado por (7.1)

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0$$

que tiene como solución

$$N(t) = ce^{kt} \tag{1}$$

No nos dan una cantidad por el depósito inicial, de modo que lo indicamos como N_0. En $t = 0$, $N(0) = N_0$, que cuando se sustituye en (1) da

$$N_0 = ce^{k(0)} = c$$

y (1) se convierte en

$$N(t) = N_0 e^{kt} \tag{2}$$

Buscamos el valor de k para el cual $N = 2N_0$ cuando $t = 6$. Sustituyendo estos valores en (2) y resolviendo para k, encontramos que

$$2N_0 = N_0 e^{k(6)}$$
$$e^{6k} = 2$$
$$6k = \ln|2|$$
$$k = \frac{1}{6}\ln|2| = 0.1155$$

Se requiere una tasa de interés del 11.55 por ciento.

7.4. Se sabe que un cultivo de bacterias crece a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Después de una hora, se observan en el cultivo 1 000 colonias; y luego de tres horas, 3 000 colonias. Encuentre *a*) una expresión para el número aproximado de colonias de bacterias presentes en el cultivo en un tiempo t y *b*) el número aproximado de colonias de bacterias que había originalmente en el cultivo.

a) Aquí, $N(t)$ indica el número de colonias de bacterias en el cultivo en un tiempo t. De (6.1), $dN/dt - kN = 0$, que es tanto lineal como separable, su solución es

$$N(t) = ce^{kt} \tag{1}$$

En $t = 1$, $N = 1\,000$; de aquí

$$1000 = ce^{k} \tag{2}$$

En $t = 4$, $N = 3\,000$; de aquí

$$3000 = ce^{4k} \tag{3}$$

Resolviendo (2) y (3) para k y c, encontramos que

$$k = \frac{1}{3}\ln 3 = 0.366 \quad \text{y} \quad c = 1\,000e^{-0.366} = 694$$

Sustituyendo estos valores de k y c en (1), obtenemos

$$N(t) = 694e^{0.366t} \tag{4}$$

como la expresión para la cantidad de bacterias presentes en cualquier tiempo t.

b) Requerimos N en $t = 0$. Sustituyendo $t = 0$ en (4), obtenemos $N(0) = 694e^{(0.366)(0)} = 694$.

7.5. Se sabe que la población de cierto país se incrementa a un ritmo proporcional al número de personas que viven en él. Si después de dos años la población se ha duplicado, y si luego de tres años la población es de 20 000, estime el número de personas que vivían inicialmente en el país.

Si N indica el número de personas que viven en el país en un tiempo t, y N_0 denota el número de personas que vivían inicialmente en él, entonces, de (*7.1*),

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0$$

cuya solución es

$$N = ce^{kt} \tag{1}$$

En $t = 0$, $N = N_0$; de aquí, tenemos de (*1*) que $N_0 = ce^{k(0)}$, o que $c = N_0$. De este modo

$$N = N_0 e^{kt} \tag{2}$$

En $t = 2$, $N = 2N_0$. Sustituyendo estos valores en (*2*), obtenemos

$$2N_0 = N_0 e^{2k} \text{ de lo cual } k = \frac{1}{2}\ln 2 = 0.347$$

Sustituyendo este valor en (*2*) nos proporciona

$$N = N_0 e^{0.347t} \tag{3}$$

En $t = 3$, $N = 20\,000$. Sustituyendo estos valores en (*3*), obtenemos

$$20\,000 = N_0 e^{(0.374)(3)} = N_0(2.832) \quad \text{o bien} \quad N_0 = 7\,062$$

7.6. Se sabe que cierto material radiactivo decae a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay presentes 50 miligramos de material y después de dos horas se observa que el material ha perdido 10 por ciento de su masa original, encuentre *a*) una expresión para la masa de material remanente en un tiempo t, *b*) la masa del material luego de cuatro horas y *c*) el tiempo en que el material ha decaído hasta la mitad de su masa inicial.

a) Aquí, N indica la cantidad de material presente en un tiempo t. Entonces, de (*7.1*),

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0$$

Ésta es una ecuación diferencial separable y lineal; su solución es

$$N = ce^{kt} \tag{1}$$

En $t = 0$, se dijo que $N = 50$. Por lo tanto, a partir de (*1*), $50 = ce^{k(0)}$, o bien $c = 50$. De este modo,

$$N = 50e^{kt} \tag{2}$$

En $t = 2$ ha decaído10 por ciento de la masa original de 50 mg, o sea 5 mg. Por esto, en $t = 2$, $N = 50 - 5 = 45$. Sustituyendo estos valores en (*2*), y resolviendo para k, encontramos que

$$45 = 50e^{2k} \quad \text{o bien} \quad k = \frac{1}{2}\ln\frac{45}{50} = -0.053$$

Sustituyendo este valor en (*2*), obtenemos la cantidad de masa presente en un tiempo cualquiera t como

$$N = 50e^{-0.053t} \tag{3}$$

donde t se mide en horas.

b) Requerimos N en $t = 4$. Sustituyendo $t = 4$ en (*3*) y luego resolviendo para N, encontramos que

$$N = 50e^{(-0.053)(4)} = 50(0.809) = 40.5 \text{ mg}$$

c) Necesitamos t cuando $N = 50/2 = 25$. Sustituyendo $N = 25$ en (*3*) y resolviendo para t, encontramos que

$$25 = 50e^{-0.053t} \quad \text{o bien} \quad -0.053t = \ln\frac{1}{2} \quad \text{o bien} \quad t = 13 \text{ horas}$$

El tiempo requerido para reducir un material que decae a la mitad de su masa original se llama *vida media* del material. Para este problema, la vida media es de 13 horas.

Cinco ratones de una población estable de 500 son infectados intencionalmente con una enfermedad contagiosa para probar una teoría de difusión de epidemia que postula que la tasa de cambio en la población infectada es proporcional al producto del número de ratones que tienen la enfermedad con el número que está libre de ésta. Asumiendo que la teoría es correcta, ¿cuánto tiempo le tomará a la mitad de la población adquirir la enfermedad?

Sea $N(t)$ lo que indique el número de ratones con la enfermedad en el tiempo t. Se dijo que $N(0) = 5$, de lo que se desprende que $500 - N(t)$ es el número de ratones sin la enfermedad en el tiempo t. La teoría predice que

$$\frac{dN}{dt} = kN(500 - N) \tag{1}$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Esta ecuación es diferente a (*7.1*) porque la tasa de cambio ya no es más proporcional al número justo de ratones que tiene la enfermedad. La ecuación (*1*) tiene la forma diferencial

$$\frac{dN}{N(500 - N)} - k\,dt = 0 \tag{2}$$

que es separable. Utilizando la descomposición en fracciones parciales, tenemos

$$\frac{1}{N(500 - N)} = \frac{1/500}{N} + \frac{1/500}{500 - N}$$

por lo tanto, (*2*) se puede escribir como

$$\frac{1}{500}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{500 - N}\right)dN - k\,dt = 0$$

Su solución es

$$\frac{1}{500}\int\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{500 - N}\right)dN - \int k\,dt = c$$

o bien

$$\frac{1}{500}(\ln|N| - \ln|500 - N|) - kt = c$$

que se puede reescribir como

$$\ln\left|\frac{N}{500 - N}\right| = 500(c + kt)$$

$$\frac{N}{500 - N} = e^{500(c+kt)} \tag{3}$$

Pero $e^{500(c+kt)} = e^{500c}e^{kt}$. Estableciendo $c_1 = e^{500c}$ podemos escribir (*3*) como

$$\frac{N}{500 - N} = c_1 e^{500kt} \tag{4}$$

En $t = 0$, $N = 5$. Sustituyendo estos valores en (*4*) encontramos que

$$\frac{5}{495} = c_1 e^{500k(0)} = c_1$$

de modo que $c_1 = 1/99$ y (*4*) se convierte en

$$\frac{N}{500 - N} = \frac{1}{99}e^{500kt} \tag{5}$$

Podríamos resolver (*5*) para N, pero esto no es necesario. Buscamos un valor de t donde $N = 250$, la mitad de la población. Sustituyendo $N = 250$ en (*5*) y resolviendo para t, obtenemos

$$1 = \frac{1}{99}e^{500kt}$$

$$99 = e^{500kt}$$

$$\ln 99 = 500kt$$

o bien $t = 0.00919/k$ unidades de tiempo. Sin tener información adicional, no podemos obtener un valor numérico para la constante de proporcionalidad k o bien ser más definitivos con respecto a t.

7.8. Se coloca una barra de metal a 100° F en un cuarto a temperatura constante de 0° F. Si después de 20 minutos, la temperatura de la barra es de 50° F, encuentre *a*) el tiempo que tomará para que la barra alcance la temperatura de 25° F y *b*) la temperatura de la barra luego de 10 minutos.

Use la ecuación (*7.2*) con $T_m = 0$; el medio aquí es el cuarto que se está manteniendo a una temperatura de 0° F. De este modo, tenemos

$$\frac{dT}{dt} + kT = 0$$

cuya solución es

$$T = ce^{-kt} \tag{1}$$

Puesto que $T = 100$ en $t = 0$ (la temperatura de la barra es inicialmente 100° F), de (*1*) tenemos que $100 = ce^{-k(0)}$ o bien $100 = c$. Sustituyendo este valor en (*1*), obtenemos

$$T = 100e^{-kt} \tag{2}$$

En $t = 20$, se dijo que $T = 50$; por lo tanto, de (*2*),

$$50 = 100e^{-20k} \qquad \text{de lo cual} \qquad k = \frac{-1}{20}\ln\frac{50}{100} = \frac{-1}{20}(-0.693) = 0.035$$

Sustituyendo este valor en (*2*), obtenemos la temperatura de la barra en un momento t como

$$T = 100e^{-0.035t} \tag{3}$$

a) Requerimos t cuando $T = 25$. Sustituyendo $T = 25$ en (*3*) tenemos

$$25 = 100e^{-0.035t} \quad \text{o bien} \quad -0.035t = \ln\frac{1}{4}$$

Resolviendo, hallamos que $t = 39.6$ min.

b) Requerimos T cuando $t = 10$. Sustituyendo $t = 10$ en (*3*) y luego resolviendo para T, encontramos que

$$T = 100e^{(-0.035)(10)} = 100(0.705) = 70.5° \text{ F}$$

Debería notarse que dado que la ley de Newton sólo es válida para pequeñas diferencias de temperatura, los cálculos anteriores representan solamente una primera aproximación a la situación física.

7.9 Un cuerpo a una temperatura de 50° F se coloca a la intemperie, donde la temperatura es de 100° F. Si luego de cinco minutos la temperatura del cuerpo es de 60° F, encuentre *a*) ¿cuánto tiempo tardará el cuerpo en alcanzar la temperatura de 75° F? y *b*) la temperatura del cuerpo luego de 20 minutos.

Usando (*7.2*) con $T_m = 100$ (el medio circundante es el aire exterior), tenemos

$$\frac{dT}{dt} + kT = 100k$$

Esta ecuación diferencial es lineal. Su solución está dada en el problema 6.15 como

$$T = ce^{-kt} + 100 \tag{1}$$

Dado que $T = 50$ cuando $t = 0$, se sigue de (*1*) que $50 = ce^{-k(0)} + 100$, o bien $c = -50$. Sustituyendo este valor en (*1*), obtenemos

$$T = -50e^{-kt} + 100 \tag{2}$$

En $t = 5$, sabemos que $T = 60$; por eso, de (*2*), $60 = -50e^{-5k} + 100$. Resolviendo para k, obtenemos

$$-40 = -50e^{-5k} \quad \text{o bien} \quad k = \frac{-1}{5}\ln\frac{40}{50} = \frac{-1}{5}(-0.223) = 0.045$$

Sustituyendo este valor en (*2*), obtenemos la temperatura del cuerpo en cualquier tiempo t como

$$T = -50e^{-0.045t} + 100 \tag{3}$$

a) Requerimos t cuando $T = 75$. Sustituyendo $T = 75$ en (*3*), tenemos

$$75 = -50e^{-0.045t} + 100 \quad \text{o bien} \quad e^{-0-045t} = \frac{1}{2}$$

Resolviendo para t, encontramos que

$$-0.045t = \ln\frac{1}{2} \quad \text{o bien} \quad t = 15.4 \text{ min}$$

b) Requerimos T cuando $t = 20$. Sustituyendo $t = 20$ en (*3*) y resolviendo para T, encontramos que

$$T = -50e^{(-0.045)(20)} + 100 = -50(0.41) + 100 = 79.5° \text{ F}$$

.10. Un cuerpo a una temperatura desconocida se coloca en un cuarto que se mantiene a una temperatura constante de 30° F. Si después de 10 minutos la temperatura del cuerpo es de 0° F y después de 20 minutos es de 15° F, encuentre la temperatura inicial desconocida.

De (7.2),

$$\frac{dT}{dt} + kT = 30k$$

Resolviendo, obtenemos

$$T = ce^{-kt} + 30 \tag{1}$$

Para $t = 10$, sabemos que $T = 0$. Entonces, de (*1*),

$$0 = ce^{-20k} + 30 \quad \text{o bien} \quad ce^{-10k} = -30 \tag{2}$$

En $t = 20$, se dijo que $T = 15$. Por ello, de nuevo de (*1*),

$$15 = ce^{-20k} + 30 \quad \text{o bien} \quad ce^{-20k} = -15 \tag{3}$$

Resolviendo (*2*) y (*3*) para k y c, encontramos que

$$k = \frac{1}{10}\ln 2 = 0.069 \quad \text{y} \quad c = -30e^{10k} = -30(2) = -60$$

Sustituyendo estos valores en (*1*), tenemos que la temperatura del cuerpo en cualquier momento t es

$$T = -60e^{-0.069t} + 30 \tag{4}$$

Dado que requerimos T en el tiempo inicial $t = 0$, de (*4*) tenemos que

$$T_0 = -60e^{(-0.069)(0)} + 30 = -60 + 30 = -30° \text{ F}$$

7.11. Un cuerpo que tiene cinco unidades técnicas de masa se deja caer desde una altura de 100 pies con velocidad cero. Asumiendo que no hay resistencia del aire, encuentre *a*) una expresión para la velocidad del cuerpo en un determinado tiempo t, *b*) una expresión para la posición del cuerpo en cualquier tiempo t y *c*) el tiempo requerido para llegar al suelo.

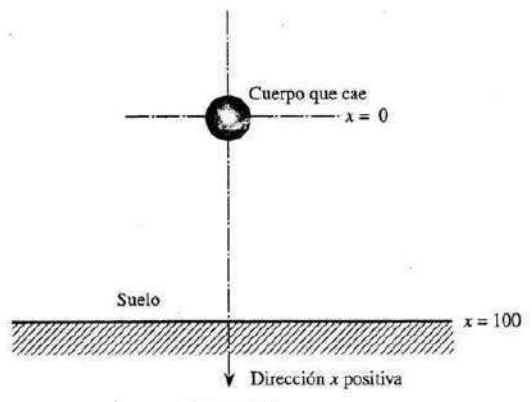


Figura 7-5

a) Escoja el sistema de coordenadas como en la figura 7-5. Luego, dado que no hay resistencia del aire, se aplica (*7.5*): $dv/dt = g$. Esta ecuación diferencial es lineal o, en forma diferencial, separable; su solución es $v = gt + c$. Cuando $t = 0$, $v = 0$ (inicialmente el cuerpo tiene velocidad 0); de aquí que $0 = g(0) + c$, o bien $c = 0$. De este modo, $v = gt$ o bien, asumiendo $g = 32$ pies/seg^2,

$$v = 32t \tag{1}$$

b) Recuerde que la velocidad es la razón de cambio en el tiempo del desplazamiento, designado aquí por x. Por eso, $v = dx/dt$, y (*1*) se convierte en $dx/dt = 32t$. Esta ecuación diferencial es tanto lineal como separable; su solución es

$$x = 16t^2 + c_1 \tag{2}$$

Pero en $t = 0$, $x = 0$ (véase figura 7-5). De este modo, $0 = (16)(0)^2 + c_1$, o bien $c_1 = 0$. Sustituyendo este valor en (2), tenemos

$$x = 16t^2 \tag{3}$$

c) Requerimos t cuando $x = 100$. De (*3*) $t = \sqrt{(100)/(16)} = 2.5\,\text{seg}$.

7.12. Una bola de acero que pesa 2 lb se deja caer desde una altura de 3 000 pies sin velocidad. Mientras cae, encuentra una resistencia del aire numéricamente igual a $v/8$ (en libras), donde v indica la velocidad de la bola (en pies por segundo). Encuentre *a*) la velocidad límite para la bola y *b*) el tiempo requerido para que la bola impacte en el suelo.

Ubique el sistema de coordenadas como en la figura 7-5 con el suelo situado ahora en $x = 3\,000$. Aquí, $w = 2$ lb y $k = 1/8$. Asumiendo que la gravedad g es $32\,\text{pies}/\text{seg}^{32}$, tenemos de la fórmula $w = mg$ que $2 = m(32)$ o que la masa de la bola es $m = 1/16$ unidades técnicas de masa. La ecuación (*7.4*) se convierte en

$$\frac{dv}{dt} + 2v = 32$$

que tiene como solución

$$v(t) = ce^{-2t} + 16 \tag{1}$$

En $t = 0$, sabemos que $v = 0$. Sustituyendo estos valores en (*1*), obtenemos

$$0 = ce^{-2(0)} + 16e = c + 16$$

de lo cual concluimos que $c = -16$ y (*1*) se convierte en

$$v(t) = -16e^{-2t} + 16 \tag{2}$$

a) De (*1*) o bien (*2*), vemos que conforme $t \to \infty$, $v \to 16$ de modo que la velocidad límite es 16 pies/seg^2.

b) Para hallar el tiempo que tarda la bola en impactar en el suelo ($x = 3\,000$), necesitamos una expresión para la posición de la bola en cualquier tiempo t. Dado que $v = dx/dt$; (*2*) se puede volver a escribir como

$$\frac{dx}{dt} = -16e^{-2t} + 16$$

Integrando ambos lados de esta última ecuación directamente con respecto a t, tenemos

$$x(t) = 8e^{-2t} + 16t + c_1 \tag{3}$$

donde c_1 indica una constante de integración. En $t = 0$, $x = 0$. Sustituyendo estos valores en (*3*), obtenemos

$$0 = 8e^{-2(0)} + 16(0) + c_1 = 8 + c_1$$

de lo cual concluimos que $c_1 = -8$ y (*3*) se convierte en

$$x(t) = 8e^{-2t} + 16t - 8 \tag{4}$$

La bola golpea el suelo cuando $x(t) = 3\,000$. Sustituyendo este valor en (*4*), tenemos

$$3\,000 = 8e^{-2t} + 16t - 8$$

o bien
$$376 = e^{-2t} + 2t \tag{5}$$

Aunque (*5*) no se puede resolver explícitamente para t, podemos aproximar la solución por medio de la prueba de ensayo y error, sustituyendo diferentes valores de t en (*5*) hasta que encontremos una solución del grado de exactitud que necesitamos. De manera alternativa, vemos que para cualquier valor grande de t, el término exponencial negativo puede ser despreciable. Una buena aproximación consiste en colocar $2t = 376$ o bien $t = 188$ seg. Para este valor de t, el exponente es esencialmente 0.

.13. Un cuerpo que pesa 64 lb se deja caer desde una altura de 100 pies con una velocidad inicial de 10 pies/seg. Asuma que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del cuerpo. Si se sabe que la velocidad límite es 128 pies/seg, encuentre *a*) una expresión para la velocidad del cuerpo en cualquier tiempo t, *b*) una expresión para la posición del cuerpo en cualquier tiempo t.

a) Localice el sistema de coordenadas como en la figura 7-5. Aquí, $w = 64$ lb. Dado que $w = mg$, tenemos que $mg = 64$, o bien $m = 2$ unidades técnicas de masa. Dado que $v_l = 128$ pies/seg, de (*7.6*) tenemos que $128 = 64/k$, o bien $k = \frac{1}{2}$. Sustituyendo estos valores en (*6.4*), obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{4}v = 32$$

que tiene la solución

$$v = ce^{-t/4} + 128 \tag{1}$$

En $t = 0$, sabemos que $v = 10$. Sustituyendo estos valores en (*1*), tenemos $10 = ce^0 + 128$, o bien $c = -118$. La velocidad en cualquier tiempo t está dada por

$$v = -118e^{-t/4} + 128 \tag{2}$$

b) Como $v = dx/dt$, donde x es el desplazamiento, (2) se puede volver a escribir como

$$\frac{dx}{dt} = -118e^{-t/4} + 128$$

Esta última ecuación, en forma diferencial, es separable; su solución es

$$x = 472e^{-t/4} + 128t + c_1 \tag{3}$$

En $t = 0$, tenemos que $x = 0$ (véase figura 7-5). De este modo, (3) da

$$0 = 472e^0 + (128)(0) + c_1 \qquad \text{o bien} \qquad c_1 = -472$$

El desplazamiento en cualquier tiempo t está dado por

$$x = 472e^{-t/4} + 128t - 472$$

7.14. Un cuerpo de masa m se arroja verticalmente al aire con una velocidad inicial v_0. Si el cuerpo experimenta una resistencia del aire proporcional a su velocidad, encuentre *a*) la ecuación de movimiento en el sistema de coordenadas de la figura 7-6, *b*) una expresión para la velocidad del cuerpo en cualquier tiempo t y *c*) el tiempo en el cual el cuerpo alcanza su altura máxima.

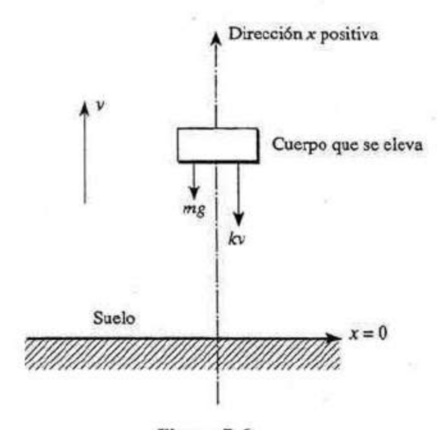


Figura 7-6

a) En este sistema de coordenadas, la ecuación (7.4) tal vez no sea la ecuación de movimiento. Para deducir la ecuación adecuada, vemos que hay dos fuerzas sobre el cuerpo: 1) la fuerza debida a la gravedad, dada por mg y 2) la fuerza debida a la resistencia del aire, dada por kv, que impide la velocidad del cuerpo. Dado que estas dos fuerzas actúan en la dirección descendente o negativa, la fuerza neta sobre el cuerpo es $-mg - kv$. Utilizando (7.3) y reagrupando, obtenemos

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = -g \tag{1}$$

como la ecuación de movimiento.

b) La ecuación (1) es una ecuación diferencial lineal, y su solución es $v = ce^{-(k/m)t} - mg/k$. En $t = 0$, $v = v_0$; de aquí $v_0 = ce^{-(k/m)0} - (mg/k)$, o $c = v_0 + (mg/k)$. La velocidad del cuerpo en cualquier tiempo t es

$$v = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-(k/m)t} - \frac{mg}{k} \tag{2}$$

c) El cuerpo alcanza su máxima altura cuando $v = 0$. Por esto, necesitamos t cuando $v = 0$. Sustituyendo $v = 0$ en (2) y resolviendo para t, hallamos

$$0 = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-(k/m)t} - \frac{mg}{k}$$

$$e^{-(k/m)t} = \frac{1}{1 + \dfrac{v_0 k}{mg}}$$

$$-(k/m)t = \ln\left(\frac{1}{1 + \dfrac{v_0 k}{mg}}\right)$$

$$t = \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{v_0 k}{mg}\right)$$

7.15. Un cuerpo de 2 unidades técnicas de masa se deja caer sin velocidad inicial y encuentra una resistencia del aire que es proporcional al cuadrado de su velocidad. Identifique una expresión para la velocidad del cuerpo en cualquier tiempo t.

La fuerza debida a la resistencia del aire es $-kv^2$, de modo que la segunda ley del movimiento de Newton se convierte en

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \quad \text{o bien} \quad 2\frac{dv}{dt} = 64 - kv^2$$

Volviendo a escribir esta ecuación en forma diferencial, tenemos

$$\frac{2}{64 - kv^2}dv - dt = 0 \tag{1}$$

que es separable. Por medio de fracciones parciales,

$$\frac{2}{64 - kv^2} = \frac{2}{(8 - \sqrt{k}v)(8 + \sqrt{k}v)} = \frac{\frac{1}{8}}{8 - \sqrt{k}v} + \frac{\frac{1}{8}}{8 + \sqrt{k}v}$$

De aquí (*1*) se puede reescribir como

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8 - \sqrt{k}v} + \frac{1}{8 + \sqrt{k}v}\right)dv - dt = 0$$

Esta última ecuación tiene como solución

$$\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{8 - \sqrt{k}v} + \frac{1}{8 + \sqrt{k}v}\right)dv - \int dt = c$$

o bien

$$\frac{1}{8}\left[-\frac{1}{\sqrt{k}}\ln\left|8 - \sqrt{k}v\right| + \frac{1}{\sqrt{k}}\ln\left|8 + \sqrt{k}v\right|\right] - t = c$$

que se puede volver a escribir como

$$\ln\left|\frac{8 + \sqrt{k}v}{8 - \sqrt{k}v}\right| = 8\sqrt{k}t + 8\sqrt{k}c$$

o bien

$$\frac{8 + \sqrt{k}v}{8 - \sqrt{k}v} = c_1 e^{8\sqrt{k}t} \quad (c_1 = \pm e^{8\sqrt{k}c})$$

En $t = 0$, sabemos que $v = 0$. Esto implica que $c_1 = 1$ y la velocidad está dada por

$$\frac{8 + \sqrt{k}v}{8 - \sqrt{k}v} = e^{8\sqrt{k}t} \quad \text{o bien} \quad v = \frac{8}{\sqrt{k}}\tanh 4\sqrt{k}t$$

Obsérvese que sin información adicional, no podemos obtener un valor numérico para la constante k.

7.16. Un tanque contiene inicialmente 100 gal de una solución de salmuera con 20 lb de sal. En $t = 0$ se vierte agua fresca al tanque a un ritmo de 5 gal/min, mientras que la solución bien agitada deja el tanque al mismo ritmo. Encuentre la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo t.

Aquí, $V_0 = 100$, $a = 20$ y $e = f = 5$. La ecuación *(7.8)* se convierte en

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{20}Q = 0$$

La solución de esta ecuación lineal es

$$Q = ce^{-t/20} \tag{1}$$

En $t = 0$, sabemos que $Q = a = 20$. Sustituyendo estos valores en (*1*) encontramos que $c = 20$, de modo que (*1*) se puede volver a escribir como $Q = 20e^{-t/20}$. Obsérvese que conforme $t \to \infty$, $Q \to 0$ tal como debiera de ser, puesto que sólo se está agregando agua fresca.

7.17. Un tanque contiene inicialmente 100 gal de una solución de salmuera con 1 lb de sal. En $t = 0$ se vierte otra solución de salmuera que contiene 1 lb de sal por galón a un ritmo de 3 gal/min, en tanto que la salmuera bien agitada abandona el tanque al mismo ritmo. Encuentre *a*) la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo t, y *b*) el tiempo en el cual la mezcla en el tanque contiene 2 lb de sal.

a) Aquí, $V_0 = 100$, $a = 1$, $b = 1$ y $e = f = 3$; por lo tanto, *(7.8)* se convierte en

$$\frac{dQ}{dt} + 0.03Q = 3$$

La solución a esta ecuación diferencial es

$$Q = ce^{-0.03t} + 100 \tag{1}$$

En $t = 0$, $Q = a = 1$. Sustituyendo estos valores en (*1*), encontramos que $1 = ce^0 + 100$, o bien $c = -99$. Entonces (*1*) se puede volver a escribir como

$$Q = -99e^{-0.03t} + 100 \tag{2}$$

b) Necesitamos t cuando $Q = 2$. Sustituyendo $Q = 2$ en (2), obtenemos

$$2 = -99e^{-0.03t} + 100 \quad \text{o bien} \quad e^{-0.03t} = \frac{98}{99}$$

de la cual

$$t = \frac{1}{0.03}\ln\frac{98}{99} = 0.338 \text{ min}$$

7.18. Un tanque contiene inicialmente 10 gal de agua fresca. En $t = 0$ se vierte al tanque una solución de salmuera que contiene 1 lb de sal por galón a un ritmo de 4 gal/min, mientras que la mezcla bien agitada abandona el tanque a un ritmo de 2 gal/min. Encuentre *a*) la cantidad de tiempo requerido para que ocurra el derrame o desborde, y *b*) la cantidad de sal en el tanque al momento del derrame.

a) Aquí $a = 0$, $b = 1$, $e = 4$, $f = 2$ y $V_0 = 10$. El volumen de salmuera en el tanque en cualquier tiempo t está dado por *(7.7)* como $V_0 + et - ft = 10 + 2t$. Necesitamos t cuando $10 + 2t = 50$; de aquí, $t = 20$ min.

b) Para este problema, *(7.8)* se convierte en

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{2}{10+2t}Q = 4$$

Ésta es una ecuación lineal; su solución está dada en el problema 6.13 como

$$Q = \frac{40t + 4t^2 + c}{10 + 2t} \tag{1}$$

En $t = 0$, $Q = a = 0$. Sustituyendo estos valores en (*1*), encontramos que $c = 0$. Necesitamos Q al momento del derrame, que de la parte (*a*) es $t = 20$. De este modo,

$$Q = \frac{40(20) + 4(20)^2}{10 + 2(20)} = 48 \text{ lb}$$

7.19. Un circuito RL tiene una fem (fuerza electromotriz) de 5 voltios, una resistencia de 50 ohmios, una inductancia de 1 henrio, y ninguna corriente inicial. Encuentre la corriente en el circuito en cualquier tiempo t.

Aquí, $E = 5$, $R = 50$ y $L = 1$; por lo tanto (*7.9*) se convierte en

$$\frac{dI}{dt} + 50I = 5$$

La ecuación es lineal; su solución es

$$I = ce^{-50t} + \frac{1}{10}$$

En $t = 0$, $I = 0$; de este modo, $0 = ce^{-50(0)} + \frac{1}{10}$, o bien $c = -\frac{1}{10}$. La corriente en cualquier tiempo t es entonces

$$I = -\frac{I}{10}e^{-50t} + \frac{1}{10} \tag{1}$$

La cantidad $-\frac{1}{10}e^{-50t}$ en (*1*) se llama *corriente transitoria*, pues esta cantidad va hasta cero ("se extingue") conforme $t \to \infty$. La cantidad $\frac{1}{10}$ en (*1*) se llama *corriente de estado estacionario*. Conforme $t \to \infty$, la corriente I se aproxima al valor de la corriente de estado estacionario.

7.20. Un circuito RL tiene una fem (en voltios) dada por 3 sen $2t$, una resistencia de 10 ohmios, una inductancia de 0.5 henrios, y una corriente inicial de 6 amperios. Encuentre la corriente en el circuito para cualquier tiempo t.

Aquí, $E = 3$ sen $2t$, $R = 10$ y $L = 0.5$; de aquí (*7.9*) se convierte en

$$\frac{dI}{dt} + 20I = 6 \operatorname{sen} 2t$$

Esta ecuación es lineal, con solución (véase capítulo 6)

$$\int d(Ie^{20t}) = \int 6e^{20t} \operatorname{sen} 2t \, dt$$

Llevando a cabo las operaciones de integración (la segunda integral requiere dos veces la aplicación de operaciones de integración por partes), obtenemos

$$I = ce^{-20t} + \frac{30}{101}\operatorname{sen} 2t - \frac{3}{101}\cos 2t$$

En $t = 0$, $I = 6$; por lo tanto,

$$6 = ce^{-20(0)} + \frac{30}{101}\operatorname{sen} 2(0) - \frac{3}{101}\cos 2(0) \quad \text{o bien} \quad 6 = c - \frac{3}{101}$$

de donde $c = 609/101$. La corriente en cualquier tiempo t es

$$I = \frac{609}{101}e^{-20t} + \frac{30}{101}\operatorname{sen} 2t - \frac{3}{101}\cos 2t$$

Como en el problema 7.18, la corriente es la suma de una corriente transitoria, dada por $(609/101)e^{-20t}$, y una corriente de estado estacionario,

$$\frac{30}{101}\operatorname{sen} 2t - \frac{3}{101}\cos 2t$$

7.21. Reescriba la corriente de estado estacionario del problema 7.20 en la forma $A\,\text{sen}\,(2t-\phi)$. El ángulo ϕ es llamado *ángulo de fase*.

Dado que $A\ \text{sen}\,(2t-\phi)=A(\text{sen}\,2t\cos\phi-\cos 2t\,\text{sen}\,\phi)$, necesitamos

$$I_s=\frac{30}{101}\text{sen}\,2t-\frac{3}{101}\cos 2t=A\cos\phi\,\text{sen}\,2t-A\,\text{sen}\,\phi\cos 2t$$

De este modo, $A\cos\phi=\frac{30}{101}$ y $A\,\text{sen}\,\phi=\frac{3}{101}$, de lo que se desprende que

$$\left(\frac{30}{101}\right)^2+\left(\frac{3}{101}\right)^2=A^2\cos^2\phi+A^2\,\text{sen}^2\,\phi=A^2(\cos^2\phi+\text{sen}^2\,\phi)=A^2$$

y
$$\tan\phi=\frac{A\,\text{sen}\,\phi}{A\cos\phi}=\left(\frac{3}{101}\right)\Big/\left(\frac{30}{101}\right)=\frac{1}{10}$$

En consecuencia, I_s tiene la forma requerida si

$$A=\sqrt{\frac{909}{(101)^2}}=\frac{3}{\sqrt{101}}\quad \text{y}\quad \phi=\arctan\frac{1}{10}=0.0997 \text{ radianes}$$

7.22. Un circuito RC tiene una fem (en voltios) dada por 400 cos $2t$, una resistencia de 100 ohmios y una capacitancia de 10^{-2} faradios. Inicialmente no hay carga en el capacitor. Encuentre la corriente en el circuito en cualquier tiempo t.

Primero hallamos la carga q y luego usamos (*7.11*) para obtener la corriente. Aquí, $E=400\cos 2t$, $R=100$ y $C=10^{-2}$; por lo tanto, (*7.10*) se convierte en

$$\frac{dq}{dt}+q=4\cos 2t$$

La ecuación es lineal, y su solución es (se requieren dos operaciones de integración por partes)

$$q=ce^{-1}+\frac{8}{5}\text{sen}\,2t+\frac{4}{5}\cos 2t$$

En $t=0$, $q=0$; de aquí,

$$0=ce^{-(0)}+\frac{8}{5}\text{sen}\,2(0)+\frac{4}{5}\cos 2(0)\quad \text{o bien}\quad c=-\frac{4}{5}$$

de este modo
$$q=-\frac{4}{5}e^{-t}+\frac{8}{5}\text{sen}\,2t+\frac{4}{5}\cos 2t$$

y utilizando (*7.11*) obtenemos

$$I=\frac{dq}{dt}=\frac{4}{5}e^{-t}+\frac{16}{5}\cos 2t-\frac{8}{5}\text{sen}\,2t$$

7.23. Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x^2+y^2=c^2$.

La familia, que está dada por (*7.12*) con $F(x, y, c)=x^2+y^2-c^2$, consiste de círculos con centros en el origen y radios c. Derivando implícitamente la ecuación dada con respecto a x, obtenemos

$$2x+2yy'=0\quad \text{o bien}\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

Aquí, $f(x, y) = -x/y$, de modo que (7.15) se convierte en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

La ecuación es lineal (y, en forma diferencial, separable); su solución es

$$y = kx \tag{1}$$

la cual representa las trayectorias ortogonales.

En la figura 7-7 se muestran algunos miembros de la familia de círculos en líneas continuas y se muestran en línea punteada algunos miembros de la familia (1) que son líneas rectas a través del origen. Obsérvese que cada línea recta intersecta a cada círculo en ángulos rectos.

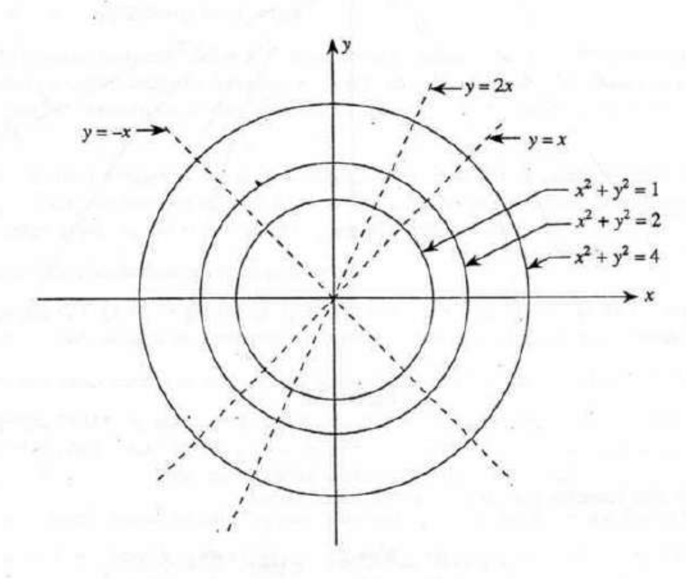


Figura 7-7

7.24. Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y = cx^2$.

La familia, que está dada por (7.12) con $F(x, y, c) = y - cx^2$, consiste de parábolas simétricas alrededor del eje y con vértices en el origen. Derivando la ecuación dada con respecto a x, obtenemos $dx/dy = 2cx$. Para eliminar c, observamos, de la ecuación dada, que $c = y/x^2$; por lo tanto, $dy/dx = 2y/x$. Aquí $f(x, y) = 2y/x$, así (7.15) se convierte en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{2y} \quad \text{o bien} \quad x\,dx + 2y\,dy = 0$$

La solución de esta ecuación separable es $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = k$. Estas trayectorias ortogonales son elipses. Algunos miembros de esta familia, junto con ciertos miembros de la familia original de parábolas, se muestran en la figura 7-8. Obsérvese que cada elipse intersecta a cada parábola en ángulos rectos.

7.25. Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x^2 + y^2 = cx$.

Aquí, $F(x, y, c) = x^2 + y^2 - cx$. Derivando implícitamente la ecuación dada con respecto a x, obtenemos,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = c$$

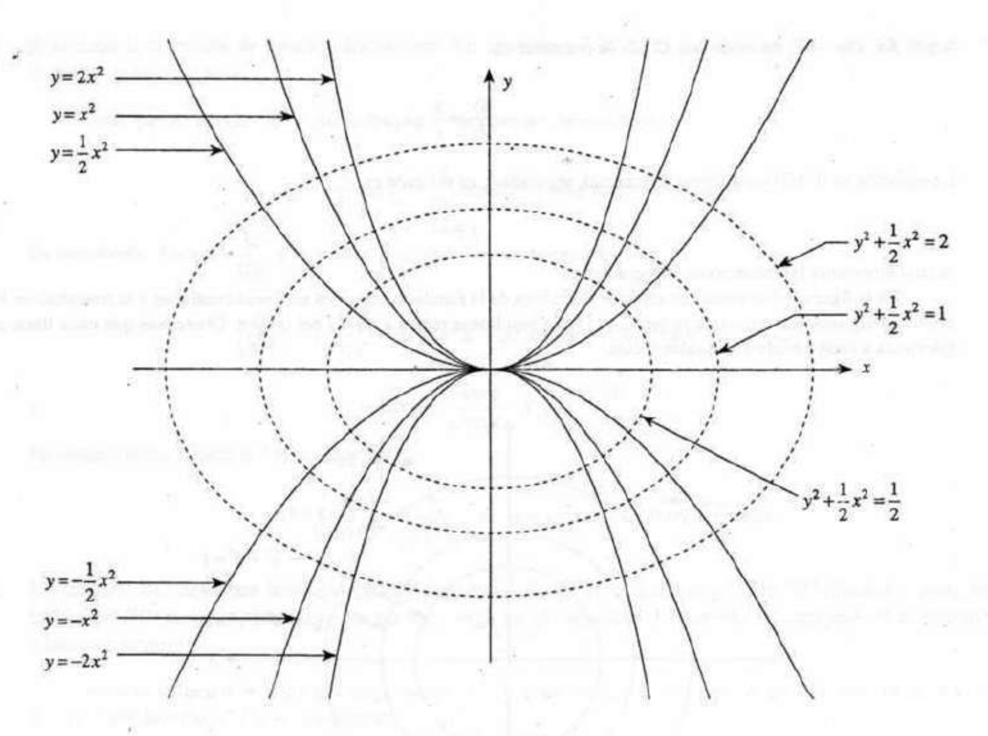


Figura 7-8

Eliminando c entre esta ecuación y $x^2+y^2-cx=0$, encontramos

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{x} \quad \text{o bien} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}$$

Aquí $f(x,y)=(y^2-x^2)/2xy$, así que (*7.15*) se convierte en

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

Esta ecuación es homogénea y su solución (véase problema 4.14) da las trayectorias ortogonales como $x^2+y^2=ky$.

PROBLEMAS ADICIONALES

7.26. Las bacterias crecen en una solución nutritiva a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Inicialmente hay 250 colonias de bacterias en la solución que crece a 800 colonias después de siete horas. Encuentre *a*) una expresión para el número aproximado de colonias en el cultivo en cualquier tiempo *t* y *b*) el tiempo necesario para que las bacterias crezcan hasta 1600 colonias.

7.27. Las bacterias crecen en un cultivo a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Inicialmente hay 300 colonias de bacterias en el cultivo y después de dos horas el número ha crecido un 20 por ciento. Encuentre *a*) una expresión para un número aproximado de colonias en el cultivo en cualquier tiempo dado *t* y *b*) el tiempo requerido para que las bacterias dupliquen su población inicial.

7.28. Un moho crece a un ritmo proporcional a su cantidad presente. Inicialmente, hay 2 oz de este moho, y dos días después hay 3 oz. Encuentre *a*) cuánto moho estaba presente después de un día y *b*) cuánto moho estará presente en 10 días.

7.29. Un moho crece a un ritmo proporcional a su cantidad presente. Si la cantidad inicial se duplica en un día, ¿qué proporción de la cantidad inicial estará presente a los cinco días? *Sugerencia:* Designe la cantidad inicial como N_0. No es necesario conocer N_0 explícitamente.

7.30. Una levadura crece a un ritmo proporcional a su cantidad presente. Si la cantidad original se duplica en dos horas, ¿en cuántas horas se triplicará?

7.31. La población de un país ha crecido a un ritmo proporcional al número de personas en el mismo. En el presente, el país tiene 80 millones de habitantes. Hace 10 años tenía 70 millones. Asumiendo que esta tendencia continúa, encuentre *a*) una expresión para el número aproximado de personas que viven en el país en cualquier tiempo t (tomando $t = 0$ para el tiempo presente) y *b*) el número aproximado de personas que habitarán el país para el fin del próximo periodo de diez años.

7.32. Se sabe que la población de cierto estado crece a un ritmo proporcional al número de personas que actualmente viven en él. Si después de 10 años la población se ha triplicado y luego de 20 años la población es de 150 000, encuentre el número de personas que vivían inicialmente en el estado.

7.33. Se sabe que cierto material radiactivo decae a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay 100 miligramos del material presente y luego de dos años se observa que el 5 por ciento de la masa original ha decaído, encuentre *a*) una expresión para la masa en un tiempo cualquiera t y *b*) el tiempo necesario para que el 10 por ciento del material original haya decaído.

7.34. Se sabe que cierto material radiactivo decae a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Si después de una hora se observa que 10 por ciento del material original ha decaído, encuentre la vida media del material. *Sugerencia:* Designe la masa inicial del material por N_0. No es necesario conocer N_0 explícitamente.

7.35. Encuentre $N(t)$ para la situación descrita en el problema 7.7.

7.36. Una persona deposita \$10 000 en un certificado que paga 6 por ciento de interés por año, compuesto en forma continua. ¿Cuánto habrá en la cuenta al cabo de siete años, asumiendo que no hay extracciones ni depósitos adicionales?

7.37. ¿Cuánto habrá en la cuenta descrita en el problema anterior si la tasa de interés es ahora del 7.5 por ciento?

7.38. Una persona deposita \$5 000 en una cuenta establecida para un niño al momento de su nacimiento. Asumiendo que no hay extracciones ni depósitos adicionales, ¿cuánto tendrá el niño en la cuenta cuando tenga 21 años si el banco paga un 5 por ciento de interés por año, compuesto en forma continua para todo el periodo?

7.39. Determine la tasa de interés requerida para duplicar la inversión en ocho años compuestos en forma continua.

7.40. Determine la tasa de interés requerida para triplicar la inversión en 10 años compuestos en forma continua.

7.41. ¿Cuánto tiempo le tomará a un depósito bancario triplicar su valor si el interés está compuesto continuamente a una tasa constante del 5.25 por ciento anual?

7.42. ¿Cuánto tiempo le tomará a un depósito bancario duplicar su valor si el interés es compuesto continuamente a una tasa constante del 8.75 por ciento anual?

7.43. Una persona cuenta actualmente con \$6 000 y planea invertirlos en una cuenta que acredite interés continuamente. ¿Qué tasa de interés debe pagar el banco si el depositante necesita tener \$10 000 en cuatro años?

7.44. Una persona cuenta actualmente con \$8 000 y planea invertirlos en una cuenta que acredite interés continuamente a una tasa constante del 6.25 por ciento. ¿Cuánto tiempo le tomará a la cuenta crecer hasta \$13 500?

7.45. Un cuerpo a una temperatura de 0° F se coloca en un cuarto cuya temperatura se mantiene a 100° F. Si luego de 10 minutos la temperatura del cuerpo es de 25° F, encuentre *a*) el tiempo que requiere el cuerpo para alcanzar la temperatura de 50° F y *b*) la temperatura del cuerpo después de 20 minutos.

7.46. Un cuerpo de temperatura desconocida se coloca en un refrigerador a una temperatura constante de 0° F. Si después de 20 minutos la temperatura del cuerpo es de 40° F y 40 minutos más tarde la temperatura del cuerpo es de 20° F, encuentre la temperatura inicial del cuerpo.

7.47. Un cuerpo de temperatura de 50° F se coloca en un horno cuya temperatura se mantiene constante a 150° F. Si después de 10 minutos la temperatura del cuerpo es de 75° F, encuentre el tiempo que requiere el cuerpo para alcanzar una temperatura de 100° F.

7.48. Un pastel caliente que ha sido horneado a una temperatura constante de 325° F se saca directamente del horno y se coloca en el exterior a la sombra para que se enfríe en un día en el que la temperatura a la sombra es de 85° F. Después de

cinco minutos a la sombra, la temperatura del pastel se ha reducido hasta 250° F. Determine *a*) la temperatura del pastel luego de 20 minutos, y *b*) el tiempo que le lleva al pastel alcanzar 275° F.

7.49. Una taza de té se prepara en una taza precalentada con agua caliente de modo que la temperatura tanto de la taza como de la infusión es de 190° F. El té se deja enfriar luego en un cuarto que se mantiene a una temperatura constante de 72° F. Dos minutos más tarde, la temperatura del té es de 150° F. Determine *a*) la temperatura del té luego de cinco minutos y *b*) el tiempo que necesita el té para alcanzar 100° F.

7.50. Una barra de hierro previamente calentada a 1 200° C se enfría en un gran baño de agua mantenida a una temperatura constante de 50° C. La barra se enfría 200° C durante el primer minuto. ¿Cuánto tiempo le llevará a la barra enfriarse otros 200° C?

7.51. Un cuerpo de 3 unidades técnicas de masa se deja caer desde una altura de 500 pies con una velocidad inicial de cero. Asumiendo que no existe resistencia del aire, encuentre *a*) una expresión para la velocidad del cuerpo en cualquier tiempo t y *b*) una expresión para la posición del cuerpo en cualquier tiempo t con respecto al sistema de coordenadas descrito en la figura 7-5.

7.52. *a*) Determine el tiempo que requiere el cuerpo descrito en el problema anterior para impactar el suelo. *b*) ¿Cuánto tiempo tardará si la masa del cuerpo fuera de 10 unidades técnicas de masa?

7.53. Un cuerpo se deja caer desde una altura de 300 pies con una velocidad inicial de 30 pies/seg. Asumiendo que no existe resistencia del aire, encuentre *a*) una expresión para la velocidad del cuerpo en cualquier tiempo t y *b*) el tiempo que tardará el cuerpo en llegar al suelo.

7.54. Un cuerpo de 2 unidades técnicasde masa se deja caer desde una altura de 450 pies con una velocidad inicial de 10 pies/seg. Asumiendo que no hay resistencia del aire, encuentre *a*) una expresión para la velocidad del cuerpo en cualquier tiempo t y *b*) el tiempo que tardará el cuerpo en llegar al suelo.

7.55. Un cuerpo se impulsa verticalmente y en forma recta con una velocidad inicial de 500 pies/seg en un vacío sin resistencia del aire. ¿Cuánto tardará el cuerpo en regresar al suelo?

7.56. Una bola se impulsa verticalmente y en forma recta con una velocidad inicial de 250 pies/seg en un vacío sin resistencia del aire, ¿qué altura alcanzará?

7.57. Un cuerpo de masa m se arroja al aire verticalmente con una velocidad inicial v_0. El cuerpo no encuentra resistencia del aire. Encuentre *a*) la ecuación de movimiento en el sistema de coordenadas de la figura 7-6, *b*) una expresión para la velocidad del cuerpo en cualquier tiempo t, *c*) el tiempo t_m en que el cuerpo alcanza su máxima altura, *d*) una expresión para la posición del cuerpo en cualquier tiempo t y *e*) la altura máxima alcanzada por el cuerpo.

7.58. Vuelva a hacer el problema 7.51 asumiendo que hay resistencia del aire que crea una fuerza sobre el cuerpo igual a $-2v$ lb.

7.59. Vuelva a hacer el problema 7.54 asumiendo que hay resistencia del aire que crea una fuerza sobre el cuerpo igual a $\frac{1}{2}v$ lb.

7.60. Una bola de 5 unidades técnicas de masa se deja caer desde una altura de 1 000 pies. Encuentre la velocidad límite de la bola si encuentra una fuerza de la resistencia del aire igual a $-\frac{1}{2}v$.

7.61. Un cuerpo de masa de 2 kg se deja caer desde una altura de 200 m. Encuentre la velocidad límite del cuerpo si éste encuentra una fuerza de la resistencia del aire igual a $-50v$.

7.62. Un cuerpo de 10 unidades técnicas de masa se deja caer desde una altura de 1 000 pies sin velocidad inicial. El cuerpo encuentra una resistencia del aire proporcional a su velocidad. Si se sabe que la velocidad límite es de 320 pies/seg, encuentre *a*) una expresión para la velocidad del cuerpo en cualquier tiempo t, *b*) una expresión para la posición del cuerpo en cualquier tiempo t y *c*) el tiempo que necesita el cuerpo para alcanzar la velocidad de 160 pies/seg.

7.63. Un cuerpo que pesa 8 lb se deja caer desde una gran altura sin velocidad inicial. Mientras cae, el cuerpo encuentra una fuerza debida a la resistencia del aire proporcional a su velocidad. Si la velocidad límite de este cuerpo es 4 pies/seg, encuentre *a*) una expresión para la velocidad del cuerpo en cualquier tiempo t y *b*) una expresión para la posición del cuerpo en cualquier tiempo t.

7.64. Un cuerpo que pesa 160 lb se deja caer desde una altura de 2 000 pies sin velocidad inicial. Mientras cae, el cuerpo encuentra una fuerza debida a la resistencia del aire proporcional a su velocidad. Si la velocidad límite de este cuerpo es 320 pies/seg, encuentre *a*) una expresión para la velocidad del cuerpo en cualquier tiempo t y *b*) una expresión para la posición del cuerpo en cualquier tiempo t.

7.65. Un tanque contiene inicialmente 10 gal de agua fresca. En $t = 0$ se vierte al tanque una solución de salmuera que contiene $\frac{1}{2}$ lb de sal por galón a un ritmo de 2 gal/min, mientras la mezcla bien agitada abandona el tanque al mismo ritmo. Encuentre *a*) la cantidad y *b*) la concentración de sal en el tanque en cualquier tiempo t.

7.66. Un tanque contiene inicialmente 80 gal de una solución de salmuera que contiene $\frac{1}{8}$ lb de sal por galón. En $t = 0$ se vierte al tanque otra solución de salmuera que contiene 1 lb de sal por galón a un ritmo de 4 gal/min, mientras la mezcla bien agitada abandona el tanque a un ritmo de 8 gal/min. Encuentre la cantidad de sal en el tanque cuando éste contiene exactamente 40 gal de solución.

7.67. Un tanque contiene 100 gal de salmuera preparada disolviendo 80 lb de sal en agua. Se vierte agua pura en el tanque a un ritmo de 4 gal/min, en tanto la mezcla bien agitada deja el tanque al mismo ritmo. Encuentre *a*) la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo t y *b*) el tiempo requerido para que la mitad de la sal deje el tanque.

7.68. Un tanque contiene 100 gal de salmuera preparada disolviendo 60 lb de sal en agua. Agua con sal que contiene 1 lb de sal por galón corre dentro del tanque a un ritmo de 2 gal/min y la solución bien agitada abandona el tanque a un ritmo de 3 gal/min. Encuentre la cantidad de sal en el tanque luego de 30 minutos.

7.69. Un tanque contiene 40 l de una solución que contiene 2 g de sustancia por litro. Se vierte en él agua salada que contiene 3 g de esta sustancia por litro a un ritmo de 4 l/min y la mezcla bien agitada deja el tanque al mismo ritmo. Encuentre la cantidad de sustancia en el tanque después de 15 minutos.

7.70. Un tanque contiene 40 l de una solución química preparada disolviendo 80 g de una sustancia soluble en agua fresca. Se hace ingresar al tanque un fluido que contiene 2 g de esta sustancia a un ritmo de 3 l/min y la mezcla bien agitada deja el tanque al mismo ritmo. Encuentre la cantidad de sustancia en el tanque después de 20 minutos.

7.71. Un circuito RC tiene una fem de 5 voltios, una resistencia de 10 ohmios, una capacitancia de 10^{-2} faradios y una carga inicial sobre el capacitor de 5 culombios. Encuentre *a*) la corriente transitoria y *b*) la corriente de estado estacionario.

7.72. Un circuito RC tiene una fem de 100 voltios, una resistencia de 5 ohmios, una capacitancia de 0.02 faradios y una carga inicial sobre el capacitor de 5 culombios. Encuentre *a*) una expresión para la carga sobre el capacitor en cualquier tiempo t y *b*) la corriente en el circuito para cualquier tiempo t.

7.73. Un circuito RC no tiene ninguna fem aplicada, una resistencia de 10 ohmios, una capacitancia de 0.04 faradios y una carga inicial sobre el capacitor de 10 culombios. Encuentre *a*) una expresión para la carga sobre el capacitor en cualquier tiempo t y *b*) la corriente en el circuito para cualquier tiempo t.

7.74. Un circuito RC tiene una fem de $10 \operatorname{sen} t$ voltios, una resistencia de 100 ohmios, una capacitancia de 0.005 faradios y ninguna carga inicial sobre el capacitor. Encuentre *a*) la carga sobre el capacitor en cualquier tiempo t y *b*) la corriente de estado estacionario.

7.75. Un circuito RC tiene una fem de $300 \cos 2t$ voltios, una resistencia de 150 ohmios, una capacitancia de $1/6 \times 10^{-2}$ faradios y una carga inicial sobre el capacitor de 5 culombios. Encuentre *a*) la carga sobre el capacitor en cualquier tiempo t y *b*) la corriente de estado estacionario.

7.76. Un circuito RL tiene una fem de 5 voltios, una resistencia de 50 ohmios, una inductancia de 1 henrio y ninguna corriente inicial. Encuentre *a*) la corriente en el circuito en cualquier tiempo t y *b*) su componente de estado estacionario.

7.77. Un circuito RL no tiene una fem aplicada, una resistencia de 50 ohmios, una inductancia de 2 henrios y una corriente inicial de 10 amperios. Encuentre *a*) la corriente en el circuito en cualquier tiempo t y *b*) su componente transitoria.

7.78. Un circuito RL tiene una resistencia de 10 ohmios, y una inductancia de 1.5 henrios, una fem aplicada de 9 voltios y una corriente inicial de 6 amperios. Encuentre *a*) la corriente en el circuito en cualquier tiempo t y *b*) su componente transitoria.

7.79. Un circuito RL tiene una fem dada por $4 \operatorname{sen} t$ (en voltios), una resistencia de 100 ohmios, una inductancia de 4 henrios y no posee corriente inicial. Encuentre la corriente en el circuito en cualquier tiempo t.

7.80. Se sabe que la corriente de estado estacionario en un circuito es $\frac{5}{17} \operatorname{sen} t - \frac{3}{17} \cos t$. Vuelva a escribir esta corriente en la forma $A \operatorname{sen}(t - \phi)$.

7.81. Vuelva a escribir la corriente de estado estacionario del problema 7.21 en la forma $A \cos(2t + \phi)$. *Sugerencia:* Use la identidad $\cos(x + y) \equiv \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.

7.82. Encuentre la trayectoria ortogonal de la familia de curvas $x^2 - y^2 = c^2$.

7.83. Encuentre la trayectoria ortogonal de la familia de curvas $y = ce^x$.

7.84. Encuentre la trayectoria ortogonal de la familia de curvas $x^2 - y^2 = cx$.

7.85. Encuentre la trayectoria ortogonal de la familia de curvas $x^2 + y^2 = cy$.

7.86. Encuentre la trayectoria ortogonal de la familia de curvas $y^2 = 4cx$.

7.87. Se colocan 100 colonias de bacterias en una solución nutriente en la que se proporciona constantemente una cantidad abundante de alimento, pero el espacio es limitado. La competencia por el espacio forzará a la población de bacterias a estabilizarse en 1 000 colonias. Bajo estas condiciones, el ritmo de crecimiento de las bacterias es proporcional al producto de la cantidad de bacterias presentes en el cultivo con la diferencia entre la máxima población que la solución puede sostener y la población presente. Estime la cantidad de bacterias en la solución en un tiempo t si se sabe que había 200 colonias de bacterias en la solución después de siete horas.

7.88. Un nuevo producto se comercializa mejor dándolo gratis a 1 000 personas en una ciudad de un millón de habitantes, que se asume que permanece constante durante el periodo de la prueba. Luego se asume que la tasa de adopción del producto será proporcional al número de personas que lo tiene con el número de personas que no lo tiene. Estime como una función de tiempo el número de personas que habrán adoptado el producto si se sabe que 3 000 de ellas lo han adoptado luego de cuatro semanas.

7.89. Un cuerpo de una unidad técnica de masa se deja caer con una velociadad inicial de 1 pie/seg y se encuentra con una fuerza debida a la resistencia del aire dada exactamente por $-8v^2$. Encuentre la velocidad en cualquier tiempo t.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES: TEORÍA DE SOLUCIONES

8

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden tiene la forma

$$b_n(x)y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x) \tag{8.1}$$

donde $g(x)$ y los coeficientes $b_j(x)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$ dependen solamente de la variable x. En otras palabras, *no* dependen de y ni de ninguna derivada de y.

Si $g(x) \equiv 0$, entonces la ecuación (*8.1*) es *homogénea*; si no, (*8.1*) es *no homogénea*. Una ecuación ecuación diferencial lineal tiene *coeficientes constantes* si todos los coeficientes $b_j(x)$ en (*8.1*) son constantes; si uno o más de estos coeficientes es no constante, (*8.1*) tiene *coeficientes variables*.

Teorema 8.1. Considérese el problema del valor inicial dado por la ecuación diferencial lineal (*8.1*) y las n condiciones iniciales:

$$y(x_0) = c_0, \quad y'(x_0) = c_1, \quad y''(x_0) = c_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1} \tag{8.2}$$

Si $g(x)$ y $b_j(x)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$ son continuas en algún intervalo $\mathcal{I}$ que contenga x_0 y si $b_n(x) \neq 0$ en $\mathcal{I}$, entonces el problema del valor inicial dado por (*8.1*) y (*8.2*) tiene una única (y sólo una) solución definida para todo $\mathcal{I}$.

Cuando se mantienen las condiciones sobre $b_n(x)$ en el teorema 8.1 podemos dividir la ecuación (*8.1*) por $b_n(x)$ para obtener

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = \phi(x) \tag{8.3}$$

donde $a_j(x) = b_j(x)/b_n(x) (j = 0, 1, \ldots, n-1)$ y $\phi(x) = g(x)/b_n(x)$.

Definamos el operador diferencial $\mathbf{L}(y)$ por

$$\mathbf{L}(y) \equiv y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y \tag{8.4}$$

donde $a_i(x)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ es continua sobre cierto intervalo de interés. Entonces (*8.3*) se puede reescribir como

$$\mathbf{L}(y) = \phi(x) \tag{8.5}$$

y, en particular, una ecuación diferencial lineal *homogénea* se puede expresar como

$$\mathbf{L}(y) = 0 \tag{8.6}$$

SOLUCIONES LINEALMENTE INDEPENDIENTES

Un conjunto de funciones $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ es *linealmente dependiente* en $a \leq x \leq b$ si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, *no todas cero*, tal que

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)\equiv 0 \tag{8.7}$$

en $a \leq x \leq b$.

EJEMPLO 8.1 El conjunto $\{x, 5x, 1, \operatorname{sen} x\}$ es linealmente dependiente en $[-1, 1]$ puesto que existen constantes $c_1 = -5$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$ y $c_4 = 0$, *no todas cero*, tal que *(8.7)* se satisface. En particular,

$$-5\cdot x+1\cdot 5x+0\cdot 1+0\cdot \operatorname{sen} x\equiv 0$$

Obsérvese que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ es un conjunto de constantes que siempre satisfacen *(8.7)*. Un conjunto de funciones es linealmente dependiente si existe *otro* conjunto de constantes, *no todas cero*, que también satisfagan *(8.7)*. Si la *única* solución para *(8.7)* es $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, entonces el conjunto de funciones $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ es *linealmente independiente* en $a \leq x \leq b$.

Teorema 8.2. La ecuación diferencial lineal *homogénea* de n-ésimo orden $\mathbf{L}(y)=0$ siempre tiene n soluciones linealmente independientes. Si $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ representan estas soluciones, entonces la solución general de $\mathbf{L}(y)=0$ es

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x) \tag{8.8}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ indican constantes arbitrarias.

EL WRONSKIANO

El *Wronskiano* de un conjunto de funciones $\{z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x)\}$ en el intervalo $a \leq x \leq b$, que tiene la propiedad de que cada función posee $n-1$ derivadas, es el deteminante

$$W(z_1, z_2, \ldots, z_n)=\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_1' & z_2' & \cdots & z_n' \\ z_1'' & z_2'' & \cdots & z_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \cdots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Teorema 8.3. Si el Wronskiano de un conjunto de n funciones definidas en el intervalo $a \leq x \leq b$ es distinto de cero para al menos un punto en este intervalo, entonces el conjunto de funciones es aquí linealmente independiente. Si el Wronskiano es igual a cero en este intervalo y cada una de las funciones es una solución para la misma ecuación diferencial lineal, entonces el conjunto de funciones es linealmente dependiente.

Precaución: El teorema 8.3 no se aplica cuando el Wronskiano es idéntico a cero y no se sabe si las funciones son soluciones de la misma ecuación diferencial lineal. En este caso se debe probar directamente si se satisface la ecuación *(8.7)*.

ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS

Sea y_p la que represente cualquier solución *particular* de la ecuación *(8.5)* (véase capítulo 3) y sea y_h (en lo sucesivo llamada *solución homogénea* o *complementaria*) la que represente la solución *general* de la ecuación homogénea asociada $\mathbf{L}(y)=0$.

Teorema 8.4. La solución general para $\mathbf{L}(y)=\phi(x)$ es

$$y=y_h+y_p \tag{8.9}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

8.1. Establezca el orden de las siguientes ecuaciones diferenciales y determine si son lineales:

a) $2xy'' + x^2y' - (\operatorname{sen} x)y = 2$

b) $yy''' + xy' + y = x^2$

c) $y'' - y = 0$

d) $3y' + xy = e^{-x^2}$

e) $2e^x y''' + e^x y'' = 1$

f) $\frac{d^4y}{dx^4} + y^4 = 0$

g) $y'' + \sqrt{y'} + y = x^2$

h) $y' + 2y + 3 = 0$

a) Segundo orden. Aquí, $b_2(x) = 2x$, $b_1(x) = x^2$, $b_0(x) = -\operatorname{sen} x$ y $g(x) = 2$. Dado que ninguno de estos términos depende de y o cualquier derivada de y, la ecuación diferencial es lineal.

b) Tercer orden. Dado que $b_3 = y$, que sí depende de y, la ecuación diferencial es no lineal.

c) Segundo orden. Aquí, $b_2(x) = 1$, $b_1(x) = 0$, $b_0(x) = 1$ y $g(x) = 0$. Ninguno de estos términos depende de y o cualquier derivada de y; por lo tanto, la ecuación diferencial es lineal.

d) Primer orden. Aquí $b_1(x) = 3$, $b_0(x) = x$ y $g(x) = e^{-x^2}$; por lo tanto, la ecuación diferencial es lineal. (Véase también capítulo 5.)

e) Tercer orden. Aquí $b_3(x) = 2e^x$, $b_2(x) = e^x$, $b_1(x) = b_0(x) = 0$ y $g(x) = 1$. Ninguno de estos términos depende de y o cualquier derivada de y; por lo tanto, la ecuación diferencial es lineal.

f) Cuarto orden. La ecuación es no lineal porque y está elevada a una potencia mayor que la unidad.

g) Segundo orden. La ecuación es no lineal porque la primera derivada de y está elevada a una potencia distinta que la unidad, en ella la potencia es un medio.

h) Primer orden. Aquí $b_1(x) = 1$, $b_0(x) = 2$ y $g(x) = -3$. Ninguno de estos términos depende de y o cualquier derivada de y; por lo tanto, la ecuación diferencial es lineal.

8.2. ¿Cuáles de las ecuaciones diferenciales lineales dadas en el problema 8.1 son homogéneas?

Utilizando los resultados del problema 8.1 vemos que la única ecuación diferencial lineal que presenta $g(x) \equiv 0$ es *c)*, así que ésta es la única que es homogénea. Las ecuaciones *a)*, *d)*, *e)* y *h)* son ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

8.3. ¿Cuáles de las ecuaciones diferenciales lineales dadas en el problema 8.1 tienen coeficientes constantes?

En sus formas presentes, sólo *c)* y *h)* tienen coeficientes constantes, pues sólo en estas ecuaciones *todos* los coeficientes son constantes. La ecuación *e)* se puede transformar en una que tenga coeficientes constantes, multiplicándola por e^{-x}. La ecuación se convierte entonces en

$$2y''' + y'' = e^{-x}$$

8.4. Encuentre la forma general de una ecuación diferencial lineal *a)* de segundo orden y *b)* de primer orden.

a) Para una ecuación diferencial de segundo orden, *(8.1)* se convierte en

$$b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x)$$

Si $b_2(x) \neq 0$, podemos dividir la última expresión entre este coeficiente, en cuyo caso *(8.3)* toma la forma

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = \phi(x)$$

b) Para una ecuación diferencial de primer orden, (*8.1*) se convierte en

$$b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x)$$

Si $b_1(x) \neq 0$, podemos dividir la última ecuación entre este coeficiente, en cuyo caso (*8.3*) asume la forma

$$y' + a_0(x)y = \phi(x)$$

Esta última ecuación es idéntica a (*6.1*) con $p(x) = a_0(x)$ y $q(x) = \phi(x)$

8.5. Encuentre el Wronskiano del conjunto $\{e^x, e^{-x}\}$.

$$W(e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ \dfrac{de^x}{dx} & \dfrac{de^{-x}}{dx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}$$

$$= e^x(-e^{-x}) - e^{-x}(e^x) = -2$$

8.6. Encuentre el Wronskiano del conjunto $\{\operatorname{sen} 3x, \cos 3x\}$.

$$W(\operatorname{sen} 3x, \cos 3x) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} 3x & \cos 3x \\ \dfrac{d(\operatorname{sen} 3x)}{dx} & \dfrac{d(\cos 3x)}{dx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} 3x & \cos 3x \\ 3\cos 3x & -3\operatorname{sen} 3x \end{vmatrix}$$

$$= -3(\operatorname{sen}^2 3x + \cos^2 3x) = -3$$

8.7. Encuentre el Wronskiano del conjunto $\{x, x^2, x^3\}$.

$$W(x, x^2, x^3) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ \dfrac{d(x)}{dx} & \dfrac{d(x^2)}{dx} & \dfrac{d(x^3)}{dx} \\ \dfrac{d^2(x)}{dx^2} & \dfrac{d^2(x^2)}{dx} & \dfrac{d^2(x^3)}{dx^2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3$$

Este ejemplo demuestra que el Wronskiano es en general una función no constante.

8.8. Encuentre el Wronskiano del conjunto $\{1 - x, 1 + x, 1 - 3x\}$.

$$W(1-x, 1+x, 1-3x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 1-3x \\ \dfrac{d(1-x)}{dx} & \dfrac{d(1+x)}{dx} & \dfrac{d(1-3x)}{dx} \\ \dfrac{d^2(1-x)}{dx^2} & \dfrac{d^2(1+x)}{dx^2} & \dfrac{d^2(1-3x)}{dx^2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 1-3x \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

8.9. Determine si el conjunto $\{e^x, e^{-x}\}$ es linealmente dependiente en $(-\infty, \infty)$.

El Wronskiano de este conjunto se encontró en el problema 8.5 y resultó ser -2. Puesto que es distinto de cero para al menos un punto en el intervalo de interés (de hecho, es distinto de cero en cada punto del intervalo) tenemos, a partir del teorema 8.3, que el conjunto es linealmente independiente.

8.10. Vuelva a hacer el problema 8.9 probando directamente cómo se satisface la ecuación (*8.7*).

Considere la ecuación

$$c_1e^x + c_2e^{-x} \equiv 0 \tag{1}$$

Debemos determinar si existen valores de c_1 y c_2, *ambos distintos de cero*, que satisfagan (*1*). Volviendo a escribir (*1*), tenemos que $c_2e^{-x} \equiv -c_1e^x$ o bien

$$c_2 \equiv -c_1e^{2x} \tag{2}$$

Para cualquier valor de c_1 distinto de cero, el lado izquierdo de (*2*) es una constante, mientras que el lado derecho no lo es; por lo tanto, la igualdad en (*2*) no es válida. Luego, la *única* solución para (*2*), y por lo tanto para (*1*), es $c_1 = c_2 = 0$. De este modo, el conjunto no es linealmente dependiente; es, en cambio, linealmente independiente.

8.11. ¿Es el conjunto $\{x^2,\ x,\ 1\}$ linealmente dependiente en $(-\infty, \infty)$?

El Wronskiano de este conjunto se encontró en el problema 8.7 y resultó ser $2x^3$. Dado que es distinto de cero para al menos un punto en el intervalo de interés (en particular, en $x = 3$, $W = 54 \neq 0$), a partir del teorema 8.3 tenemos que el conjunto es linealmente independiente.

8.12. Vuelva a hacer el problema 8.11 comprobando directamente cómo se satisface la ecuación (*8.7*).

Considere la ecuación

$$c_1x^2 + c_2x + c_3 \equiv 0 \tag{1}$$

Como esta ecuación es válida para toda x sólo si $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, el conjunto dado es linealmente independiente. Obsérvese que si cualquiera de los valores de c fuera distinto de cero, entonces la ecuación cuadrática (*1*) podría tener cuando mucho dos valores de x, las raíces de la ecuación, *y no para toda x*.

8.13. Determine si el conjunto $\{1-x,\ 1+x,\ 1-3x\}$ es linealmente dependiente en $(-\infty, \infty)$.

El Wronskiano de este conjunto se encontró en el problema 8.8 y resultó idéntico a cero. En este caso, el teorema 8.3 no proporciona ninguna información y debemos probar directamente cómo se satisface la ecuación (*8.7*).

Considere la ecuación

$$c_1(1-x) + c_2(1+x) + c_3(1-3x) \equiv 0 \tag{1}$$

que se puede reescribir como

$$(-c_1 + c_2 - 3c_3)x + (c_1 + c_2 + c_3) \equiv 0$$

Esta ecuación lineal se puede satisfacer para toda x sólo si ambos coeficientes son cero. De este modo,

$$-c_1 + c_2 - 3c_3 = 0 \quad \text{y} \quad c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones simultáneamente, encontramos que $c_1 = -2c_3$, $c_2 = c_3$, con c_3 arbitraria. Escogiendo $c_3 = 1$ (se podría hacer con cualquier otro número distinto de cero), obtenemos $c_1 = -2$, $c_2 = 1$ y $c_3 = 1$ como un conjunto de constantes, distintas de cero, que satisfacen (*1*). De este modo, el conjunto de funciones dado es linealmente dependiente.

8.14. Vuelva a hacer el problema 8.13, sabiendo que las tres funciones del conjunto dado son soluciones para la ecuación diferencial $y'' = 0$.

El Wronskiano es idéntico a cero y todas las funciones del conjunto dado son soluciones para la misma ecuación diferencial lineal, de modo que, a partir del teorema 8.3, el conjunto es linealmente dependiente.

8.15. Encuentre la solución general de $y'' + 9y = 0$ si se sabe que dos soluciones son

$$y_1(x) = \operatorname{sen} 3x \quad \text{y} \quad y_2(x) = \cos 2x$$

El Wronskiano de las dos soluciones se halló en el problema 8.6 como –3, que es distinto de cero en cualquier lugar. Tenemos, primero del teorema 8.3, que las dos soluciones son linealmente independientes y, luego del teorema 8.2, tenemos que la solución general es

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 2x$$

8.16. Encuentre la solución general de $y'' - y = 0$ si se sabe que dos soluciones son

$$y_1(x) = e^x \quad \text{y} \quad y_2(x) = e^{-x}$$

Se demostró, tanto en el problema 8.9 como en el 8.10, que estas dos funciones son linealmente independientes. Se sigue entonces del teorema 8.2, que la solución general es

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

8.17. Dos soluciones de $y'' - 2y' + y = 0$ son e^{-x} y $5e^{-x}$. ¿Es la solución general $y = c_1 e^{-x} + c_2 5e^{-x}$?

Calculamos

$$W(e^{-x}, 5e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^{-x} & 5e^{-x} \\ -e^{-x} & -5e^{-x} \end{vmatrix} \equiv 0$$

Por lo tanto, las funciones e^{-x} y $5e^{-x}$ son linealmente dependientes (véase teorema 8.3) y, del teorema 8.2, concluimos que $y = c_1 e^{-x} + c_2 5e^{-x}$ *no* es la solución general.

8.18. Dos soluciones de $y'' - 2y' + y = 0$ son e^x y xe^x. ¿Es la solución general $y = c_1 e^x + c_2 xe^x$?

Tenemos

$$W(e^x, xe^x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x} \not\equiv 0$$

Tenemos, primero del teorema 8.3, que las dos soluciones particulares son linealmente independientes y luego del problema 8.2, vemos que la solución general es

$$y = c_1 e^x + c_2 xe^x$$

8.19. Tres soluciones de $y''' = 0$ son x^2, x y 1. ¿Es la solución general $y = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$?

Sí. Ya se demostró en los problemas 8.11 y 8.12 que las tres soluciones son linealmente independientes, de modo que el resultado es inmediato del teorema 8.3.

8.20. Dos soluciones de $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ son e^x y e^{2x}. ¿Es la solución general $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$?

No, el teorema 8.2 establece que la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de *tercer* orden es una combinación de *tres* soluciones linealmente independientes, no dos.

8.21 Utilice los resultados del problema 8.16 para hallar la solución general de

$$y'' - y = 2 \operatorname{sen} x$$

si se sabe que $-\operatorname{sen} x$ es una solución particular.

Sabemos que $y_p = -\operatorname{sen} x$ y del problema 8.16 conocemos que la solución general para la ecuación diferencial homogénea asociada es $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Del teorema 8.4, tenemos que la solución para la ecuación diferencial homogénea dada es

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \operatorname{sen} x$$

8.22. Use los resultados del problema 8.18 para encontrar la solución general de

$$y'' - 2y' + y = x^2$$

si se sabe que $x^2 + 4x + 6$ es una solución particular.

Del problema 8.18, tenemos que la solución general para la ecuación diferencial homogénea asociada es

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

Dado que sabemos que $y_p = x^2 + 4x + 6$, tenemos, del teorema 8.4, que

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 x e^x + x^2 + 4x + 6$$

8.23. Utilice los resultados del problema 8.18 para encontrar la solución general de

$$y'' - 2y' + y = e^{3x}$$

si se sabe que $\frac{1}{4}e^{3x}$ es una solución particular.

Del problema 8.18 tenemos que la solución general para la ecuación diferencial homogénea asociada es

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

Además, sabemos que $y_p = \frac{1}{4}e^{3x}$. Del teorema 8.4, directamente tenemos que

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{4}e^{3x}$$

8.24. Determine si el conjunto $\{x^3, |x^3|\}$ es linealmente dependiente en $[-1, 1]$.

Considere la ecuación

$$c_1 x^3 + c_2 |x^3| \equiv 0 \tag{1}$$

Recuerde que $|x^3| = x^3$ si $x \geq 0$ y $|x^3| = -x^3$ si $x < 0$. De este modo, cuando $x \geq 0$, (*1*) se convierte en

$$c_1 x^3 + c_2 x^3 \equiv 0 \tag{2}$$

mientras que cuando $x < 0$, (*1*) se convierte en

$$c_1 x^3 - c_2 x^3 \equiv 0 \tag{3}$$

Resolviendo (*2*) y (*3*) simultáneamente para c_1 y c_2, encontramos que la *única* solución es $c_1 = c_2 = 0$. El conjunto dado es, por lo tanto, linelamente independiente.

8.25. Encuentre $W(x^3, |x^3|)$ en $[-1, 1]$.

Tenemos

$$|x^3| = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \frac{d(|x^3|)}{dx} = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -3x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Entonces, para $x > 0$,

$$W(x^3, |x^3|) = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} \equiv 0$$

Para $x < 0$,

$$W(x^3, |x^3|) = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} \equiv 0$$

Para $x = 0$,

$$W(x^3, |x^3|) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

De este modo, $W(x^3, |x^3| \equiv 0$ en $[-1,1]$.

8.26. ¿Contradicen los resultados de los problemas 8.24 y 8.25 al teorema 8.3?

No, pues el Wronskiano de dos funciones linealmente independientes es idéntico a cero. Del teorema 8.3 tenemos que estas dos funciones, x^3 y $|x^3|$, *no* son ambas soluciones para la *misma* ecuación diferencial lineal homogénea de la forma $\mathbf{L}(y) = 0$.

8.27. Dos soluciones de $y'' - (2/x)y' = 0$ en $[-1, 1]$ son $y = x^3$ y $y = |x^3|$. ¿Contradice este resultado la solución del problema 8.26?

No, aunque tanto $W(x^3, |x^3|) \equiv 0$ como ambas $y = x^3$ y $y = |x^3|$, son soluciones linealmente independientes para la misma ecuación diferencial lineal homogénea $y'' - (2/x)y' = 0$, esta ecuación diferencial no es de la forma $\mathbf{L}(y) = 0$. El coeficiente $-2/x$ es discontinuo en $x = 0$.

8.28. El problema de valor inicial $y' = 2\sqrt{|y|}$; $y(0) = 0$ tiene las dos soluciones $y = x|x|$ y $y \equiv 0$. ¿Viola este resultado el teorema 8.1?

No, aquí $\phi = 2\sqrt{|y|}$, que depende de y; por lo tanto, la ecuación diferencial no es lineal, y el teorema 8.1 no se aplica.

8.29. Determine todas las soluciones del problema de valor inicial $y'' + e^x y' + (x+1)y = 0$; $y(1) = 0, y'(1) = 0$.

Aquí, $b_2(x) = 1$, $b_1(x) = e^x$, $b_0(x) = x + 1$ y $g(x) \equiv 0$ satisfacen las hipótesis del teorema 8.1; por eso, la solución para el problema de valor inicial es única. Por medio de la inspección, $y \equiv 0$ es una solución. Luego, $y \equiv 0$ es la única solución.

8.30. Demuestre que el operador de segundo orden $\mathbf{L}(y)$ es lineal; es decir,

$$\mathbf{L}(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1\mathbf{L}(y_1) + c_2\mathbf{L}(y_2)$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias y y_1 y y_2 son funciones arbitrarias derivables n veces.

En general,

$$\mathbf{L}(y) = y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

De este modo,

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(c_1y_1 + c_2y_2) &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + a_1(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + a_0(x)(c_1y_1 + c_2y_2)\\ &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + a_1(x)c_1y_1' + a_1(x)c_2y_2' + a_0(x)c_1y_1 + a_0(x)c_2y_2\\ &= c_1\left[y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1\right] + c_2\left[y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2\right]\\ &= c_1\mathbf{L}(y_1) + c_2\mathbf{L}(y_2)\end{aligned}$$

8.31. Pruebe el *principio de superposición* para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas; es decir, si y_1 y y_2 son dos soluciones de $\mathbf{L}(y) = 0$, entonces $c_1y_1 + c_2y_2$ es también una solución de $\mathbf{L}(y) = 0$ para cualquiera de las dos constantes c_1 y c_2.

Tomando y_1 y y_2 como las soluciones de $\mathbf{L}(y) = 0$; es decir, $\mathbf{L}(y_1) = 0$ y $\mathbf{L}(y_2) = 0$. Usando los resultados del problema 8.30, tenemos que

$$\mathbf{L}(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1\mathbf{L}(y_1) + c_2\mathbf{L}(y_2) = c_1(0) + c_2(0) = 0$$

De este modo, $c_1y_1 + c_2y_2$ es también una solución para $\mathbf{L}(y) = 0$.

8.32. Pruebe el teorema 8.4.

Dado que $\mathbf{L}(y_h) = 0$ y $\mathbf{L}(y_p) = \phi(x)$, a partir de la linealidad de $\mathbf{L}$ tenemos que

$$\mathbf{L}(y) = \mathbf{L}(y_h + y_p) = \mathbf{L}(y_h) + \mathbf{L}(y_p) = 0 + \phi(x) = \phi(x)$$

De este modo, y es una solución.

Para probar que ésta es la solución general, debemos demostrar que cada solución de $\mathbf{L}(y)=\phi(x)$ es de la forma (*8.9*). Tomemos a y como cualquier solución de $\mathbf{L}(y)=\phi(x)$ y coloquemos $z=y-y_p$. Entonces

$$\mathbf{L}(z)=\mathbf{L}(y-y_p)=\mathbf{L}(y)-\mathbf{L}(y_p)=\phi(x)-\phi(x)=0$$

de modo que z es una solución para la ecuación homogénea $\mathbf{L}(y)=0$. Dado que $z = y - y_p$, tenemos que $y=z+y_p$, donde z es una solución de $\mathbf{L}(y)=0$.

PROBLEMAS ADICIONALES

8.33. Determine cuáles de las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales:

a) $y''+xy'+2y=0$

b) $y'''-y=x$

c) $y'+5y=0$

d) $y^{(4)}+x^2y'''+xy''-e^xy'+2y=x^2+x+1$

e) $y''+2xy'+y=4xy^2$

f) $y'-2y=xy$

g) $y''+yy'=x^2$

h) $y'''+(x^2-1)y''-2y'+y=5\operatorname{sen}x$

i) $y'+y(\operatorname{sen}x)=x$

j) $y'+x(\operatorname{sen}y)=x$

k) $y''+e^y=0$

l) $y''+e^x=0$

8.34. Determine cuáles de las ecuaciones diferenciales del problema 8.33 son homogéneas.

8.35. Determine cuáles de las ecuaciones diferenciales del problema 8.33 tienen coeficientes constantes.

En los problemas del 8.36 al 8.49, encuentre el Wronskiano de los conjuntos de funciones y, donde sea apropiado, utilizar la información para determinar si los conjuntos dados son linealmente independientes.

8.36. $\{3x, 4x\}$

8.37. $\{x^2, x\}$

8.38. $\{x^3, x^2\}$

8.39. $\{x^3, x\}$

8.40. $\{x^2, 5\}$

8.41. $\{x^2, -x^2\}$

8.42. $\{e^{2x}, e^{-2x}\}$

8.43. $\{e^{2x}, e^{3x}\}$

8.44. $\{3e^{2x}, 5e^{2x}\}$

8.45. $\{x, 1, 2x-7\}$

8.46. $\{x+1, x^2+x, 2x^2-x-3\}$

8.47. $\{x^2, x^3, x^4\}$

8.48. $\{e^{-x}, e^x, e^{2x}\}$

8.49. $\{\operatorname{sen}x, 2\cos x, 3\operatorname{sen}x+\cos x\}$

8.50. Pruebe directamente que el conjunto dado en el problema 8.36 es linealmente dependiente.

8.51. Pruebe directamente que el conjunto dado en el problema 8.41 es linealmente dependiente.

8.51. Pruebe directamente que el conjunto dado en el problema 8.44 es linealmente dependiente.

8.53. Pruebe directamente que el conjunto dado en el problema 8.45 es linealmente dependiente.

8.54. Pruebe directamente que el conjunto dado en el problema 8.46 es linealmente dependiente.

8.55. Pruebe directamente que el conjunto dado en el problema 8.49 es linealmente dependiente.

8.56. Utilizando los resultados del problema 8.42 construya la solución general de $y''-4y=0$.

8.57. Usando los resultados del problema 8.43 construya la solución general de $y''-5y'+6y=0$.

8.58. ¿Qué se puede decir acerca de la solución general de $y'' + 16y = 0$ si se sabe que dos soluciones particulares son $y_1 = \text{sen } 4x$ y $y_2 = \cos 4x$?

8.59. ¿Qué se puede decir acerca de la solución general de $y'' - 8y' = 0$ si se sabe que dos soluciones particulares son $y_1 = e^{8x}$ y $y_2 = 1$?

8.60. ¿Qué se puede decir acerca de la solución general de $y'' + y' = 0$ si se sabe que dos soluciones particulares son $y_1 = 8$ y $y_2 = 1$?

8.61. ¿Qué se puede decir acerca de la solución general de $y''' - y'' = 0$ si se sabe que dos soluciones particulares son $y_1 = x$ y $y_2 = e^x$?

8.62. ¿Qué se puede decir acerca de la solución general de $y''' + y'' + y' + y = 0$ si se sabe que tres soluciones particulares son las funciones dadas en el problema 8.49?

8.63. ¿Qué se puede decir acerca de la solución general de $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ si se sabe que tres soluciones particulares son las funciones dadas en el problema 8.48?

8.64. ¿Qué se puede decir acerca de la solución general de $d^5y/dx^5 = 0$ si se sabe que tres soluciones particulares son las funciones dadas en el problema 8.47?

8.65. Encuentre la solución general de $y'' + y = x^2$, si una solución es $y = x^2 - 2$, y si dos soluciones de $y'' + y = 0$ son sen x y cos x.

8.66. Encuentre la solución general de $y'' - y = x^2$, si una solución es $y = -x^2 - 2$, y si dos soluciones de $y'' - y = 0$ son e^x y $3e^x$.

8.67. Encuentre la solución general de $y''' - y'' - y' + y = 5$, si una solución es $y = 5$, y si tres soluciones de $y''' - y'' - y' + y = 0$ son e^x, e^{-x} y xe^x.

8.68. El problema del valor inicial $y' - (2/x)y = 0; y(0) = 0$ tiene dos soluciones $y \equiv 0$ y $y = x^2$. ¿Por qué este resultado no viola el teorema 8.1?

8.69. ¿Se aplica el teorema 8.1 en el problema de valor inicial $y' - (2/x)y = 0; y(1) = 3$?

8.70. El problema de valor inicial $xy' - 2y = 0; y(0) = 0$ tiene dos soluciones $y \equiv 0$ y $y = x^2$. ¿Por qué este resultado no viola el teorema 8.1?

\

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

9

COMENTARIO INTRODUCTORIO

Hasta aquí nos hemos concentrado en las ecuaciones diferenciales de primer orden. Ahora dirigiremos nuestra atención sobre el caso de segundo orden. Después de investigar las técnicas de solución discutiremos la aplicación de estas ecuaciones diferenciales (véase capítulo 14).

LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

Correspondiéndose con la ecuación diferencial

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{9.1}$$

en la cual a_1 y a_0 son constantes, está la ecuación algebraica

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{9.2}$$

que se obtiene de la ecuación (*9.1*) reemplazando y'', y' y y por λ^2, λ^1 y $\lambda^0 = 1$, respectivamente. La ecuación (*9.2*) se llama *ecuación característica* de (*9.1*).

EJEMPLO 9.1. La ecuación característica de $y'' + 3y' - 4y = 0$ es $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$; la ecuación característica de $y'' - 2y' + y = 0$ es $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$.

Las ecuaciones características para ecuaciones diferenciales que tienen variables dependientes distintas que y se obtienen análogamente, reemplazando la j-ésima derivada de la variable dependiente por medio de λ^j ($j = 0, 1, 2$).

La ecuación característica se puede factorizar así

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0 \tag{9.3}$$

LA SOLUCIÓN GENERAL

La solución general de (*9.1*) se obtiene directamente a partir de las raíces de (*9.3*). Los siguientes son tres casos a considerar:

Caso 1. λ_1 y λ_2 son tanto reales como distintas. Dos soluciones linealmente independientes son $e^{\lambda_1 x}$ y $e^{\lambda_2 x}$, y la solución general es (teorema 8.2)

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{9.4}$$

En el caso especial $\lambda_2 = -\lambda_1$, la solución (*9.4*) se puede volver a escribir como $y = k_1 \cosh \lambda_1 x + k_2 \operatorname{senh} \lambda_1 x$.

Caso 2. $\lambda_1 = a + ib$, un número complejo. Dado que a_1 y a_0 en (*9.1*) y (*9.2*) se asumen como reales, las raíces de (*9.2*) deben aparecer en pares conjugados; de este modo, la otra raíz es $\lambda_2 = a - ib$. Dos soluciones linealmente independientes son $e^{(b+ib)x}$ y $e^{(a-ib)x}$ y la solución general como variable compleja es

$$y = d_1 e^{(a+ib)x} + d_2 e^{(a+ib)x} \tag{9.5}$$

que es algebraicamente equivalente a (véase problema 9.16)

$$y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \operatorname{sen} bx \tag{9.6}$$

Caso 3. $\lambda_1 = \lambda_2$. Dos soluciones linealmente independientes son $e^{\lambda_1 x}$ y $xe^{\lambda_1 x}$, y la solución general es

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} \tag{9.7}$$

Advertencia: Las soluciones anteriores *no son válidas* si la ecuación diferencial no es lineal o no tiene coeficientes constantes. Considérese, por ejemplo, la ecuación $y'' - x^2 y = 0$. Las raíces de la ecuación característica son $\lambda_1 = x$ y $\lambda_2 = -x$, pero la solución *no* es

$$y = c_1 e^{(x)x} + c_2 e^{(-x)x} = c_1 e^{x^2} + c_2 e^{-x^2}$$

Las ecuaciones lineales con coeficientes variables se consideran en los capítulos 27, 28 y 29.

PROBLEMAS RESUELTOS

9.1. Resuelva $y'' - y' - 2y = 0$.

La ecuación característica es $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, que se puede factorizar en $(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$. Dado que las raíces $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$ son reales y distintas, la solución está dada por (*9.4*) como

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

9.2. Resuelva $y'' - 7y' = 0$.

La ecuación característica es $\lambda^2 - 7\lambda = 0$, que se puede factorizar en $(\lambda - 0)(\lambda - 7) = 0$. Como las raíces $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 7$ son reales y distintas, la solución está dada por (*9.4*) como

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{7x} = c_1 + c_2 e^{7x}$$

9.3. Resuelva $y''-5y=0$.

La ecuación característica es $\lambda^2-5=0$, que se puede factorizar en $(\lambda-\sqrt{5})(\lambda+\sqrt{5})=0$. Dado que las raíces $\lambda_1=\sqrt{5}$ y $\lambda_2=-\sqrt{5}$ son reales y distintas, la solución está dada por (*9.4*) así

$$y=c_1e^{\sqrt{5}x}+c_2e^{-\sqrt{5}x}$$

9.4. Vuelva a escribir el problema 9.3 en términos de funciones hiperbólicas.

Utilizando los resultados del problema 9.3 con las identidades

$$e^{\lambda x}=\cosh\lambda x+\operatorname{senh}\lambda x \quad \text{y} \quad e^{-\lambda x}=\cosh\lambda x-\operatorname{sen}\lambda x$$

obtenemos

$$\begin{aligned} y&=c_1e^{\sqrt{5}x}+c_2e^{-\sqrt{5}x}\\ &=c_1(\cosh\sqrt{5}x+\operatorname{senh}\sqrt{5}x)+c_2(\cosh\sqrt{5}x-\operatorname{senh}\sqrt{5}x)\\ &=(c_1+c_2)\cosh\sqrt{5}x+(c_1-c_2)\operatorname{senh}\sqrt{5}x\\ &=k_1\cosh\sqrt{5}x+k_2\operatorname{senh}\sqrt{5}x \end{aligned}$$

donde $k_1=c_1$ y $k_2=c_1-c_2$.

9.5. Resuelva $\ddot{y}+10\dot{y}+21y=0$.

Aquí la variable independiente es t. La ecuación característica es

$$\lambda^2+10\lambda+21=0$$

que puede ser factorizada así

$$(\lambda+3)(\lambda+7)=0$$

Las raíces $\lambda_1=-3$ y $\lambda_2=-7$ son reales y distintas, así que la solución general es

$$y=c_1e^{-3t}+c_2e^{-7t}$$

9.6. Resuelva $\ddot{x}-0.01x=0$.

La ecuación característica es

$$\lambda^2-0.01=0$$

que puede ser factorizada así

$$(\lambda-0.1)(\lambda+0.1)=0$$

Las raíces $\lambda_1=0.1$ y $\lambda_2=-0.1$ son reales y distintas, de modo que la solución general es

$$y=c_1e^{0.1t}+c_2e^{-0.1t}$$

o, de manera equivalente,

$$y=k_1\cosh 0.1t+k_2\operatorname{senh} 0.1t$$

9.7. Resuelva $y''+4y'+5y=0$.

La ecuación característica es

$$\lambda^2+4\lambda+5=0$$

Usando la fórmula cuadrática encontramos que sus raíces son

$$\lambda = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(5)}}{2} = -2 \pm i$$

Estas raíces son un par complejo conjugado, de modo que la solución está dada por (9.6) (con $a = -2$ y $b = 1$) como

$$y = c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \operatorname{sen} x$$

9.8. Resuelva $y'' + 4y = 0$.

La ecuación característica es

$$\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

que se puede factorizar en

$$(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0$$

Estas raíces son un par complejo conjugado, de manera que la solución general está dada por (9.6) (con $a = 0$ y $b = 2$) como

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$$

9.9. Resuelva $y'' - 3y' + 4y = 0$.

La ecuación característica es

$$\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0$$

Utilizando la fórmula cuadrática encontramos que sus raíces son

$$\lambda = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(4)}}{2} = \frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Estas raíces son un par complejo conjugado, de modo que la solución general está dada por (9.6) como

$$y = c_1 e^{(3/2)x} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + c_2 e^{(3/2)x} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{7}}{2} x$$

9.10. Resuelva $\ddot{y} - 6\dot{y} + 25y = 0$.

La ecuación característica es

$$\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0$$

Usando la fórmula cuadrática encontramos que sus raíces son

$$\lambda = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(25)}}{2} = 3 \pm i4$$

Estas raíces son un par conjugado complejo, de modo que la solución general es

$$y = c_1 e^{3t} \cos 4t + c_2 e^{3t} \operatorname{sen} 4t$$

9.11. Resuelva $\dfrac{d^2I}{dt^2} + 20\dfrac{dI}{dt} + 200I = 0$.

La ecuación característica es

$$\lambda^2 - 20\lambda + 200 = 0$$

Utilizando la fórmula cuadrática encontramos que sus raíces son

$$\lambda = \frac{-(20) \pm \sqrt{(20)^2 - 4(200)}}{2} = -10 \pm i10$$

Estas raíces son un par complejo conjugado, de modo que la solución general es

$$I = c_1 e^{-10t} \cos 10t + c_2 e^{-10t} \operatorname{sen} 10t$$

9.12. Resuelva $y'' - 8y' + 16y = 0$.

La ecuación característica es

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$$

que se puede factorizar en

$$(\lambda - 4)^2 = 0$$

Las raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ son reales e iguales, de modo que la solución general está dada por (*9.7*) como

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$$

9.13. Resuelva $y'' = 0$.

La ecuación característica es $\lambda^2 = 0$, que tiene raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La solución está dada por (*9.7*) como

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} = c_1 + c_2 x$$

9.14. Resuelva $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$.

La ecuación característica es

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

que se puede factorizar en

$$(\lambda + 2)^2 = 0$$

Las raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ son reales e iguales, de manera que la solución general es

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$$

9.15. Resuelva $100\dfrac{d^2N}{dt^2} - 20\dfrac{dN}{dt} + N = 0$.

Dividiendo ambos lados de la ecuación por 100, para forzar que el coeficiente de la mayor derivada sea la unidad, obtenemos

$$\frac{d^2N}{dt^2} - 0.2\frac{dN}{dt} + 0.01N = 0$$

Su ecuación característica es

$$\lambda^2 - 0.2\lambda + 0.01 = 0$$

que se puede factorizar en

$$(\lambda - 0.1)^2 = 0$$

Las raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$ son reales e iguales, de modo que la solución general es

$$N = c_1 e^{-0.1t} + c_2 t e^{-0.1t}$$

9.16. Pruebe que (*9.6*) es algebraicamente equivalente a (*9.5*).

Usando las relaciones de Euler

$$e^{ibx} = \cos bx + i \operatorname{sen} bx \quad e^{-ibx} = \cos bx - i \operatorname{sen} bx$$

podemos reescribir (*9.5*) como

$$\begin{aligned} y &= d_1 e^{ax} e^{ibx} + d_2 e^{ax} e^{-ibx} = e^{ax}(d_1 e^{ibx} + d_2 e^{ibx}) \\ &= e^{ax}\left[d_1(\cos bx + i \operatorname{sen} bx) + d_2(\cos bx - i \operatorname{sen} bx)\right] \\ &= e^{ax}\left[(d_1 + d_2)\cos bx + i(d_1 - d_2)\operatorname{sen} bx\right] \\ &= c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \operatorname{sen} bx \qquad (1) \end{aligned}$$

donde $c_1 = d_1 + d_2$ y $c_2 = i(d_1 - d_2)$.

La ecuación (*1*) es real sólo si c_1 y c_2 son ambas reales, lo cual ocurre, si y sólo si d_1 y d_2 son complejos conjugados. Dado que estamos interesados en la solución general *real* para (*9.1*), nos restringimos a d_1 y d_2 para ser un par conjugado.

PROBLEMAS ADICIONALES

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

9.17. $y'' - y = 0$

9.18. $y'' - y' - 30y = 0$

9.19. $y'' - 2y' + y = 0$

9.20. $y'' + y = 0$

9.21. $y'' + 2y' + 2y = 0$

9.22. $y'' - 7y = 0$

9.23. $y'' + 6y' + 9y = 0$

9.24. $y'' + 2y' + 3y = 0$

9.25. $y'' - 3y' - 5y = 0$

9.26. $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$

9.27. $\ddot{x} - 20\dot{x} + 64x = 0$

9.28. $\ddot{x} + 60\dot{x} + 500x = 0$

9.29. $\ddot{x} - 3\dot{x} + x = 0$

9.30. $\ddot{x} - 10\dot{x} + 25x = 0$

9.31. $\ddot{x} + 25x = 0$

9.32. $\ddot{x} + 25\dot{x} = 0$

9.33. $\ddot{x} + \dot{x} + 2x = 0$

9.34. $\ddot{u} - 2\dot{u} + 4u = 0$

9.35. $\ddot{u} - 4\dot{u} + 2u = 0$

9.36. $\ddot{u} - 36\dot{u} = 0$

9.37. $\ddot{u} - 36u = 0$

9.38. $\dfrac{d^2Q}{dt^2} - 5\dfrac{dQ}{dt} + 7Q = 0$

9.39. $\dfrac{d^2Q}{dt^2} - 7\dfrac{dQ}{dt} + 5Q = 0$

9.40. $\dfrac{d^2P}{dt^2} - 18\dfrac{dP}{dt} + 81P = 0$

9.41. $\dfrac{d^2P}{dx^2} + 2\dfrac{dP}{dx} + 9P = 0$

9.42. $\dfrac{d^2N}{dx^2} + 5\dfrac{dN}{dx} - 24N = 0$

9.43. $\dfrac{d^2N}{dx^2} + 5\dfrac{dN}{dx} + 24N = 0$

9.44. $\dfrac{d^2T}{d\theta^2} + 30\dfrac{dT}{d\theta} + 225T = 0$

9.45. $\dfrac{d^2R}{d\theta^2} + 5\dfrac{dR}{d\theta} = 0$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS DE n-ÉSIMO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

10

LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

La ecuación característica de la ecuación diferencial

$$y^{(n)}a_{n-1}y(n-1)+\cdots+a_1y'+a_0y=0 \tag{10.1}$$

con coeficientes constantes $a_j\,(j=0,1,\ldots,n-1)$ es

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0 \tag{10.2}$$

La ecuación característica (*10.2*) se obtiene de (*10.1*) reemplazando $y^{(j)}$ por $\lambda^j\,(j=0,1,\ldots,n-1)$. Las ecuaciones características para ecuaciones diferenciales que tienen variables dependientes distintas de y se obtienen análogamente, reemplazando la j-ésima derivada de la variable dependiente por $\lambda^j\,(j=0,1,\ldots,n-1)$.

EJEMPLO 10.1. La ecuación característica de $y^{(4)}-3y'''+2y''-y=0$ es $\lambda^4-3\lambda^3+2\lambda^2-1=0$. La ecuación característica de

$$\frac{d^5x}{dt^5}-3\frac{d^3x}{dt^3}+5\frac{dx}{dt}-7x=0$$

es

$$\lambda^5-3\lambda^3+5\lambda-7=0$$

Precaución: Las ecuaciones características sólo están definidas para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes.

LA SOLUCIÓN GENERAL

Las raíces de una ecuación característica determinan la solución de (*10.1*). Si las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son todas reales y distintas, la solución es

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x} \tag{10.3}$$

Si las raíces son distintas, pero algunas son complejas, entonces la solución nuevamente está dada por (*10.3*). Tal como en el capítulo 9, aquellos términos que implican exponentes complejos se pueden combinar para producir términos que impliquen senos y cosenos. Si λ_k es una raíz de multiplicidad p [es decir, si $(\lambda - \lambda_k)^p$ es un factor de la ecuación característica, pero $(\lambda - \lambda_k)^{p+1}$ no lo es] entonces habrá p soluciones linealmente independientes asociadas con λ_k dadas por $\lambda^{\lambda_k x}$, $xe^{\lambda_k x}$, $x^2 e^{\lambda_k x}, \ldots, x^{p-1} e^{\lambda_k x}$. Estas soluciones se combinan de la manera habitual con las soluciones asociadas con las otras raíces, para obtener la solución completa.

En teoría, siempre es posible factorizar la ecuación característica, pero en la práctica esto puede ser extremadamente difícil, en especial para ecuaciones diferenciales de alto orden. En tales casos se deben usar técnicas numéricas para aproximar las soluciones. Véanse capítulos 18, 19 y 20.

PROBLEMAS RESUELTOS

10.1. Resuelva $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

La ecuación característica es $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$, que se puede factorizar en

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

Las raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$; por lo tanto la solución es

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

10.2. Resuelva $y^{(4)} - 9y'' + 20y = 0$.

La ecuación característica es $\lambda^4 - 9\lambda^2 + 20 = 0$, que se puede factorizar en

$$(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - \sqrt{5})(\lambda + \sqrt{5}) = 0$$

Las raíces son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = \sqrt{5}$ y $\lambda_4 = -\sqrt{5}$; por lo tanto la solución es

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{\sqrt{5}x} + c_4 e^{-\sqrt{5}x} \\ &= k_1 \cosh 2x + k_2 \operatorname{senh} 2x + k_3 \cosh \sqrt{5}x + k_4 \operatorname{senh} \sqrt{5}x \end{aligned}$$

10.3. Resuelva $y' - 5y = 0$.

La ecuación característica es $\lambda - 5 = 0$, que tiene una única raíz $\lambda_1 = 5$. La solución es entonces $y = c_1 e^{5x}$. (Compare este resultado con el problema 6.9.)

10.4. Resuelva $y''' - 6y'' + 2y' + 36y = 0$.

La ecuación característica $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 2\lambda + 36 = 0$ tiene raíces $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4 - i\sqrt{2}$ y $\lambda_3 = 4 - i\sqrt{2}$. La solución es

$$y = c_1 e^{-2x} + d_2 e^{(4+i\sqrt{2})x} + d_3 e^{(4-i\sqrt{2})x}$$

que se puede volver a escribir, usando las relaciones de Euler (véase problema 9.16) como

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{4x} \cos \sqrt{2}x + c_3 e^{4x} \operatorname{sen} \sqrt{2}x$$

10.5. Resuelva $\dfrac{d^4x}{dt^4} - 4\dfrac{d^3x}{dt^3} + 7\dfrac{d^2x}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} + 6x = 0.$

La ecuación característica, $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda^2 - 4\lambda + 6 = 0$, tiene raíces $\lambda_1 = 2 + i\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 2 - i\sqrt{2}$, $\lambda_3 = i$ y $\lambda_4 = -i$. La solución es

$$x = d_1e^{(2+i\sqrt{2})t} + d_2e^{(2-i\sqrt{2})t} + d_3e^{it} + d_4e^{-it}$$

Si, utilizando las relaciones de Euler, combinamos los primeros dos términos y luego lo hacemos similarmente con los dos últimos términos, podemos volver a escribir la solución como

$$x = c_1e^{2t}\cos\sqrt{2}t + c_2e^{2x}\operatorname{sen}\sqrt{2}t + c_3\cos t + c_4\operatorname{sen} t$$

10.6. Resuelva $y^{(4)} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0.$

La ecuación característica $\lambda^4 + 8\lambda^3 + 24\lambda^2 + 32\lambda + 16 = 0$ se puede factorizar en $(\lambda + 2)^4 = 0$. Aquí $\lambda_1 = -2$ es una raíz de multiplicidad cuatro; de aquí, la solución es

$$y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + c_3x^2e^{-2x} + c_4x^3e^{-2x}$$

10.7. Resuelva $\dfrac{d^5P}{dt^5} - \dfrac{d^4P}{dt^4} - 2\dfrac{d^3P}{dt^3} + 2\dfrac{d^2P}{dt^2} + \dfrac{dP}{dt} - P = 0.$

La ecuación característica se puede factorizar en $(\lambda - 1)^3(\lambda + 1)^2 = 0$; por lo tanto, $\lambda_1 = 1$ es una raíz de multiplicidad tres y $\lambda_2 = -1$ es una raíz de multiplicidad dos. La solución es

$$P = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t + c_4e^{-t} + c_5te^{-t}$$

10.8. Resuelva $\dfrac{d^4Q}{dx^4} - 8\dfrac{d^3Q}{dx^3} + 32\dfrac{d^2Q}{dx^2} - 64\dfrac{dQ}{dx} + 64Q = 0.$

La ecuación característica tiene raíces $2 \pm i2$ y $2 \pm i2$; de aquí que $\lambda_1 = 2 + i2$ y $\lambda_2 = 2 - i2$ son ambas raíces de multiplicidad dos. La solución es

$$\begin{aligned} Q &= d_1e^{(2+i2)x} + d_{2x}xe^{(2+i2)x} + d_3e^{(2-i2)x} + d_4xe^{(2-i2)x} \\ &= e^{2x}(d_1e^{i2x} + d_3e^{-i2x}) + xe^{2x}(d_2e^{i2x} + d_4e^{-i2x}) \\ &= e^{2x}(c_1\cos 2x + c_3\operatorname{sen} 2x) + xe^{2x}(c_2\cos 2x + c_4\operatorname{sen} 2x) \\ &= (c_1 + c_2x)e^{2x}\cos 2x + (c_3 + c_4x)e^{2x}\operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

10.9. Encuentre la solución general para una ecuación diferencial lineal homogénea de cuarto orden para $y(x)$ con números reales como coeficientes si se sabe que una solución es x^3e^{4x}.

Si x^3e^{4x} es una solución, entonces también lo son x^2e^{4x}, xe^{4x} y e^{4x}. Ahora tenemos cuatro soluciones linealmente independientes para una ecuación diferencial lineal homogénea de cuarto orden, de modo que podemos escribir la solución general como

$$y(x) = c_4x^3e^{4x} + c_3x^2e^{4x} + c_2xe^{4x} + c_1e^{4x}$$

10.10. Determine la ecuación diferencial descrita en el problema 10.9.

La ecuación característica de una ecuación diferencial de cuarto orden es un polinomio de cuarto grado que tiene exactamente cuatro raíces. Como x^3e^{4x} es una solución, sabemos que $\lambda = 4$ es una raíz de multiplicidad cuatro de la ecuación característica correspondiente, de modo que la ecuación característica debe ser $(\lambda - 4)^4 = 0$, o bien

$$\lambda^4 - 16\lambda^3 + 96\lambda^2 - 256\lambda + 256 = 0$$

La ecuación diferencial asociada es

$$y^{(4)} - 16y''' + 96y'' - 256y' + 256y = 0$$

10.11. Encuentre la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de tercer orden para $y(x)$ con números reales como coeficientes si se sabe que dos soluciones son e^{-2x} y sen $3x$.

Si sen $3x$ es una solución, entonces también lo es cos $3x$. Junto con e^{-2x} tenemos tres soluciones linealmente independientes para una ecuación diferencial lineal homogénea de tercer orden, y podemos escribir la solución general como

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 \cos 3x + c_3 \operatorname{sen} 3x$$

10.12. Determine la ecuación diferencial descrita en el problema 10.11.

La ecuación característica de una ecuación diferencial de tercer orden debe tener tres raíces. Debido a que e^{-2x} y sen $3x$ son soluciones, sabemos que $\lambda = -2$ y $\lambda = \pm i3$ son raíces de la correspondiente ecuación característica, de modo que la ecuación debe ser

$$(\lambda + 2)(\lambda - i3)(\lambda + i3) = 0 \quad \text{o bien} \quad \lambda^3 + 2\lambda^2 + 9\lambda + 18 = 0$$

La ecuación diferencial asociada es

$$y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 0$$

10.13. Encuentre la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de sexto orden para $y(x)$ con números reales como coeficientes si se sabe que una solución es $x^2 e^{7x} \cos 5x$.

Si $x^2 e^{7x} \cos 5x$ es una solución, entonces $xe^{7x} \cos 5x$ y $e^{7x} \cos 5x$ también lo son. Además, como las raíces complejas de una ecuación característica vienen en pares conjugados, cada solución que contenga un término de coseno coincidirá con otra solución que contenga el término seno. En consecuencia, $x^2 e^{7x} \operatorname{sen} 5x$, $xe^{7x} \operatorname{sen} 5x$ y $e^{7x} \operatorname{sen} 5x$ son también soluciones. Ahora tenemos seis soluciones linealmente independientes para una ecuación diferencial lineal homogénea de sexto orden, de modo que podemos escribir la solución general como

$$y(x) = c_1 x^2 e^{7x} \cos 5x + c_2 x^2 e^{7x} \operatorname{sen} 5x + c_3 x e^{7x} \cos 5x + c_4 x e^{7x} \operatorname{sen} 5x + c_5 e^{7x} \cos 5x + c_6 e^{7x} \operatorname{sen} 5x$$

10.14. Vuelva a hacer el problema 10.13 si la ecuación diferencial tiene orden 8.

Una ecuación diferencial lineal de octavo orden posee ocho soluciones linealmente independientes, y dado que sólo podemos identificar seis de ellas, tal como lo hicimos en el problema 10.13, no contamos con suficiente información para resolver el problema. Podemos decir que la solución para el problema 10.13 será parte de la solución para el que nos ocupa.

10.15. Resuelva $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 4\dfrac{d^3y}{dx^3} - 5\dfrac{d^2y}{dx^2} + 36\dfrac{dy}{dx} - 36y = 0$ si una solución es xe^{2x}.

Si xe^{2x} es una solución, entonces e^{2x} también lo es, lo que implica que $(\lambda - 2)^2$ es un factor de la ecuación característica $\lambda^4 - 4\lambda^3 - 5\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$. Ahora,

$$\frac{\lambda^4 - 4\lambda^3 - 5\lambda^2 + 36\lambda - 36}{(\lambda - 2)^2} = \lambda^2 - 9$$

de modo que $\lambda = \pm 3$ son otras dos raíces de la ecuación característica, con sus correspondientes soluciones e^{3x} y e^{-3x}. Habiendo identificado cuatro soluciones linealmente independientes para la ecuación diferencial lineal de cuarto orden dada, podemos escribir la solución general como

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-3x}$$

La ecuación diferencial asociada es

$$y^{(4)} - 16y''' + 96y'' - 256y' + 256y = 0$$

10.11. Encuentre la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de tercer orden para $y(x)$ con números reales como coeficientes si se sabe que dos soluciones son e^{-2x} y sen $3x$.

Si sen $3x$ es una solución, entonces también lo es cos $3x$. Junto con e^{-2x} tenemos tres soluciones linealmente independientes para una ecuación diferencial lineal homogénea de tercer orden, y podemos escribir la solución general como

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 \cos 3x + c_3 \operatorname{sen} 3x$$

10.12. Determine la ecuación diferencial descrita en el problema 10.11.

La ecuación característica de una ecuación diferencial de tercer orden debe tener tres raíces. Debido a que e^{-2x} y sen $3x$ son soluciones, sabemos que $\lambda = -2$ y $\lambda = \pm i3$ son raíces de la correspondiente ecuación característica, de modo que la ecuación debe ser

$$(\lambda + 2)(\lambda - i3)(\lambda + i3) = 0 \quad \text{o bien} \quad \lambda^3 + 2\lambda^2 + 9\lambda + 18 = 0$$

La ecuación diferencial asociada es

$$y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 0$$

10.13. Encuentre la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de sexto orden para $y(x)$ con números reales como coeficientes si se sabe que una solución es x^2e^{7x} cos $5x$.

Si $x^2e^{7x} \cos 5x$ es una solución, entonces $xe^{7x} \cos 5x$ y $e^{7x} \cos 5x$ también lo son. Además, como las raíces complejas de una ecuación característica vienen en pares conjugados, cada solución que contenga un término de coseno coincidirá con otra solución que contenga el término seno. En consecuencia, $x^2e^{7x} \operatorname{sen} 5x$, $xe^{7x} \operatorname{sen} 5x$ y $e^{7x} \operatorname{sen} 5x$ son también soluciones. Ahora tenemos seis soluciones linealmente independientes para una ecuación diferencial lineal homogénea de sexto orden, de modo que podemos escribir la solución general como

$$y(x) = c_1x^2e^{7x} \cos 5x + c_2x^2e^{7x} \operatorname{sen} 5x + c_3xe^{7x} \cos 5x + c_4xe^{7x} \operatorname{sen} 5x + c_5e^{7x} \cos 5x + c_6e^{7x} \operatorname{sen} 5x$$

10.14. Vuelva a hacer el problema 10.13 si la ecuación diferencial tiene orden 8.

Una ecuación diferencial lineal de octavo orden posee ocho soluciones linealmente independientes, y dado que sólo podemos identificar seis de ellas, tal como lo hicimos en el problema 10.13, no contamos con suficiente información para resolver el problema. Podemos decir que la solución para el problema 10.13 será parte de la solución para el que nos ocupa.

10.15. Resuelva $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 4\dfrac{d^3y}{dx^3} - 5\dfrac{d^2y}{dx^2} + 36\dfrac{dy}{dx} - 36y = 0$ si una solución es xe^{2x}.

Si xe^{2x} es una solución, entonces e^{2x} también lo es, lo que implica que $(\lambda - 2)^2$ es un factor de la ecuación característica $\lambda^4 - 4\lambda^3 - 5\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$. Ahora,

$$\frac{\lambda^4 - 4\lambda^3 - 5\lambda^2 + 36\lambda - 36}{(\lambda - 2)^2} = \lambda^2 - 9$$

de modo que $\lambda = \pm 3$ son otras dos raíces de la ecuación característica, con sus correspondientes soluciones e^{3x} y e^{-3x}. Habiendo identificado cuatro soluciones linealmente independientes para la ecuación diferencial lineal de cuarto orden dada, podemos escribir la solución general como

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{3x} + c_4e^{-3x}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

En los problemas del 10.16 al 10.34, resuelva las ecuaciones diferenciales dadas.

10.16. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

10.17. $y''' - y'' - y' + y = 0$

10.18. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

10.19. $y''' - y'' + y' - y = 0$

10.20. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

10.21. $y^{(4)} - y = 0$

10.22. $y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = 0$

10.23. $y^{(4)} - 4y'' + 16y' + 32y = 0$

10.24. $y^{(4)} + 5y''' = 0$

10.25. $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$

10.26. $y^{(6)} - 5y^{(4)} + 16y''' + 36y'' - 16y' - 32y = 0$

10.27. $\dfrac{d^4x}{dt^4} + 4\dfrac{d^3x}{dt^3} + 6\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + x = 0$

10.28. $\dfrac{d^3x}{dt^3} = 0$

10.29. $\dfrac{d^4x}{dt^4} + 10\dfrac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$

10.30. $\dfrac{d^3x}{dt^3} - 5\dfrac{d^2x}{dt^2} + 25\dfrac{dx}{dt} - 125x = 0$

10.31. $q^{(4)} + q'' - 2q = 0$

10.32. $q^{(4)} - 3q'' + 2q = 0$

10.33. $N''' - 12N'' - 28N + 480N = 0$

10.34. $\dfrac{d^5r}{d\theta^5} + 5\dfrac{d^4r}{d\theta^4} + 10\dfrac{d^3r}{d\theta^3} + 10\dfrac{d^2r}{d\theta^2} + 5\dfrac{dr}{d\theta} + r = 0$

En los problemas del 10.35 al 10.41, se da un conjunto completo de raíces para la ecuación característica de un n-ésimo orden cercana a una ecuación diferencial homogénea en $y(x)$ con números reales como coeficientes. Determine la solución general de la ecuación diferencial.

10.35. $2, 8, -14$

10.36. $0, \pm i19$

10.37. $0, 0, 2 \pm i9$

10.38. $2 \pm i9, 2 \pm i9$

10.39. $5, 5, 5, -5, -5$

10.40. $\pm i6, \pm i6, \pm i6$

10.41. $-3 \pm i, -3 \pm i, 3 \pm i, 3 \pm i$

10.42. Determine la ecuación diferencial asociada con las raíces dadas en el problema 10.35.

10.43. Determine la ecuación diferencial asociada con las raíces dadas en el problema 10.36.

10.44. Determine la ecuación diferencial asociada con las raíces dadas en el problema 10.37.

10.45. Determine la ecuación diferencial asociada con las raíces dadas en el problema 10.38.

10.46. Determine la ecuación diferencial asociada con las raíces dadas en el problema 10.39.

10.47. Encuentre la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de cuarto orden para $y(x)$ con números reales como coeficientes si se sabe que una solución es x^3e^{-x}.

10.48. Encuentre la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de cuarto orden para $y(x)$ con números reales como coeficientes si se sabe que dos soluciones son $\cos 4x$ y $\operatorname{sen} 3x$.

10.49. Encuentre la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de cuarto orden para $y(x)$ con números reales como coeficientes si se sabe que una solución es $x \cos 4x$.

10.50. Encuentre la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de cuarto orden para $y(x)$ con números reales como coeficientes si se sabe que dos soluciones son xe^{2x} y xe^{5x}.

EL MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

11

La solución general para la ecuación diferencial lineal $\mathbf{L}(y) = \phi(x)$ está dada por el teorema 8.4 como $y = y_h + y_p$, donde y_p representa una solución para la ecuación diferencial y y_h es la solución general para la ecuación homogénea asociada, $\mathbf{L}(y) = 0$. Los métodos para obtener y_h cuando la ecuación diferencial tiene coeficientes constantes se dan en los capítulos 9 y 10. En este capítulo y en el siguiente damos métodos para obtener una solución particular y_p *una vez que* y_h *sea conocida.*

FORMA SIMPLE DEL MÉTODO

El *método de coeficientes indeterminados* se aplica sólo si $\phi(x)$ y *todas* sus derivadas se pueden escribir en términos del mismo conjunto *finito* de funciones linealmente independientes, las cuales podemos representar así $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$. El método se inicia asumiendo una solución particular de la forma

$$y_p(x) = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x) + \cdots + A_n y_n(x)$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ denotan constantes multiplicativas arbitrarias. Estas constantes arbitrarias se evalúan luego por medio de la sustitución de la solución propuesta en la ecuación diferencial, e igualando los coeficientes de los términos similares.

Caso 1. $\boldsymbol{\phi(x) = p_n(x)}$**, un polinomio de** $\boldsymbol{n}$**-ésimo grado en** $\boldsymbol{x}$**.** Se asume una solución de la forma

$$y_p = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0 \qquad (11.1)$$

donde $A_j \ (j = 0, 1, 2, \ldots, n)$ es una constante a determinar.

Caso 2. $\boldsymbol{\phi(x) = ke^{\alpha x}}$ **donde** $\boldsymbol{k}$ **y** $\boldsymbol{\alpha}$ **son constantes conocidas.** Se asume una solución de la forma

$$y_p = Ae^{\alpha x} \qquad (11.2)$$

donde A es una constante a determinar.

Caso 3. **$\phi(x) = k_1 \operatorname{sen} \beta x + k_2 \cos \beta x$ donde k_1, k_2 y β son constantes conocidas.** Se asume una solución de la forma

$$y_p = A \operatorname{sen} \beta x + B \cos \beta x \tag{11.3}$$

donde A y B son constantes a ser determinadas.

Nota: (*11.3*) en su totalidad se asume incluso cuando k_1 o k_2 es cero, porque las derivadas de senos o cosenos implican a ambos, tanto a los senos como a los cosenos.

GENERALIZACIONES

Si $\phi(x)$ es el producto de los términos considerados en los casos del 1 al 3, se toma y_p como el producto de las correspondientes soluciones asumidas y se combinan las constantes arbitrarias donde sea posible. En particular, si $\phi(x) = e^{\alpha x} p_n(x)$ es el producto de un polinomio con una exponencial, se asume

$$y_p = e^{\alpha x}(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0) \tag{11.4}$$

donde A_j es como en el caso 1. Si, en cambio, $\phi(x) = e^{\alpha x} p_n(x) \operatorname{sen} \beta x$ es el producto de una función polinomial, una exponencial y un término de seno, o si $\phi(x) = e^{\alpha x} p_n(x) \cos \beta x$ es el producto de una función polinomial, una exponencial y un término de coseno, entonces se asume

$$y_p = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x (A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0) + e^{\alpha x} \cos \beta x (B_n x^n + \cdots + B_1 x + B_0) \tag{11.5}$$

donde A_j y $B_j (j = 0, 1, \ldots, n)$ son constantes que aún se deben determinar.

Si $\phi(x)$ es la suma (o diferencia) de términos ya considerados, entonces tomamos y_p como la suma (o la diferencia) de las correspondientes soluciones asumidas y algebraicamente combinamos las constantes arbitrarias donde sea posible.

MODIFICACIONES

Si cualquier término de la solución asumida, sin considerar sus constantes multiplicativas, es también un término de y_h (la solución homogénea), entonces la solución asumida se debe modificar multiplicándola por x^m, donde m es el entero positivo más pequeño de modo tal que el producto de x^m con la solución asumida no tenga términos en común con y_h.

LIMITACIONES DEL MÉTODO

En general, si $\phi(x)$ no es uno de los tipos de funciones considerados anteriormente, o si la ecuación diferencial *no tiene coeficientes constantes*, entonces se aplica el método dado en el capítulo 12.

PROBLEMAS RESUELTOS

11.1. Resuelva $y'' - y' - 2y = 4x^2$.

Del problema 9.1, $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$. Aquí $\phi(x) = 4x^2$ es un polinomio de segundo grado. Utilizando (*11.1*) asumimos que

$$y_p = A_2 x^2 + A_1 x + A_0 \tag{1}$$

De este modo, $y_p' = 2A_2 x + A_1$ y $y_p'' = 2A_2$. Sustituyendo estos resultados en la ecuación diferencial tenemos

$$2A_2 - (2A_2 x + A_1) - 2(A_2 x^2 + A_1 x + A_0) = 4x^2$$

o, de manera equivalente,

$$(-2A_2)x^2+(-2A_2-2A_1)x+(2A_2-A_1-2A_0)=4x^2+(0)x+0$$

Igualando los coeficientes de potencias similares de x, obtenemos

$$-2A_2=4 \quad -2A_2-2A_1=0 \quad 2A_2-A_1-2A_0=0$$

Resolviendo este sistema, encontramos que $A_2=-2$, $A_1=2$ y $A_0=-3$. De aquí (*1*) se convierte en

$$y_p=-2x^2+2x-3$$

y la solución general es

$$y=y_h+y_p=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}-2x^2+2x-3$$

11.2. Resuelva $y''-y'-2y=e^{3x}$.

Del problema 9.1, $y_h=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$. Aquí $\phi(x)$ tiene la forma expuesta en el caso 2 con $k=1$ y $\alpha=3$. Utilizando (*11.2*) asumimos que

$$y_p=Ae^{3x} \tag{1}$$

De este modo, $y_p'=3Ae^{3x}$ y $y_p''=9Ae^{3x}$. Sustituyendo estos resultados en la ecuación diferencial, tenemos

$$9Ae^{3x}-3Ae^{3x}-2Ae^{3x}=e^{3x} \quad \text{o bien} \quad 4Ae^{3x}=e^{3x}$$

Se sigue que, $4A=1$, o bien $A=\frac{1}{4}$, de modo que (*1*) se convierte en $y_p=\frac{1}{4}e^{3x}$. La solución general entonces es

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{4}e^{3x}$$

11.3. Resuelva $y''-y'-2y=\operatorname{sen}2x$.

Nuevamente, por el problema 9.1, $y_h=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$. Aquí $\phi(x)$ tiene la forma mostrada en el caso 3 con $k_1=1$, $k_2=0$ y $\beta=2$. Utilizando (*11.3*) asumimos que

$$y_p=A\operatorname{sen}2x+B\cos 2x \tag{1}$$

De este modo, $y_p'=2A\cos 2x-2B\operatorname{sen}2x$ y $y_p''=-4A\operatorname{sen}2x-4B\cos 2x$. Sustituyendo estos resultados en la ecuación diferencial, tenemos

$$(-4A\operatorname{sen}2x-4B\cos 2x)-(2A\cos 2x-2B\operatorname{sen}2x)-2(A\operatorname{sen}2x+B\cos 2x)=\operatorname{sen}2x$$

o, de manera equivalente,

$$(-6A+2B)\operatorname{sen}2x+(-6B-2A)\cos 2x=(1)\operatorname{sen}2x+(0)\cos 2x$$

Igualando los coeficientes de los términos similares, obtenemos

$$-6A+2B=1 \quad -2A-6B=0$$

Resolviendo este sistema encontramos que $A=-3/20$ y $B=1/20$. Entonces, de (*1*)

$$y_p=-\frac{3}{20}\operatorname{sen}2x+\frac{1}{20}\cos 2x$$

y la solución general es

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}-\frac{3}{20}\operatorname{sen}2x+\frac{1}{20}\cos 2x$$

11.4. Resuelva $\ddot{y}-6\dot{y}+25y=2\operatorname{sen}\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}$.

Del problema 9.10,

$$y_h=c_1e^{3t}\cos 4t+c_2e^{3t}\operatorname{sen}4t$$

Aquí $\phi(t)$ tiene la forma mostrada en el caso 3 con la variable independiente t reemplazando a x, $k_1=2,\ k_2=-1$ y $\beta=\frac{1}{2}$. Utilizando (*11.3*), con t reemplazando a x, asumimos que

$$y_p=A\operatorname{sen}\frac{t}{2}+B\cos\frac{t}{2} \tag{1}$$

En consecuencia,

$$\dot{y}_p=\frac{A}{2}\cos\frac{t}{2}-\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{t}{2}$$

y

$$\ddot{y}_p=-\frac{A}{4}\operatorname{sen}\frac{t}{2}-\frac{B}{4}\cos\frac{t}{2}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación diferencial obtenemos

$$\left(-\frac{A}{4}\operatorname{sen}\frac{t}{2}-\frac{B}{4}\cos\frac{t}{4}\right)-6\left(\frac{A}{2}\cos\frac{t}{2}-\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)+25\left(A\operatorname{sen}\frac{t}{2}+B\cos\frac{t}{2}\right)=2\operatorname{sen}\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}$$

o, de manera equivalente,

$$\left(\frac{99}{4}A+3B\right)\operatorname{sen}\frac{t}{2}+\left(-3A+\frac{99}{4}B\right)\cos\frac{t}{2}=2\operatorname{sen}\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}$$

Igualando los coeficientes de los términos similares tenemos

$$\frac{99}{4}A+3B=2;\quad -3A+\frac{99}{4}B=-1$$

Luego, tenemos que $A=56/663$ y $B=-20/663$, de modo que (*1*) se convierte en

$$y_p=\frac{56}{663}\operatorname{sen}\frac{t}{2}-\frac{20}{663}\cos\frac{t}{2}$$

y la solución general es

$$y=y_h+y_p=c_1e^{3t}\cos 4t+c_2e^{3t}\operatorname{sen}4t+\frac{56}{663}\operatorname{sen}\frac{t}{2}-\frac{20}{663}\cos\frac{t}{2}$$

11.5. Resuelva $\ddot{y}-6\dot{y}+25y=64e^{-t}$.

Del problema 9.10,

$$y_h=c_1e^{3t}\cos 4t+c_2e^{3t}\operatorname{sen}4t$$

Aquí $\phi(t)$ tiene la forma mostrada en el caso 2 con la variable independiente t reemplazando a x, $k=64$ y $\alpha=-1$. Utilizando (*11.2*), con t reemplazando a x, asumimos que

$$y_p=Ae^{-t} \tag{1}$$

En consecuencia, $\dot{y}_p=-Ae^{-t}$ y $\ddot{y}_p=Ae^{-t}$. Sustituyendo estos resultados en la ecuación diferencial, obtenemos

$$Ae^{-t}-6(-Ae^{-t})+25(Ae^{-t})=64e^{-t}$$

o, de manera equivalente, $32Ae^{-t}=64e^{-t}$. Luego, $32A=64$ o bien $A=2$, de modo que (*1*) se convierte en $y_p=2e^{-t}$. La solución general es

$$y=y_h+y_p=c_1e^{3t}\cos 4t+c_2e^{3t}\operatorname{sen}4t+2e^{-t}$$

11.6. Resuelva $\ddot{y}-6\dot{y}+25y=50t^3-36t^2-63t+18$.

Nuevamente por el problema 9.10,

$$y_h=c_1e^{3t}\cos 4t+c_2e^{3t}\operatorname{sen}4t$$

Aquí $\phi(t)$ es un polinomio de tercer grado en t. Usando (*11.1*) con t reemplazando a x, asumimos que

$$y_p=A_3t^3+A_2t^2+A_1t+A_0 \tag{1}$$

En consecuencia,

$$\dot{y}_p=3A_3t^2+2A_2t+A_1$$

y

$$\ddot{y}_p=6A_3t+2A_2$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, obtenemos

$$(6A_{3t}+2A_2)-6(3A_3t^2+2A_2t+A_1)+25(A_3t^3+A_2t^2+A_1t+A_0)=50t^3-36t^2-63t+18$$

o, de manera equivalente

$$(25A_3)t^3+(-18A_3+25A_2)t^2+(6A_3-12A_2+25A_1)+(2A_2-6A_1+25A_0)=50t^3-36t^2-63t+18$$

Igualando coeficientes de potencias iguales de t, obtenemos

$$25A_3=50;\quad -18A_3+25A_2=-36;\quad 6A_3-12A_2+25A_1=63;\quad 2A_2-6A_1+25A_0=18$$

Resolviendo estas cuatro ecuaciones algebraicas simultáneamente, obtenemos $A_3=2$, $A_2=0$, $A_1=-3$ y $A_0=0$, así que (*1*) se convierte en

$$y_p=2t^3-3t$$

La solución general es

$$y=y_h+y_p=c_1e^{3t}\cos 4t+c_2e^{3t}\operatorname{sen}4t+2t^3-3t$$

11.7. Resuelva $y'''-6y''+11y'-6y=2xe^{-x}$.

Del problema 10.1, $y_h=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}$. Aquí $\phi(x)=e^{\alpha x}p_n(x)$, donde $\alpha=-1$ y $p_n(x)=2x$, un polinomio de primer grado. Utilizando la ecuación (*11.4*) asumimos que $y_p=e^{-x}(A_1x+A_0)$, o bien

$$y_p=A_1xe^{-x}+A_0e^{-x} \tag{1}$$

De este modo,

$$y'_p=-A_1xe^{-x}+A_1e^{-x}-A_0e^{-x}$$
$$y''_p=A_1xe^{-x}-2A_1e^{-x}+A_0e^{-x}$$
$$y'''_p=-A_1xe^{-x}+3A_1e^{-x}-A_0e^{-x}$$

Sustituyendo estos datos en la ecuación diferencial y simplificando, obtenemos

$$-24A_1xe^{-x}+(26A_1-24A_0)e^{-x}=2xe^{-x}+(0)e^{-x}$$

Igualando coeficientes de los términos similares tenemos

$$-24A_1=2\quad 26A_1-24A_0=0$$

del cual $A_1=-1/12$ y $A_0=-13/144$.

La ecuación (*1*) se convierte en

$$y_p=-\frac{1}{12}xe^{-x}-\frac{13}{144}e^{-x}$$

y la solución general es

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}-\frac{1}{12}xe^{-x}-\frac{13}{144}e^{-x}$$

11.8. Determine la forma de una solución particular para $y'' = 9x^2 + 2x - 1$.

Aquí $\phi(x) = 9x^2 + 2x - 1$ y la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada $y'' = 0$ es $y_h = c_1x + c_0$. Dado que $\phi(x)$ es un polinomio de segundo grado, primero intentamos $y_p = A_2x^2 + A_1x + A_0$. Nótese, sin embargo, que esta solución asumida tiene términos, sin considerar las constantes multiplicativas, en común con y_h: en particular, el término de la primera potencia y el término constante. Por ésto, debemos determinar el número entero m más pequeño tal que $x^m(A_2x^2 + A_1x + A_0)$ no tenga términos en común con y_h.

Para $m = 1$, obtenemos

$$x(A_2x^2 + A_1x + A_0) = A_2x^3 + A_1x^2 + A_0x$$

que todavía tiene un término de primera potencia en común con y_h. Para $m = 2$ obtenemos

$$x^2(A_2x^2 + A_1x + A_0) = A_2x^4 + A_1x^3 + A_0x^2$$

que no tiene términos en común con y_h; por lo tanto, asumimos una expresión de esta forma para y_p.

11.9. Resuelva $y'' = 9x^2 + 2x - 1$.

Usando los resultados del problema 11.8 tenemos que $y_h = c_1x + c_0$ y asumimos que

$$y_p = A_2x^4 + A_1x^3 + A_0x^2 \qquad (1)$$

Sustituyendo (*1*) en la ecuación diferencial obtenemos

$$12A_2x^2 + 6A_1x + 2A_0 = 9x^2 + 2x - 1$$

de lo cual $A_2 = 3/4$, $A_1 = 1/3$ y $A_0 = -1/2$. Entonces (*1*) se convierte en

$$y_p = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

y la solución general es

$$y = c_1x + c_0 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

La solución también se puede obtener simplemente integrando dos veces ambos lados de la ecuación diferencial con respecto a x.

11.10. Resuelva $y' - 5y = 2e^{5x}$.

Del problema 10.3, $y_h = c_1e^{5x}$. Dado que $\phi(x) = 2e^{5x}$, tendríamos, de la ecuación (*11.2*) que la suposición para y_p debería ser $y_p = A_0e^{5x}$. Obsérvese, sin embargo, que esta y_p tiene exactamente la misma forma que y_h; por lo tanto, debemos modificar y_p. Multiplicando y_p por x ($m = 1$) obtenemos

$$y_p = A_0xe^{5x} \qquad (1)$$

Como esta expresión no tiene términos en común con y_h es candidata para la solución particular. Sustituyendo (*1*) y $y'_p = A_0e^{5x} + 5A_0xe^{5x}$ en la ecuación diferencial y simplificando, obtenemos $A_0e^{5x} = 2e^{5x}$, de la cual $A_0 = 2$. La ecuación (*1*) se convierte en $y_p = 2xe^{5x}$ y la solución general es $y = (c_1 + 2x)e^{5x}$.

11.11. Determine la forma de una solución particular de

$$y' - 5y = (x-1)\operatorname{sen} x + (x+1)\cos x$$

Aquí $\phi(x) = (x-1)\operatorname{sen} x + (x+1)\cos x$, y del problema 10.3, sabemos que la solución para el problema homogéneo asociado $y' - 5y = 0$ es $y_h = c_1e^{5x}$. Una solución asumida para $(x - 1)$ sen x está dada por la ecuación (*11.5*) (con $\alpha = 0$) como

$$(A_1x + A_0)\operatorname{sen} x + (B_1x + B_0)\cos x$$

y una solución asumida para $(x+1)\cos x$ está dada por la ecuación (*11.5*) como

$$(C_1x+C_0)\operatorname{sen} x+(D_1x+D_2)\cos x$$

(Obsérvese que hemos usado C y D en la última expresión, pues las constantes A y B ya han sido usadas.) Entonces tomamos

$$y_p=(A_1x+A_0)\operatorname{sen} x+(B_1x+B_0)\cos x+(C_1x+C_0)\operatorname{sen} x+(D_1x+D_0)\cos x$$

Combinando términos similares llegamos a

$$y_p=(E_1x+E_0)\operatorname{sen} x+(F_1x+F_0)\cos x$$

como la solución asumida, donde $E_j=A_j+C_j$ y $F_j=B_j+D_j(j=0,1)$.

11.12. Resuelva $y'-5y=(x-1)\operatorname{sen} x+(x+1)\cos x$.

Del problema 10.3, $y_h=c_1e^{5x}$. Usando los resultados del problema 11.11 asumimos que

$$y_p=(E_1x+E_0)\operatorname{sen} x+(F_1x+F_0)\cos x \qquad (I)$$

De este modo,

$$y_p'=(E_1-F_1x-F_0)\operatorname{sen} x+(E_1x+E_0+E_1)\cos x$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial y simplificando, obtenemos

$$(-5E_1-F_1)x\operatorname{sen} x+(-5E_0+E_1-F_0)\operatorname{sen} x+(-5F_1+E_1)x\cos x+(-5F_0+E_0+F_1)\cos x$$
$$=(1)x\operatorname{sen} x+(-1)\operatorname{sen} x+(1)x\cos x+(1)\cos x$$

Igualando coeficientes de términos similares tenemos

$$\begin{aligned}-5E_1-F_1&=1\\ -5E_0+E_1-F_0&=-1\\ E_1-5F_1&=1\\ E_0-5F_0+F_1&=1\end{aligned}$$

Resolviendo, obtenemos $E_1=-2/13, E_0=71/338, F_1=-3/13$ y $F_0=-69/338$. Entonces, de (*I*)

$$y_p=\left(-\frac{2}{13}x+\frac{71}{338}\right)\operatorname{sen} x+\left(-\frac{3}{13}x+\frac{69}{338}\right)\cos x$$

y la solución general es

$$y=c_1e^{5x}+\left(\frac{-2}{13}x+\frac{71}{338}\right)\operatorname{sen} x-\left(\frac{3}{13}x+\frac{69}{338}\right)\cos x$$

11.13. Resuelva $y'-5y=3e^x-2x+1$.

Del problema 10.3, $y_h=c_1e^{5x}$. Aquí, podemos escribir $\phi(x)$ como la suma de dos funciones manejables: $\phi(x)=(3e^x)+(-2x+1)$. Para el término $3e^x$ deberíamos asumir una solución de la forma Ae^x; para el término $-2x+1$ asumiríamos una solución de la forma B_1x+B_0. De este modo, intentamos

$$y_p=Ae^x+B_1x+B_0 \qquad (I)$$

Sustituyendo (*I*) en la ecuación diferencial y simplificando, obtenemos

$$(-4A)e^x+(-5B_1)x+(B_1-5B_0)=(3)e^x+(-2)x+(1)$$

Igualando coeficientes de los términos similares, encontramos que $A=-3/4$, $B_1=2/5$ y $B_0=-3/25$. De aquí, (*I*) se convierte en

$$y_p=-\frac{3}{4}e^x+\frac{2}{5}x-\frac{3}{25}$$

y la solución general es

$$y = c_1 e^{5x} - \frac{3}{4}e^x + \frac{2}{5}x - \frac{3}{25}$$

11.14. Resuelva $y' - 5y = x^2 e^x - xe^{5x}$.

Del problema 10.3, $y_h = c_1 e^{5x}$. Aquí $\phi(x) = x^2 e^x - xe^{5x}$, que es la diferencia de dos términos, cada uno en forma manejable. Para $x^2 e^x$ asumiríamos una solución de la forma

$$e^x(A_2 x^2 + A_1 x + A_0) \tag{1}$$

Para xe^{5x} intentaríamos inicialmente una solución de la forma

$$e^{5x}(B_1 x + B_0) = B_1 xe^{5x} + B_0 e^{5x}$$

Pero esta solución supuesta tendría, sin considerar las constantes multiplicativas, el término e^{5x} en común con y_h. Por lo tanto, necesitamos la expresión modificada

$$xe^{5x}(B_1 x + B_0) = e^{5x}(B_1 x^2 + B_0 x) \tag{2}$$

Ahora tomamos y_p como la suma de (*1*) y (*2*):

$$y_p = e^x(A_2 x^2 + A_1 x + A_0) + e^{5x}(B_1 x^2 + B_0 x) \tag{3}$$

Sustituyendo (*3*) en la ecuación diferencial y simplificando, obtenemos

$$e^x\left[(-4A_2)x^2 + (2A_2 - 4A_1)x + (A_1 - 4A_0)\right] + e^{5x}\left[(2B_1)x + B_0\right]$$
$$= e^x\left[(1)x^2 + (0)x + (0)\right] + e^{5x}\left[(-1)x + (0)\right]$$

Igualando coeficientes de términos similares tenemos

$$-4A_2 = 1 \quad 2A_2 - 4A_1 = 0 \quad A_1 - 4A_0 = 0 \quad 2B_1 = -1 \quad B_0 = 0$$

de lo cual

$$A_2 = -\frac{1}{4} \quad A_1 = -\frac{1}{8} \quad A_0 = -\frac{1}{32}$$

$$B_1 = -\frac{1}{2} \quad B_0 = 0$$

La ecuación (*3*) entonces proporciona

$$y_p = e^x\left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\right) - \frac{1}{2}x^2 e^{5x}$$

y la solución general es

$$y = c_1 e^{5x} + e^x\left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\right) - \frac{1}{2}x^2 e^{5x}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

En los problemas del 11.15 al 11.26, determine la forma de una solución particular para $\mathbf{L}(y) = \phi(x)$ para $\phi(x)$ tal como está dada si la solución a la ecuación homogénea asociada $\mathbf{L}(y) = 0$ es $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$.

11.15. $\phi(x) = 2x - 7$

11.16. $\phi(x) = -3x^2$

11.17. $\phi(x) = 132x^2 - 388x + 1077$

11.18. $\phi(x) = 0.5e^{-2x}$

11.19. $\phi(x) = 13e^{5x}$

11.20. $\phi(x) = 4e^{2x}$

11.21. $\phi(x) = 2\cos 3x$

11.22. $\phi(x) = \frac{1}{2}\cos 3x - 3\,\text{sen}\, 3x$

11.23. $\phi(x) = x\cos 3x$

11.24. $\phi(x) = 2x + 3e^{8x}$

11.25. $\phi(x) = 2xe^{5x}$

11.26. $\phi(x) = 2xe^{3x}$

En los problemas del 11.27 al 11.36, determine la forma de una solución particular para $\mathbf{L}(y) = \phi(x)$ para $\phi(x)$ tal como está dada si la solución a la ecuación homogénea asociada $\mathbf{L}(y) = 0$ *es* $y_h = c_1e^{5x}\cos 3x + c_2e^{5x}\,\text{sen}\, 3x$.

11.27. $\phi(x) = 2e^{3x}$

11.28. $\phi(x) = xe^{3x}$

11.29. $\phi(x) = -23e^{5x}$

11.30. $\phi(x) = (x^2 - 7)e^{5x}$

11.31. $\phi(x) = 5\cos\sqrt{2}x$

11.32. $\phi(x) = x^2\,\text{sen}\,\sqrt{2}x$

11.33. $\phi(x) = -\cos 3x$

11.34. $\phi(x) = 2\,\text{sen}\, 4x - \cos 7x$

11.35. $\phi(x) = 31^{-x}\cos 3x$

11.36. $\phi(x) = -\frac{1}{6}e^{5x}\cos 3x$

En los problemas del 11.37 al 11.43, determine la forma de una solución particular para $\mathbf{L}(x) = \phi(t)$ para $\phi(t)$ tal como está dada si la solución a la ecuación homogénea asociada $\mathbf{L}(x) = 0$ es $x_h = c_1 + c_2e^t + c_3te^t$.

11.37. $\phi(t) = t$

11.38. $\phi(t) = 2t^2 - 3t + 82$

11.39. $\phi(t) = te^{-2t} + 3$

11.40. $\phi(t) = -6e^t$

11.41. $\phi(t) = te^t$

11.42. $\phi(t) = 3 + t\cos t$

11.43. $\phi(t) = te^{2t}\cos 3t$

En los problemas del 11.44 al 11.52, encuentre las soluciones generales para las ecuaciones diferenciales dadas.

11.44. $y'' - 2y' + y = x^2 - 1$

11.45. $y'' - 2y' + y = 3e^{2x}$

11.46. $y'' - 2y' + y = 4\cos x$

11.47. $y'' - 2y' + y = 3e^x$

11.48. $y'' - 2y' + y = xe^x$

11.49. $y' - y = e^x$

11.50. $y' - y = xe^{2x} + 1$

11.51. $y' - y = \text{sen}\, x + \cos 2x$

11.52. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x + 1$

VARIACIÓN DE PARÁMETROS 12

La variación de parámetros es otro método (véase capítulo 11) para hallar una solución particular a la ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden.

$$\mathbf{L}(y) = \phi(x) \tag{12.1}$$

una vez que se sabe la solución de la ecuación homogénea asociada $\mathbf{L}(y) = 0$. Recuerde, del teorema 8.2, que si $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ son n soluciones linealmente independientes de $\mathbf{L}(y) = 0$, entonces la solución general de $\mathbf{L}(y) = 0$ es

$$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots c_ny_n(x) \tag{12.2}$$

EL MÉTODO

Una solución particular de $\mathbf{L}(y) = \phi(x)$ tiene la forma

$$y_p = v_1y_1 + v_2y_2 + \cdots + v_ny_n \tag{12.3}$$

donde $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ está dada en la ecuación (*12.2*) y v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es una función desconocida de x que se debe determinar aún.

Para encontrar v_i, primero resolvemos simultáneamente las siguientes ecuaciones lineales para las v_i':

$$\begin{aligned}
&v_1'y_1 + v_2'y_2 + \cdots + v_n'y_n = 0\\
&v_1'y_1' + v_2'y_2' + \cdots + v_n'y_n' = 0\\
&\vdots\\
&v_1'y_1^{(n-2)} + v_2'y_2^{(n-2)} + \cdots + v_n'y_n^{(n-2)} = 0\\
&v_1'y_1^{(n-1)} + v_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + v_n'y_n^{(n-1)} = \phi(x)
\end{aligned} \tag{12.4}$$

Luego integramos cada v_i' para obtener v_i, sin considerar todas las constantes de integración. Esto es permisible porque estamos buscando sólo *una* solución particular.

EJEMPLO 12.1 Para el caso especial de $n = 3$, las ecuaciones (*12.4*) se reducen a

$$\begin{aligned}
&v_1'y_1 + v_2'y_2 + v_3'y_3 = 0\\
&v_1'y_1' + v_2'y_2' + v_3'y_3' = 0\\
&v_1'y_1'' + v_2'y_2'' + v_3'y_3'' = \phi(x)
\end{aligned} \tag{12.5}$$

Para el caso de $n = 2$, las ecuaciones (*12.4*) se convierten en

$$\begin{aligned} v_1'y_1 + v_2'y_2 &= 0 \\ v_1'y_1' + v_2'y_2' &= \phi(x) \end{aligned} \tag{12.6}$$

y para el caso de $n = 1$, nuevamente obtenemos la ecuación simple

$$v_1'y_1 = \phi(x) \tag{12.7}$$

Dado que $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ son n soluciones linealmente independientes de la misma ecuación $\mathbf{L}(y) = 0$, su Wronskiano no es cero (teorema 8.3). Esto significa que el sistema (*12.4*) tiene un determinante distinto de cero y se puede resolver únicamente por $v_1'(x), v_2'(x), \ldots, v_n'(x)$.

ALCANCE DEL MÉTODO

El método de variación de parámetros se puede aplicar a *todas* las ecuaciones diferenciales. Es, por lo tanto, más poderoso que el método de coeficientes indeterminados, que está restringido a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y formas particulares de $\phi(x)$. No obstante, en aquellos casos donde ambos métodos son aplicables, el método de los coeficientes indeterminados es generalmente el más eficiente y, por lo tanto, el preferible.

Como asunto práctico, la integración de $v_i'(x)$ puede ser imposible de realizar. En tal caso se deben emplear otros métodos (en particular, las técnicas numéricas).

PROBLEMAS RESUELTOS

12.1. Resuelva $y''' + y' = \sec x$.

Ésta es una ecuación de tercer orden con

$$y_h = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x$$

(véase capítulo 10); de la ecuación (*12.3*), tenemos que

$$y_p = v_1 + v_2 \cos x + v_3 \operatorname{sen} x \tag{1}$$

Aquí $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \operatorname{sen} x$ y $\phi(x) = \sec x$, de modo que (*12.5*) se convierte en

$$\begin{aligned} v_1'(1) + v_2'(\cos x) + v_3'(\operatorname{sen} x) &= 0 \\ v_1'(0) + v_2'(-\operatorname{sen} x) + v_3'(\cos x) &= 0 \\ v_1'(0) + v_2'(-\cos x) + v_3'(-\operatorname{sen} x) &= \sec x \end{aligned}$$

Resolviendo este conjunto de ecuaciones simultáneamente, obtenemos $v_1' = \sec x$, $v_2' = -1$ y $v_3' = -\tan x$. De este modo,

$$\begin{aligned} v_1 &= \int v_1'\,dx = \int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| \\ v_2 &= \int v_2'\,dx = \int -1\,dx = -x \\ v_3 &= \int v_3'\,dx = \int -\tan x\,dx = -\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = \ln|\cos x| \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (*1*) obtenemos

$$y_p = \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + (\operatorname{sen} x)\ln|\cos x|$$

La solución general, por lo tanto, es

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x + \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + (\operatorname{sen} x)\ln|\cos x|$$

12.2. Resuelva $y''' - 3y'' + 2y' = \dfrac{e^x}{1+e^{-x}}$.

Ésta es una ecuación de tercer orden con

$$y_h = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$$

(véase capítulo 10); de la ecuación (*12.3*) tenemos que

$$y_p = v_1 + v_2 e^x + v_3 e^{2x} \tag{1}$$

Aquí, $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{2x}$ y $\phi(x) = e^x/(1+e^{-x})$, de modo que la ecuación (*12.5*) se convierte en

$$\begin{aligned} v_1'(1) + v_2'(e^x) + v_3'(e^{2x}) &= 0 \\ v_1'(0) + v_2'(e^x) + v_3'(2e^{2x}) &= 0 \\ v_1'(0) + v_2'(e^x) + v_3'(4e^{2x}) &= \frac{e^x}{1+e^{-x}} \end{aligned}$$

Resolviendo este conjunto de ecuaciones simultáneamente, obtenemos

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{1+e^{-x}}\right) \\ v_2' &= \frac{-1}{1+e^{-x}} \\ v_3' &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) \end{aligned}$$

De este modo, usando las sustituciones $u = e^x + 1$ y $w = 1 + e^{-x}$, encontramos que

$$\begin{aligned} v_1 \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{1+e^{-x}}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{e^x+1}e^x dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u}du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\ln|u| \\ &= \frac{1}{2}(e^x+1) - \frac{1}{2}\ln(e^x+1) \\ v_2 = \int \frac{-1}{1+e^{-x}}dx &= -\int \frac{e^x}{e^x+1}dx \\ &= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| = -\ln(e^x+1) \\ v_3 = \frac{1}{2}\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{dw}{w} = -\frac{1}{2}\ln|w| = -\frac{1}{2}\ln(1+e^{-x}) \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (*1*) obtenemos

$$y_p = \left[\frac{1}{2}(e^x+1) - \frac{1}{2}\ln(e^x+1)\right] + \left[-\ln(e^x+1)\right]e^x + \left[-\frac{1}{2}\ln(1+e^{-x})\right]e^{2x}$$

La solución general es

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x} + \frac{1}{2}(e^x+1) - \frac{1}{2}\ln(e^x+1) - e^x\ln(e^x+1) - \frac{1}{2}e^{2x}\ln(1+e^{-x})$$

Esta solución se puede simplificar. Primero observamos que

$$\ln(1+e^{-x}) = \ln\left[e^{-x}(e^x+1)\right] = \ln e^{-x} + \ln(e^x+1) = -1 + \ln(e^x+1)$$

de modo que
$$-\frac{1}{2}e^{2x}\ln(1+e^{-x}) = -\frac{1}{2}e^{2x}\left[-1+\ln(e^x+1)\right] = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\ln(e^x+1)$$

Para el caso de $n = 2$, las ecuaciones (*12.4*) se convierten en

$$\begin{aligned} v_1'y_1 + v_2'y_2 &= 0 \\ v_1'y_1' + v_2'y_2' &= \phi(x) \end{aligned} \tag{12.6}$$

y para el caso de $n = 1$, nuevamente obtenemos la ecuación simple

$$v_1'y_1 = \phi(x) \tag{12.7}$$

Dado que $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ son n soluciones linealmente independientes de la misma ecuación $\mathbf{L}(y) = 0$, su Wronskiano no es cero (teorema 8.3). Esto significa que el sistema (*12.4*) tiene un determinante distinto de cero y se puede resolver únicamente por $v_1'(x), v_2'(x), \ldots, v_n'(x)$.

ALCANCE DEL MÉTODO

El método de variación de parámetros se puede aplicar a *todas* las ecuaciones diferenciales. Es, por lo tanto, más poderoso que el método de coeficientes indeterminados, que está restringido a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y formas particulares de $\phi(x)$. No obstante, en aquellos casos donde ambos métodos son aplicables, el método de los coeficientes indeterminados es generalmente el más eficiente y, por lo tanto, el preferible.

Como asunto práctico, la integración de $v_i'(x)$ puede ser imposible de realizar. En tal caso se deben emplear otros métodos (en particular, las técnicas numéricas).

PROBLEMAS RESUELTOS

12.1. Resuelva $y''' + y' = \sec x$.

Ésta es una ecuación de tercer orden con

$$y_h = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x$$

(véase capítulo 10); de la ecuación (*12.3*), tenemos que

$$y_p = v_1 + v_2 \cos x + v_3 \operatorname{sen} x \tag{1}$$

Aquí $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \operatorname{sen} x$ y $\phi(x) = \sec x$, de modo que (*12.5*) se convierte en

$$\begin{aligned} &v_1'(1) + v_2'(\cos x) + v_3'(\operatorname{sen} x) = 0 \\ &v_1'(0) + v_2'(-\operatorname{sen} x) + v_3'(\cos x) = 0 \\ &v_1'(0) + v_2'(-\cos x) + v_3'(-\operatorname{sen} x) = \sec x \end{aligned}$$

Resolviendo este conjunto de ecuaciones simultáneamente, obtenemos $v_1' = \sec x$, $v_2' = -1$ y $v_3' = -\tan x$. De este modo,

$$\begin{aligned} v_1 &= \int v_1'\,dx = \int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| \\ v_2 &= \int v_2'\,dx = \int -1\,dx = -x \\ v_3 &= \int v_3'\,dx = \int -\tan x\,dx = -\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = \ln|\cos x| \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (*1*) obtenemos

$$y_p = \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + (\operatorname{sen} x)\ln|\cos x|$$

La solución general, por lo tanto, es

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2\cos x + c_3 \operatorname{sen} x + \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + (\operatorname{sen} x)\ln|\cos x|$$

Resuelva $y''' - 3y'' + 2y' = \dfrac{e^x}{1+e^{-x}}$.

Ésta es una ecuación de tercer orden con

$$y_h = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x}$$

(véase capítulo 10); de la ecuación (*12.3*) tenemos que

$$y_p = v_1 + v_2e^x + v_3e^{2x} \tag{1}$$

Aquí, $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{2x}$ y $\phi(x) = e^x/(1+e^{-x})$, de modo que la ecuación (*12.5*) se convierte en

$$\begin{aligned} v_1'(1) + v_2'(e^x) + v_3'(e^{2x}) &= 0 \\ v_1'(0) + v_2'(e^x) + v_3'(2e^{2x}) &= 0 \\ v_1'(0) + v_2'(e^x) + v_3'(4e^{2x}) &= \frac{e^x}{1+e^{-x}} \end{aligned}$$

Resolviendo este conjunto de ecuaciones simultáneamente, obtenemos

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{1+e^{-x}}\right) \\ v_2' &= \frac{-1}{1+e^{-x}} \\ v_3' &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) \end{aligned}$$

De este modo, usando las sustituciones $u = e^x + 1$ y $w = 1 + e^{-x}$, encontramos que

$$\begin{aligned} v_1 \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{1+e^{-x}}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{e^x}{e^x+1}e^x dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u}du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\ln|u| \\ &= \frac{1}{2}(e^x+1) - \frac{1}{2}\ln(e^x+1) \\ v_2 = \int \frac{-1}{1+e^{-x}}dx &= -\int \frac{e^x}{e^x+1}dx \\ &= -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| = -\ln(e^x+1) \\ v_3 = \frac{1}{2}\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{dw}{w} = -\frac{1}{2}\ln|w| = -\frac{1}{2}\ln(1+e^{-x}) \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (*1*) obtenemos

$$y_p = \left[\frac{1}{2}(e^x+1) - \frac{1}{2}\ln(e^x+1)\right] + \left[-\ln(e^x+1)\right]e^x + \left[-\frac{1}{2}\ln(1+e^{-x})\right]e^{2x}$$

La solución general es

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x} + \frac{1}{2}(e^x+1) - \frac{1}{2}\ln(e^x+1) - e^x\ln(e^x+1) - \frac{1}{2}e^{2x}\ln(1+e^{-x})$$

Esta solución se puede simplificar. Primero observamos que

$$\ln(1+e^{-x}) = \ln\left[e^{-x}(e^x+1)\right] = \ln e^{-x} + \ln(e^x+1) = -1 + \ln(e^x+1)$$

de modo que $$-\frac{1}{2}e^{2x}\ln(1+e^{-x}) = -\frac{1}{2}e^{2x}\left[-1+\ln(e^x+1)\right] = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}\ln(e^x+1)$$

Luego, combinando términos similares, tenemos

$$\begin{aligned} y &= \left(c_1+\frac{1}{2}\right)+\left(c_2+\frac{1}{2}\right)e^x+\left(c_3+\frac{1}{2}\right)e^{2x}+\left[-\frac{1}{2}-e^x-\frac{1}{2}e^{2x}\right]\ln(e^x+1) \\ &= c_4+c_5e^x+c_6e^{2x}-\frac{1}{2}\left[1+2e^x+(e^x)^2\right]\ln(e^x+1) \\ &= c_4+c_5e^x+c_6e^{2x}-\frac{1}{2}(e^x+1)^2\ln(e^x+1)\left(\text{con } c_4=c_1+\frac{1}{2},\ c_5=c_2+\frac{1}{2},\ c_6=c_3+\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

12.3. Resuelva $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$.

Aquí $n=2$ y $y_h=c_1e^x+c_2xe^x$, por lo tanto,

$$y_p=v_1e^x+v_2xe^x \tag{1}$$

Dado que $y_1=e^x$, $y_2=xe^x$ y $\phi(x)=e^x/x$, de la ecuación (*12.6*), tenemos que

$$\begin{aligned} v_1'(e^x)+v_2'(xe)&=0 \\ v_1'(e^x)+v_2'(e^x+xe^x)&=\frac{e^x}{x} \end{aligned}$$

Resolviendo este conjunto de ecuaciones simultáneamente, obtenemos $v_1'=-1$ y $v_2'=1/x$. De este modo,

$$\begin{aligned} v_1&=\int v_1'\,dx=\int -1\,dx=-x \\ v_2&=\int v_2'\,dx=\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x| \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (*1*) obtenemos

$$y_p=-xe^x+xe^x\ln|x|$$

Por lo tanto, la solución general es

$$\begin{aligned} y=y_h+y_p&=c_1e^x+c_2xe^x-xe^x+xe^x\ln|x| \\ &=c_1e^x+c_3xe^x+xe^x\ln|x|\ (c_3=c_2-1) \end{aligned}$$

12.4. Resuelva $y''-y'-2y=e^{3x}$.

Aquí $n=2$ y $y_h=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$; por ello,

$$y_p=v_1e^{-x}+v_2e^{2x} \tag{1}$$

Dado que y_1e^{-x}, $y_2=e^{2x}$ y $\phi(x)=e^{3x}$, de la ecuación (*12.6*) tenemos que

$$\begin{aligned} v_1'(e^{-x})+v_2'(e^{2x})&=0 \\ v_1'(-e^{-x})+v_2'(2e^{2x})&=e^{3x} \end{aligned}$$

Resolviendo este conjunto de ecuaciones simultáneamente, obtenemos $v_1'=-e^{4x}/3$ y $v_2'=e^x/3$, de lo cual $v_1=-e^{4x}/12$ y $v_2=e^x/3$. Sustituyendo estos resultados en (*1*) obtenemos

$$y_p=-\frac{1}{12}e^{4x}e^{-x}+\frac{1}{3}e^xe^{2x}=-\frac{1}{12}e^{3x}+\frac{1}{3}e^{3x}=\frac{1}{4}e^{3x}$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{4}e^{3x}$$

(Compárese con el problema 11.2.)

12.5. Resuelva $\ddot{x}+4x=\operatorname{sen}^2 2t$.

Ésta es una ecuación de segundo orden para $x(t)$ con

$$x_h = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t$$

De la ecuación (*12.3*) tenemos que

$$x_p = v_1 \cos 2t + v_2 \operatorname{sen} 2t \tag{1}$$

donde v_1 y v_2 son ahora funciones de t. Aquí $x_1 = \cos 2t$, $x_2 = \operatorname{sen} 2t$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea asociada y $\phi(t) = \operatorname{sen}^2 2t$, de modo que la ecuación (*12.6*), con x reemplazando a y, se convierte en

$$v_1' \cos 2t + v_2' \operatorname{sen} 2t = 0$$
$$v_1'(-2\operatorname{sen} 2t) + v_2'(2\cos 2t) = \operatorname{sen}^2 2t$$

La solución de este conjunto de ecuaciones es

$$v_1' = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^3 2t$$
$$v_2' = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2t \cos 2t$$

De este modo,

$$v_1 = -\frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^3 2t\, dt = \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{12}\cos^3 2t$$
$$v_2 = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^2 2t \cos 2t\, dt = \frac{1}{12}\operatorname{sen}^3 2t$$

Sustituyendo estos valores en (*1*) obtenemos

$$\begin{aligned} x_p &= \left[\frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{12}\cos^3 2t\right]\cos 2t + \left[\frac{1}{12}\operatorname{sen}^3 2t\right]\operatorname{sen} 2t \\ &= \frac{1}{4}\cos^2 2t - \frac{1}{12}(\cos^4 2t - \operatorname{sen}^4 2t) \\ &= \frac{1}{4}\cos^2 2t - \frac{1}{12}(\cos^2 2t - \operatorname{sen}^2 2t)(\cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 2t) \\ &= \frac{1}{6}\cos^2 2t + \frac{1}{12}\operatorname{sen}^2 2t \end{aligned}$$

porque $\cos^2 2t + \operatorname{sen}^2 2t = 1$. La solución general es

$$x = x_h + x_p = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{6}\cos^2 2t + \frac{1}{12}\operatorname{sen}^2 2t$$

12.6. Resuelva $t^2 \dfrac{d^2N}{dt^2} - 2t\dfrac{dN}{dt} + 2n = t \ln t$ si se sabe que dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada son t y t^2.

Primero escribimos la ecuación diferencial en su forma estándar, con la unidad como el coeficiente de la mayor derivada. Dividiendo la ecuación por t^2, obtenemos

$$\frac{d^2N}{dt^2} - \frac{2}{t}\frac{dN}{dt} + \frac{2}{t^2}N = \frac{1}{t}\ln t$$

con $\phi(t) = (1/t)\ln t$. Se da $N_1 = t$ y $N_2 = t^2$ como dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada de segundo orden. A continuación, del teorema 8.2, tenemos que

$$N_h = c_1 t + c_2 t^2$$

Por lo tanto, asumimos que

$$N_p = v_1 t + v_2 t^2 \tag{1}$$

Las ecuaciones (*12.6*), con N reemplazando a y, se convierten en

$$v_1'(t) + v_2'(t^2) = 0$$
$$v_1'(1) + v_2'(2t) = \frac{1}{t}\ln t$$

La solución de este conjunto de ecuaciones es

$$v_1' = -\frac{1}{t}\ln t \quad \text{y} \quad v_2' = \frac{1}{t^2}\ln t$$

De este modo,

$$v_1 = -\int \frac{1}{t}\ln t\, dt = -\frac{1}{2}\ln^2 t$$
$$v_2 = \int \frac{1}{t^2}\ln t\, dt = -\frac{1}{t}\ln t - \frac{1}{t}$$

y (*1*) se convierte en

$$N_p = \left[-\frac{1}{2}\ln^2 t\right]t + \left[-\frac{1}{t}\ln t - \frac{1}{t}\right]t^2 = -\frac{t}{2}\ln^2 t - t\ln t - t$$

La solución general es

$$N = N_h + N_p = c_1 t + c_2 t^2 - \frac{t}{2}\ln^2 t - t\ln t - t$$
$$= c_3 t + c_2 t^2 - \frac{t}{2}\ln^2 t - t\ln t \quad (\text{con } c_3 = c_1 - 1)$$

12.7. Resuelva $y' + \frac{4}{x}y = x^4$.

Aquí $n = 1$ y (del capítulo 6) $y_h = c_1 x^{-4}$; de aquí que

$$y_p = v_1 x^{-4} \tag{1}$$

Dado que $y_1 = x^{-4}$ y $\phi(x) = x^4$, la ecuación (*12.7*) se convierte en $v_1' x^{-4} = x^4$, de lo cual obtenemos $v_1' = x^8$ y $v_1 = x^9/9$. La ecuación (*1*) se convierte ahora en $y_p = x^5/9$ y, por lo tanto, la solución general es

$$y = c_1 x^{-4} + \frac{1}{9}x^5$$

(Compárese con el problema 6.6.)

12.8. Resuelva $y^{(4)} = 5x$ por variación de parámetros.

Aquí $n = 4$ y $y_h = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$; por esto,

$$y_p = v_1 + v_2 x + v_3 x^2 + v_4 x^3 \tag{1}$$

Como $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, $y_4 = x^3$ y $\phi(x) = 5x$, de la ecuación (*12.4*), con $n = 4$, tenemos que

$$v_1'(1) + v_2'(x) + v_3'(x^2) + v_4'(x^3) = 0$$
$$v_1'(0) + v_2'(1) + v_3'(2x) + v_4'(3x^2) = 0$$
$$v_1'(0) + v_2'(0) + v_3'(2) + v_4'(6x) = 0$$
$$v_1'(0) + v_2'(0) + v_3'(0) + v_4'(6) = 5x$$

Resolviendo este conjunto de ecuaciones simultáneamente tenemos que

$$v_1' = -\frac{5}{6}x^4 \quad v_2' = \frac{5}{2}x^3 \quad v_3' = -\frac{5}{2}x^2 \quad v_4' = \frac{5}{6}x$$

de donde

$$v_1 = -\frac{1}{6}x^5 \quad v_2 = \frac{5}{8}x^4 \quad v_3 = -\frac{5}{6}x^3 \quad v_4 = \frac{5}{12}x^2$$

Luego, de (*1*),

$$y_p = -\frac{1}{6}x^5 + \frac{5}{8}x^4(x) - \frac{5}{6}x^3(x^2) + \frac{5}{12}x^2(x^3) = \frac{1}{24}x^5$$

y la solución general es

$$y_h = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + \frac{1}{24}x^5$$

La solución también se puede obtener simplemente integrando cuatro veces con respecto a x ambos lados de la ecuación diferencial.

PROBLEMAS ADICIONALES

Utilice la variación de parámetros para hallar las soluciones generales de las siguientes ecuaciones diferenciales:

12.9. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^5}$

12.10. $y'' + y = \sec x$

12.11. $y'' - y' - 2y = e^{3x}$

12.12. $y'' - 60y' - 900y = 5e^{10x}$

12.13. $y'' - 7y' = -3$

12.14. $y'' + \dfrac{1}{x}y' - \dfrac{1}{x^2}y = \ln x$ si se sabe que dos soluciones del problema homogéneo asociado son x y $1/x$.

12.15. $x^2y'' - xy' = x^3e^x$ si se sabe que dos soluciones del problema homogéneo asociado son 1 y x^2.

12.16. $y' - \dfrac{1}{x}y = x^2$

12.17. $y' + 2xy = x$

12.18. $y''' = 12$

12.19. $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \dfrac{e^t}{t^3}$

12.20. $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = \dfrac{e^{3t}}{t^2}$

12.21. $\ddot{x} + 4x = 4\sec^2 2t$

12.22. $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = \dfrac{e^t}{1+e^t}$

12.23. $(t^2-1)\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2x = (t^2-1)^2$ si se sabe que dos soluciones de las ecuaciones homogéneas asociadas son t y t^2+1.

12.24. $(t^2+t)\ddot{x} + (2-t^2)\dot{x} - (2+t)x = t(t+1)^2$ si se sabe que dos soluciones de las ecuaciones homogéneas asociadas son e^t y $1/t$.

12.25. $\dddot{r} - 3\ddot{r} + 3\dot{r} - r = \dfrac{e^t}{t}$

12.26. $\dddot{r} + 6\ddot{r} + 12\dot{r} + 8r = 12e^{-2t}$

12.27. $\dddot{z} - 5\ddot{z} + 25\dot{z} - 125z = 1000$

12.28. $\dfrac{d^3z}{d\theta^3} - 3\dfrac{d^2z}{d\theta^2} + 2\dfrac{dz}{d\theta} = \dfrac{e^{3\theta}}{1+e^\theta}$

12.29. $t^3\dddot{y} + 3t^2\ddot{y} = 1$ si se sabe que tres soluciones linealmente independientes de las ecuaciones homogéneas asociadas son $1/t$, 1 y t.

12.30. $y^{(5)} - 4y^{(3)} = 32e^{2x}$

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL PARA ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

13

Los problemas de valor inicial se resuelven aplicando las condiciones iniciales a la solución general de la ecuación diferencial. Se debe enfatizar que las condiciones iniciales se aplican *solamente* a la solución general *no* a la solución homogénea y_h, aun cuando y_h sea la que posea todas las constantes arbitrarias que se debén evaluar. La única excepción es cuando la solución general es la solución homogénea; es decir, cuando la ecuación diferencial que se está considerando es precisamente homogénea.

PROBLEMAS RESUELTOS

13.1. Resuelva $y'' - y' - 2y = 4x^2$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

La solución general de la ecuación está dada en el problema 11.1 como

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3 \tag{1}$$

Por lo tanto,

$$y' = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x} - 4x + 2 \tag{2}$$

Aplicando la primera condición inicial a (*1*) obtenemos

$$y(0) = c_1 e^{-(0)} + c_2 e^{2(0)} - 2(0)^2 + 2(0) - 3 = 1 \quad \text{o bien} \quad c_1 + c_2 = 4 \tag{3}$$

Aplicando la segunda condición inicial a (*2*) obtenemos

$$y'(0) = c_1 e^{-(0)} + c_2 e^{2(0)} - 4(0) + 2 = 4 \quad \text{o bien} \quad -c_1 + 2c_2 = 2 \tag{4}$$

Resolviendo (*3*) y (*4*) simultáneamente, encontramos que $c_1 = 2$ y $c_2 = 2$. Sustituyendo estos valores en (*1*) obtenemos la solución para el problema de valor inicial como

$$y = 2e^{-x} + 2e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$$

13.2. Resuelva $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$; $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

La solución general de la ecuación diferencial está dada en el problema 12.3 como

$$y = c_1 e^x + c_3 x e^x + x e^x \ln|x| \tag{1}$$

Por lo tanto,

$$y' = c_1 e^x + c_3 e^x + c_3 x e^x + e^x \ln|x| + x e^x \ln|x| + e^x \tag{2}$$

Aplicando la primera condición inicial a (*1*) obtenemos

$$y(1) = c_1 e^x + c_3(1)e^1 + (1)e^1 \ln 1 = 0$$

o bien (observando que ln 1 = 0),

$$c_1 e + c_3 e = 0 \tag{3}$$

Aplicando la segunda condición inicial a (2) obtenemos

$$y'(1) = c_1 e^1 + c_3 e^1 + c_3(1)e^1 + e^1 \ln 1 + (1)e^1 \ln 1 + e^1 = 1$$

o bien

$$c_1 e + 2c_3 e = 1 - e \tag{4}$$

Resolviendo (*3*) y (*4*) simultáneamente, encontramos que $c_1 = -c_3 = (e-1)/e$. Sustituyendo estos valores en (*1*) obtenemos la solución para el problema de valor inicial como

$$y = e^{x-1}(e-1)(1-x) + x e^x \ln|x|$$

13.3. Resuelva $y'' + 4y' + 8y = \operatorname{sen} x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Aquí $y_h = e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$ y, por el método de coeficientes indeterminados,

$$y_p = \frac{7}{65}\operatorname{sen} x - \frac{4}{65}\cos x$$

De este modo, la solución general para la ecuación diferencial es

$$y = e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) + \frac{7}{65}\operatorname{sen} x - \frac{4}{65}\cos x \tag{1}$$

Por lo tanto,

$$y' = -2e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) + e^{-2x}(-2c_1 \operatorname{sen} 2x + 2c_2 \cos 2x) + \frac{7}{65}\cos x + \frac{4}{65}\operatorname{sen} x \tag{2}$$

Aplicando la primera condición inicial a (*1*) obtenemos

$$c_1 = \frac{69}{65} \tag{3}$$

Aplicando la segunda condición inicial a (2) obtenemos

$$-2c_1 + 2c_2 = -\frac{7}{65} \tag{4}$$

Resolviendo (*3*) y (*4*) simultáneamente, encontramos que $c_1 = 69/65$ y $c_2 = 131/130$. Sustituyendo estos valores en (*1*) obtenemos la solución para el problema de valor inicial como

$$y = e^{-2x}\left(\frac{69}{65}\cos 2x + \frac{131}{130}\operatorname{sen} 2x\right) + \frac{7}{65}\operatorname{sen} x - \frac{4}{65}\cos x$$

13.4. Resuelva $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$; $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 0$, $y''(\pi) = 1$.

Del problema 10.1 tenemos

$$\begin{aligned} y_h &= c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} \\ y_h' &= c_1e^x + 2c_2e^{2x} + 3c_3e^{3x} \\ y_h'' &= c_1e^x + 4c_2e^{2x} + 9c_3e^{3x} \end{aligned} \tag{1}$$

Dado que la ecuación diferencial es homogénea, y_h es también la solución general. Aplicando cada condición inicial separadamente, obtenemos

$$\begin{aligned} y(\pi) &= c_1e^{\pi} + c_2e^{2\pi} + c_3e^{3\pi} = 0 \\ y'(\pi) &= c_1e^{\pi} + 2c_2e^{2\pi} + 3c_3e^{3\pi} = 0 \\ y''(\pi) &= c_1e^{\pi} + 4c_2e^{2\pi} + 9c_3e^{3\pi} = 1 \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones simultáneamente encontramos

$$c_1 = \frac{1}{2}e^{-\pi} \quad c_2 = -e^{-2\pi} \quad c_3 = \frac{1}{2}e^{-3\pi}$$

Sustituyendo estos valores en la primera ecuación (*1*) obtenemos

$$y = \frac{1}{2}e^{(x-\pi)} - e^{2(x-\pi)} + \frac{1}{2}e^{3(x-\pi)}$$

13.5. Resuelva $\ddot{x} + 4x = \operatorname{sen}^2 2t$; $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

La solución general de la ecuación diferencial está dada en el problema 12.5 como

$$x = c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{6}\cos^2 2t + \frac{1}{12}\operatorname{sen}^2 2t \tag{1}$$

Por lo tanto,

$$\dot{x} = -2c_1\operatorname{sen} 2t + c_2\cos 2t - \frac{1}{3}\cos 2t\operatorname{sen} 2t \tag{2}$$

Aplicando la primera condición inicial a (*1*) obtenemos

$$x(0) = c_1 + \frac{1}{6} = 0$$

De aquí $c_1 = -1/6$. Aplicando la segunda condición inicial a (2) obtenemos

$$\dot{x}(0) = 2c_2 = 0$$

De donde $c_2 = 0$. La solución al problema de valor inicial es

$$x = -\frac{1}{6}\cos 2t + \frac{1}{6}\cos^2 2t + \frac{1}{12}\operatorname{sen}^2 2t$$

13.6. Resuelva $\ddot{x} = 4x = \operatorname{sen}^2 2t$; $x(\pi/8) = 0$, $\dot{x}(\pi/8) = 0$.

La solución general de la ecuación diferencial y la derivada de la solución están dadas en (*1*) y (2) del problema 13.5. Aplicando la primera condición inicial obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = x\left(\frac{\pi}{8}\right) &= c_1\cos\frac{\pi}{4} + c_2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}\cos^2\frac{\pi}{4} + \frac{1}{12}\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4} \\ &= c_1\frac{\sqrt{2}}{2} + c_2\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

o bien

$$c_1 + c_2 = -\frac{\sqrt{2}}{8} \tag{1}$$

Aplicando la segunda condición inicial obtenemos

$$0=\dot{x}\left(\frac{\pi}{8}\right)=-2c_1\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+2c_2\cos\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$$

$$=-2c_1\frac{\sqrt{2}}{2}+2c_2\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

o bien

$$-c_1+c_2=\frac{\sqrt{2}}{12} \tag{2}$$

Resolviendo (*1*) y (*2*) simultáneamente encontramos que

$$c_1=-\frac{5}{48}\sqrt{2} \quad \text{y} \quad c_2=-\frac{1}{48}\sqrt{2}$$

de donde la solución al problema de valor inicial se convierte en

$$x=\frac{5}{48}\sqrt{2}\cos 2t-\frac{1}{48}\sqrt{2}\operatorname{sen}2t+\frac{1}{6}\cos^2 2t+\frac{1}{12}\operatorname{sen}^2 2t$$

PROBLEMAS ADICIONALES

Resuelva los siguientes problemas de valor inicial.

13.7. $y''-y'-2y=e^{3x};\ y(0)=1,\ y'(0)=2$

13.8. $y''-y'-2y=e^{3x};\ y(0)=2,\ y'(0)=1$

13.9. $y''-y'-2y=0;\ y(0)=2,\ y'(0)=1$

13.10. $y''-y'-2y=e^{3x};\ y(1)=2,\ y'(1)=1$

13.11. $y''+y=x;\ y(1)=0,\ y'(1)=1$

13.12. $y''+4y=\operatorname{sen}^2 2x;\ y(\pi)=0,\ y'(\pi)=0$

13.13. $y''+y=0;\ y(2)=0,\ y'(2)=0$

13.14. $y'''=12;\ y(1)=0,\ y'(1)=0,\ y''(1)=0$

13.15. $\ddot{y}=2\dot{y}+2y=\operatorname{sen}2t+\cos 2t;\ y(0)=0,\ \dot{y}(0)=1$

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

14

PROBLEMAS DE RESORTES

El sistema de resorte simple que se muestra en la figura 14-1 consiste de una masa m unida al extremo inferior del resorte que está suspendido verticalmente de un soporte. El sistema se encuentra en su *posición de equilibrio* cuando está en descanso. La masa se pone en movimiento por medio de uno o más de los siguientes medios: desplazando la masa de su posición de equilibrio, proporcionándole una velocidad inicial, o sometiéndola a una fuerza externa $F(t)$.

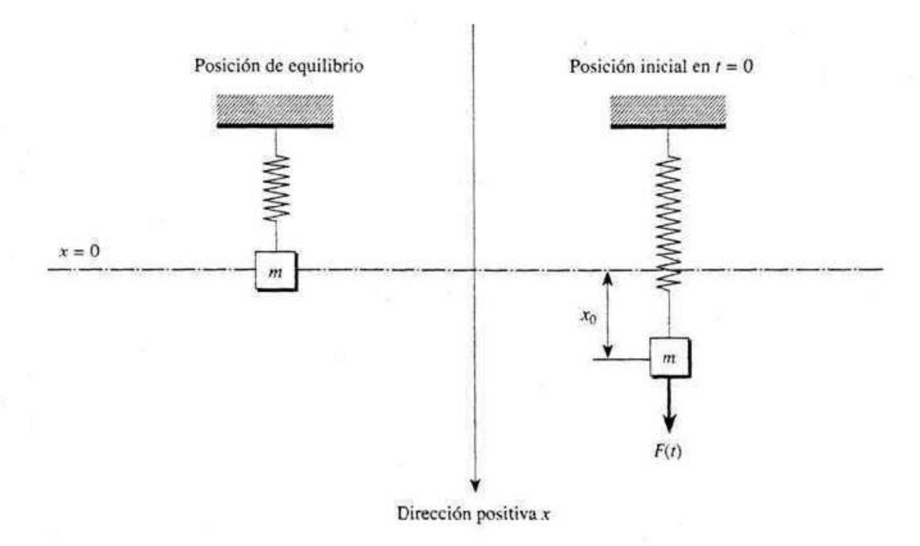


Figura 14-1

Ley de Hooke: *La fuerza restauradora F de un resorte es igual y opuesta a las fuerzas aplicadas al mismo y es proporcional a la extensión (contracción) l del resorte como resultado de la fuerza aplicada; es decir,* $F = -kl$, *donde k indica la constante de proporcionalidad, generalmente llamada constante del resorte.*

EJEMPLO 14.1. Una bola de acero que pesa 128 lb se suspende de un resorte, que se estira 2 pies de su longitud natural. La fuerza aplicada responsable de los 2 pies de desplazamiento es el peso de la bola, 128 lb. De este modo, $F = -128$ lb. La ley de Hooke proporciona entonces $-128 = -k(2)$, o $k = 64$ lb/pies.

Por conveniencia, elegimos la dirección descendente como la positiva y tomamos el origen como el centro de gravedad de la masa en la posición de equilibrio. Asumimos que la masa del resorte es muy pequeña y se puede no tomar en cuenta; además, la resistencia del aire, cuando está presente, es proporcional a la velocidad de la masa. De este modo, en cualquier tiempo t, hay tres fuerzas que actúan sobre el sistema: 1) $F(t)$, medida en la dirección positiva; 2) una fuerza restauradora dada por la ley de Hooke como $F_s = -kx$, $k > 0$, y 3) una fuerza debida a la resistencia del aire dada por $F_a = -a\dot{x}$, $a > 0$, donde a es la constante de proporcionalidad. Obsérvese que la fuerza restauradora F_s siempre actúa en una dirección que tenderá a regresar el sistema a su posición de equilibrio: si la masa está por debajo de la posición de equilibrio, entonces x es positiva y $-kx$ es negativa; mientras que si la masa está por encima de la posición de equilibrio, entonces x es negativa y $-kx$ es positiva. Obsérvese también que como $a > 0$, la fuerza F_a debida a la resistencia del aire actúa en la dirección opuesta a la velocidad y de esta forma tiende a retardar, o amortiguar, el movimiento de la masa.

Ahora, de la segunda ley de Newton (véase capítulo 7) tenemos que $m\ddot{x} = -kx - a\dot{x} + F(t)$, o bien

$$\ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m} \tag{14.1}$$

Si el sistema comienza en $t = 0$ con una velocidad inicial v_0 y desde una posición inicial x_0, también tenemos las condiciones iniciales

$$x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = v_0 \tag{14.2}$$

(Véanse problemas 14.1 a 14.10.)

La fuerza de gravedad no aparece explícitamente en (*14.1*), pero está presente de todas formas. Automáticamente compensamos esta fuerza midiendo la distancia desde la posición de equilibrio del resorte. Si se desea exhibir la gravedad explícitamente, entonces se debe medir la distancia entre el extremo final de la *longitud natural* del resorte. Esto es, el movimiento de un resorte que vibra puede estar dado por

$$\ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{F(t)'}{m}$$

si el origen, $x = 0$, es el punto terminal del resorte sin estirar antes de que se agregue la masa.

PROBLEMAS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

El circuito eléctrico simple que se muestra en la figura 14-2 consiste de un resistor R en ohmios; un capacitor C en faradios; un inductor L en henrios, y una fuerza electromotriz (fem) $E(t)$ en voltios, generalmente una batería o un

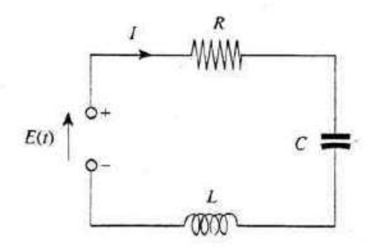


Figura 14-2

generador, todo conectado en serie. La corriente I que fluye a través del circuito se mide en amperios y la carga q en el capacitor se mide en culombios.

Ley de trayectorias cerradas (mallas) de Kirchhoff: *La suma algebraica de las caídas de voltaje en un circuito eléctrico simple cerrado es cero.*

Se sabe que las caídas de voltaje a través de un resistor, un capacitor y un inductor son respectivamente RI, $(1/C)q$ y $L(dI/dt)$ donde q es la carga en el capacitor. La caída de voltaje a través de una fem es $-E(t)$. De este modo, de la ley de las mallas de Kirchhoff, tenemos

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}q - E(t) = 0 \tag{14.3}$$

La relación entre q e I es

$$I = \frac{dq}{dt} \quad \frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \tag{14.4}$$

Sustituyendo estos valores en (*14.3*) obtenemos

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}E(t) \tag{14.5}$$

Las condiciones iniciales para q son

$$q(0) = q_0 \quad \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} = I(0) = I_0 \tag{14.6}$$

Para obtener una ecuación diferencial para la corriente, derivamos la ecuación (*14.3*) con respecto a t y luego sustituimos la ecuación (*14.4*) directamente en la ecuación resultante para obtener

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = \frac{1}{L}\frac{dE(t)}{dt} \tag{14.7}$$

La primera condición inicial es $I(0) = I_0$. La segunda condición inicial se obtiene de la ecuación (*14.3*) resolviendo para dI/dt y luego estableciendo $t = 0$. De este modo,

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{L}E(0) - \frac{R}{L}I_0 - \frac{1}{LC}q_0 \tag{14.8}$$

Una expresión para la corriente se puede conseguir ya sea resolviendo la ecuación (*14.7*) directamente o bien resolviendo la ecuación (*14.5*) para la carga y luego derivando esa expresión. (Véanse problemas 14.12 a 14.16.)

PROBLEMAS DE FLOTACIÓN

Considérese un cuerpo de masa m que esté sumergido parcial o totalmente en un líquido de densidad de peso ρ. Tal cuerpo experimenta dos fuerzas, una descendente debida a la gravedad y una fuerza contraria gobernada por el siguiente:

Principio de Arquímedes: *Un cuerpo en un líquido experimenta una flotación hacia arriba igual al peso del líquido desplazado por ese cuerpo.*

El equilibrio ocurre cuando la fuerza de flotación del líquido desplazado se iguala con la fuerza de gravedad sobre el cuerpo. La figura 14-3 ilustra la situación de un cilindro de radio r y peso H donde h unidades del peso del cilindro están sumergidas en equilibrio. En equilibrio, el volumen de agua desplazado por el cilindro es $\pi r^2 h$, lo que entrega una fuerza de flotación de $\pi r^2 h\rho$ que debe igualar al peso del cilindro mg. De este modo,

$$\pi r^2 hp = mg \tag{14.9}$$

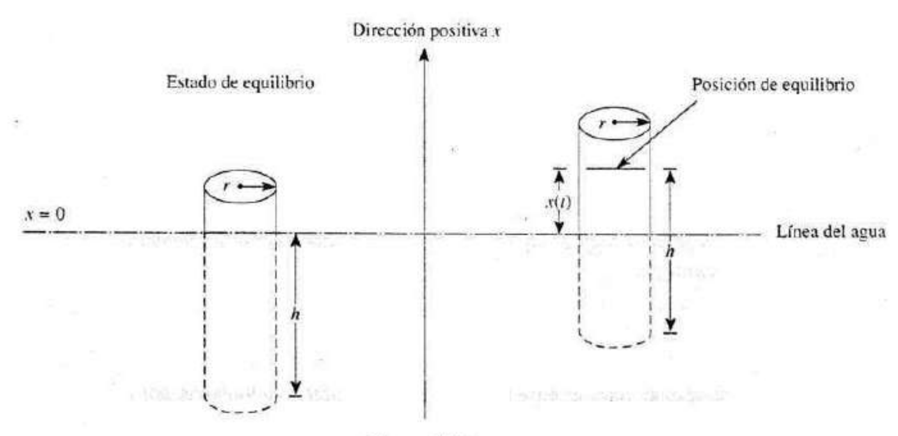


Figura 14-3

El movimiento ocurrirá cuando el cilindro se desplace de su posición de equilibrio. Arbitrariamente tomamos la dirección ascendente como la dirección positiva x. Si el cilindro es elevado fuera del agua por $x(t)$ unidades, tal como se muestra en la figura 14-3, entonces ya no está en equilibrio. La fuerza descendente o negativa sobre tal cuerpo sigue siendo mg, pero la flotación o fuerza positiva se reduce a $\pi r^2 [h - x(t)] \rho$. Ahora, a partir de la segunda ley de Newton, tenemos que

$$m\ddot{x} = \pi r^2 [h - x(t)] \rho - mg$$

Sustituyendo (*14.9*) en esta última ecuación, podemos simplificarla a

$$m\ddot{x} = -\pi r^2 x(t) \rho$$

o bien

$$\ddot{x} + \frac{\pi r^2 \rho}{m} x = 0 \qquad (14.10)$$

(Véanse problemas 14.19 a 14.24.)

CLASIFICACIÓN DE SOLUCIONES

Los resortes que vibran, los circuitos eléctricos y los cuerpos flotantes están todos gobernados por ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes de la forma

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = f(t) \qquad (14.11)$$

Para los problemas de resortes que vibran definidos por la ecuación (*14.1*), $a_1 = a/m$, $a_0 = k/m$ y $f(t) = F(t)/m$. Para problemas de cuerpos flotantes definidos por la ecuación (*14.10*), $a_1 = 0$, $a_0 = \pi r^2 \rho/m$ y $f(t) \equiv 0$. Para problemas de circuitos eléctricos, la variable independiente x se reemplaza por q en la ecuación (*14.5*) o bien I en la ecuación (*14.7*).

El movimiento o bien la corriente en todos estos sistemas se clasifican como *libres* y *no amortiguados* cuando $f(t) \equiv 0$ y $a_1 = 0$. Se clasifican como *libres* y *amortiguados* cuando $f(t)$ es idéntica a cero pero a_1 no es cero. Para movimientos amortiguados, hay tres casos separados que considerar, dependiendo de si las raíces de la ecuación característica asociada (véase capítulo 9) son números 1) reales y distintos, 2) iguales, o bien números 3) complejos conjugados. Estos tres casos se clasifican respectivamente como 1) *sobreamortiguados*, 2) *críticamente amortiguados*, y 3) *oscilatorios amortiguados* (o, en problemas eléctricos, *subamortiguados*). Si $f(t)$ no es idéntica a cero, el movimiento o la corriente se clasifican como *forzados*.

Un movimiento o una corriente es *transitorio o transitoria* si se "extingue" (es decir, llega a cero) conforme $t \to \infty$. Un movimiento o corriente de estado estacionario es el que no es transitorio o transitoria y no se vuelve ilimitado(a).

Los sistemas libres amortiguados siempre producen movimientos transitorios, en tanto que los sistemas amortiguados forzados (asumiendo que la fuerza externa es sinusoidal) producen tanto movimientos transitorios como de estado estacionario.

El movimiento libre no amortiguado definido por la ecuación (*14.11*) con $a_1 = 0$ y $f(t) \equiv 0$ siempre tiene soluciones de la forma

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t \tag{14.12}$$

que define al *movimiento armónico simple*. Aquí c_1, c_2 y ω son constantes con ω a menudo referida como *frecuencia circular*. La *frecuencia natural* f es

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

y representa el número de oscilaciones completas por unidad de tiempo adoptadas por la solución. El *periodo* del sistema del tiempo requerido para completar una oscilación es

$$T = \frac{1}{f}$$

La ecuación (*14.12*) tiene la forma alternativa

$$x(t) = (-1)^k A \cos(\omega t - \phi) \tag{14.13}$$

donde la *amplitud* $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, el *ángulo de fase* $\phi = \arctan(c_2/c_1)$ y k es cero cuando c_1 es positiva, y es la unidad cuando c_1 es negativa.

PROBLEMAS RESUELTOS

14.1. Una bola de acero que pesa 128 lb se suspende de un resorte, que luego se estira 2 pies de su longitud natural. La bola es puesta en movimiento sin velocidad inicial, desplazándola 6 pulgadas por encima de su posición de equilibrio. Asumiendo que no hay resistencia del aire, encuentre *a*) una expresión para la posición de la bola en cualquier tiempo t y *b*) la posición de la bola en $t = \pi/12$ seg.

a) La ecuación de movimiento está gobernada por la ecuación (*14.1*). No existe ninguna fuerza aplicada externamente, de modo que $F(t) = 0$, y tampoco hay resistencia del medio circundante, así que $a = 0$. El movimiento es libre y no amortiguado. Aquí $g = 32$ pies/seg^2, $m = 128/32 = 4$ unidades técnicas de masa y, del ejemplo 14.1, tenemos que $k = 64$ lb/pies. La ecuación (*14.1*) se convierte en $\ddot{x} + 16x = 0$. Las raíces de su ecuación característica son $\lambda = \pm 4i$, de modo que su solución es

$$x(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t \tag{1}$$

En $t = 0$, la posición de la bola es $x_0 = -\frac{1}{2}$ pie (se requiere el signo menos porque la bola es desplazada al principio *por encima* de la posición de equilibrio, la cual es la dirección *negativa*). Aplicando esta condición inicial a (*1*), encontramos que

$$-\frac{1}{2} = x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0 = c_1$$

de modo que (*1*) se convierte en

$$x(t) = -\frac{1}{2} \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t \tag{2}$$

La velocidad inicial está dada como $v_0 = 0$ pies/seg. Derivando (*2*) obtenemos

$$v(t) = \dot{x}(t) = 2 \operatorname{sen} 4t + 4c_2 \cos 4t$$

de donde
$$0 = v(0) = 2\,\text{sen}\,0 + 4c_2\cos 0 = 4c_2$$

De esta manera $c_2 = 0$ y (2) se simplifica así

$$x(t) = -\frac{1}{2}\cos 4t \tag{3}$$

como la ecuación de movimiento de la bola de acero en cualquier tiempo t.

b) En $t = \pi/12$,

$$x\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{12} = -\frac{1}{4}\,\text{pie}$$

14.2. Una masa de 2 kg se suspende de un resorte que tiene una constante conocida de 10 N/m y se le permite llegar a la posición de reposo. Luego se la pone en movimiento dándole una velocidad inicial de 150 cm/seg. Encuentre una expresión para el movimiento de la masa, asumiendo que no hay resistencia del aire.

La ecuación de movimiento está gobernada por la ecuación (*14.1*) y representa un movimiento libre no amortiguado porque no hay ninguna fuerza aplicada externamente sobre la masa, $F(t) = 0$, y no hay resistencia del medio circundante, $a = 0$. La masa y la constante del resorte están dadas como $m = 2$ kg y $k = 10$ N/m, respectivamente, de modo que la ecuación (*14.1*) se convierte en $\ddot{x} + 5x = 0$. Las raíces de esta ecuación característica son puramente imaginarias, de modo que la solución es

$$x(t) = c_1\cos\sqrt{5}t + c_2\,\text{sen}\sqrt{5}t \tag{1}$$

En $t = 0$, la posición de la bola es la posición de equilibrio $x_0 = 0$ m. Aplicando esta condición inicial en (*1*) encontramos que

$$0 = x(0) = c_1\cos 0 + c_2\,\text{sen}\,0 = c_1$$

de donde (*1*) se convierte en

$$x(t) = c_2\,\text{sen}\sqrt{5}t \tag{2}$$

La velocidad inicial está dada como $v_0 = 150$ cm/seg = 1.5 m/seg. Derivando (2) obtenemos

$$v(t) = \dot{x}(t) = \sqrt{5}c_2\cos\sqrt{5}t$$

de donde,
$$1.5 = v(0) = \sqrt{5}c_2\cos 0 = \sqrt{5}c_2 \qquad c_2 = \frac{1.5}{\sqrt{5}} = 0.6708$$

y (2) se simplifica así

$$x(t) = 0.6708\,\text{sen}\sqrt{5}t \tag{3}$$

como la posición de la masa en cualquier tiempo t.

14.3. Determine la frecuencia circular, la frecuencia natural y el periodo para el movimiento armónico simple descrito en el problema 14.2.

Frecuencia circular: $\omega = \sqrt{5} = 2.236$ ciclos/seg = 2.236 Hz

Frecuencia natural: $f = \omega/2\pi = \dfrac{\sqrt{5}}{2\pi} = 0.3559$ Hz

Periodo: $T = 1/f = \dfrac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.81$ seg

14.4. Determine la frecuencia circular, la frecuencia natural y el periodo para el movimiento armónico simple descrito en el problema 14.1.

Frecuencia circular:	$\omega = 4$ ciclos/seg $= 4$ Hz
Frecuencia natural:	$f = 4/2\pi = 0.6366$ Hz
Periodo:	$T = 1/f = \pi/2 = 1.57$ seg

14.5. Se amarra una masa de 10 kg a un resorte que se estira 0.7 m de su longitud natural. La masa se pone en movimiento desde la posición de equilibrio con una velocidad inicial de 1 m/seg en la dirección ascendente. Encuentre el movimiento subsiguiente, si la fuerza debida a la resistencia del aire es $-90\dot{x}$N.

Tomando $g = 9.8\,\text{m/seg}^2$, tenemos $w = mg = 98$N y $k = w/l = 140$N/m. Además, $a = 90$ y $F(t) \equiv 0$ (no hay fuerza externa). La ecuación (*14.1*) se convierte en

$$\ddot{x} + 9\dot{x} + 14 = 0 \qquad (1)$$

Las raíces de la ecuación característica asociada son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -7$, que son reales y distintas; de aquí que este problema sea un ejemplo de movimiento sobreamortiguado. La solución de (*1*) es

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-7t}$$

Las condiciones iniciales son $x(0) = 0$ (la masa parte de la posición de equilibrio) y $\dot{x}(0) = -1$ (la velocidad inicial es en dirección negativa). Aplicando estas condiciones, encontramos que $c_1 = -c_2 = -\frac{1}{5}$, así que $x = \frac{1}{5}(e^{-7t} - e^{-2t})$. Obsérvese que $x \to 0$ conforme $t \to \infty$; de este modo, el movimiento es transitorio.

14.6. Una masa de 1/4 unidad técnica de masa es atada a un resorte, que luego se estira 1.28 pies de su longitud natural. La masa se pone en movimiento desde la posición de equilibrio con una velocidad inicial de 4 pies/seg en dirección descendente. Encuentre el movimiento posterior de la masa si la fuerza debida a la resistencia del aire es $-2\dot{x}$ lb.

Aquí $m = 1/4$, $a = 2$, $F(t) \equiv 0$ (no hay fuerza externa), y, de la ley de Hooke, $k = mg/l = (1/4)(32)/1.28 = 6.25$. La ecuación (*14.1*) se convierte en

$$\ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 0 \qquad (1)$$

Las raíces de la ecuación característica asociada son $\lambda_1 = -4 + i3$ y $\lambda_2 = -4 - i3$, que son números complejos conjugados; de aquí que este problema sea un ejemplo de movimiento oscilatorio amortiguado. La solución de (*1*) es

$$x = e^{-4t}(c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t)$$

Las condiciones iniciales son $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 4$. Aplicando estas condiciones, encontramos que $c_1 = 0$ y $c_2 = \frac{4}{3}$; de este modo, $x = \frac{4}{3}e^{-4t}\operatorname{sen} 3t$. Dado que $x \to 0$ conforme $t \to \infty$, el movimiento es transitorio.

14.7. Una masa de 1/4 unidad técnica de masa es unida a un resorte que tiene una constante de 1 lb/pies. La masa se pone en movimiento desplazándola inicialmente 2 pies en dirección descendente y dándole una velocidad inicial de 2 pies/seg en dirección ascendente. Encuentre el movimiento subsiguiente de la masa si la fuerza debida a la resistencia del aire es $-1\dot{x}$lb.

Aquí $m = 1/4$, $a = 1$, $k = 1$ y $F(t) \equiv 0$. La ecuación (*14.1*) se convierte en

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0 \qquad (1)$$

Las raíces de la ecuación característica asociada son $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, que son iguales; de aquí que este problema sea un ejemplo de movimiento críticamente amortiguado. La solución de (*1*) es

$$x = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$$

Las condiciones iniciales son $x(0) = 2$ y $\dot{x}(0) = -2$ (la velocidad inicial es en dirección negativa). Aplicando estas condiciones, encontramos que $c_1 = c_2 = 2$. De este modo,

$$x = 2e^{-2t} + 2te^{-2t}$$

Dado que $x \to 0$ conforme que $t \to \infty$, el movimiento es transitorio.

14.8. Demuestre que los tipos de movimiento que resultan de los problemas de movimiento libre amortiguado están completamente determinados por la cantidad $a^2 - 4\,km$.

Para movimientos libres amortiguados, $F(t) \equiv 0$ y la ecuación (*14.1*) se convierte en

$$\ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Las raíces de la ecuación característica asociada son

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4km}}{2m} \qquad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4km}}{2m}$$

Si $a^2 - 4km > 0$, las raíces son reales y distintas; si $a^2 - 4\,km = 0$, las raíces son iguales; si $a^2 - 4km < 0$, las raíces son números complejos conjugados. Los correspondientes movimientos son, respectivamente, sobreamortiguado, críticamente amortiguado y oscilatorio amortiguado. Como las partes reales de ambas raíces son siempre negativas, el movimiento resultante en los tres casos es transitorio. (Para el movimiento sobreamortiguado, sólo debemos observar que $\sqrt{a^2 - 4km} < a$, mientras que para los otros dos casos las partes reales son ambas $-a/2m$.)

14.9. Una masa de 10 kg se une a un resorte que tiene una constante de 140 N/m. La masa se pone en movimiento desde su posición de equilibrio con una velocidad inicial de 1 m/seg en la dirección ascendente y con una fuerza externa aplicada $F(t) = 5$ sen t. Encuentre el movimiento posterior de la masa si la fuerza debida a la resistencia del aire es $-90\dot{x}$N.

Aquí $m = 10$, $k = 140$, $a = 90$ y $F(t) = 5\,\text{sen}\,t$. La ecuación de movimiento, (*14.1*), se convierte en

$$\ddot{x} + 9\dot{x} + 14x = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,t \tag{1}$$

La solución general para la ecuación homogénea asociada $\ddot{x} + 9\dot{x} + 14x = 0$ es (véase problema 14.5)

$$x_h = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-7t}$$

Usando el método de coeficientes indeterminados (véase capítulo 11), encontramos que

$$x_p = \frac{13}{500}\,\text{sen}\,t - \frac{9}{500}\cos t \tag{2}$$

La solución general de (*1*) es, por lo tanto,

$$x = x_h + x_p = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-7t} + \frac{13}{500}\,\text{sen}\,t - \frac{9}{500}\cos t$$

Aplicando las condiciones iniciales, $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = -1$, obtenemos

$$x = \frac{1}{500}(-90e^{-2t} + 99e^{-7t} + 13\,\text{sen}\,t - 9\cos t)$$

Obsérvese que los términos exponenciales, que provienen de x_h y aquí representan un movimiento libre sobreamortiguado y asociado, rápidamente se "extinguen". Estos términos son la parte transitoria de la solución. Sin embargo, los términos que provienen de x_p no desaparecen conforme $t \to \infty$; ellos son la parte del estado estacionario de la solución.

14.10. Un peso de 128 lb se une a un resorte que tiene una constante de 64 lb/pies. El peso se pone en movimiento sin velocidad inicial desplazándolo 6 pies hacia arriba de la posición de equilibrio y aplicándole simultáneamente una fuerza externa de $F(t) = 8$ sen $4\,t$. Asumiendo que no hay resistencia del aire, encuentre el movimiento subsiguiente del peso.

Aquí $m = 4$, $k = 64$, $a = 0$ y $F(t) = 8\,\text{sen}\,4t$; de aquí, la ecuación (*14.1*) se convierte en

$$\ddot{x} + 16x = 2\,\text{sen}\,4t \tag{1}$$

Por lo tanto, este problema es un ejemplo de movimiento no amortiguado forzado. La solución a la ecuación homogénea asociada es

$$x_h = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t$$

Una solución particular se encuentra por medio del método de los coeficientes indeterminados (aquí se necesita la modificación descrita en el capítulo 11): $x_p = -\frac{1}{4}\cos 4t$. Entonces, la solución para (*1*) es

$$x = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t - \frac{1}{4} t \cos 4t$$

Aplicando las condiciones iniciales $x(0) = -\frac{1}{2}$ y $\dot{x}(0) = 0$, obtenemos

$$x - \frac{1}{2}\cos 4t + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 4t - \frac{1}{4} t \cos 4t$$

Obsérvese que $|x| \to \infty$ conforme $t \to \infty$. Este fenómeno se llama *resonancia pura*. Es debido a la función de fuerza externa $F(t)$ que tiene la misma frecuencia circular que la del sistema libre no amortiguado y asociado.

14.11. Escriba el movimiento de estado estacionario hallado en el problema 14.9 en la forma especificada por la ecuación (*14.13*).

El desplazamiento de estado estacionario está dado por (*2*) del problema 14.9 como

$$x(t) = -\frac{9}{500}\cos t + \frac{13}{500}\operatorname{sen} t$$

Su frecuencia circular es $\omega = 1$. Aquí

$$A = \sqrt{\left(\frac{13}{500}\right)^2 + \left(-\frac{9}{500}\right)^2} = 0.0316$$

y

$$\phi = \arctan \frac{13/500}{-9/500} = -0.965 \text{ radianes}$$

El coeficiente del término coseno en el desplazamiento de estado estacionario es negativo, así que $k = 1$, y la ecuación (*14.13*) se convierte en

$$x(t) = -0.0316 \cos(t + 0.965)$$

14.12. Un circuito RCL conectado en serie tiene $R = 180$ ohmios, $C = 1/280$ faradio, $L = 20$ henrios y un voltaje aplicado $E(t) = 10 \operatorname{sen} t$. Asumiendo que no hay carga inicial en el capacitor, pero sí una corriente inicial de 1 amperio en $t = 0$ cuando el voltaje se aplica por primera vez, encuentre la carga posterior en el capacitor.

Sustituyendo las cantidades dadas en la ecuación (*14.5*) obtenemos

$$\ddot{q} + 9\dot{q} + 14q = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$$

Esta ecuación es idéntica en forma a (*1*) del problema 14.9; de aquí, la solución debe ser idéntica en forma a la solución de esa ecuación. De este modo,

$$q = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-7t} + \frac{13}{500}\operatorname{sen} t - \frac{9}{500}\cos t$$

Aplicando las condiciones iniciales $q(0) = 0$ y $q(0) = 0$ y $\dot{q}(0) = 1$, obtenemos $c_1 = 110/500$ y $c_2 = -101/500$. Por esto,

$$q = \frac{1}{500}(110e^{-2t} - 101e^{-7t} + 13 \operatorname{sen} t - 9\cos t)$$

Como en el problema 14.9, la solución es la suma de los términos transitorio y de estado estacionario.

14.13. Un circuito RCL conectado en serie tiene $R = 10$ ohmios, $C = 10^{-2}$ faradios, $L = ½$ henrio y un voltaje aplicado $E = 12$ voltios. Asumiendo que no hay corriente ni carga iniciales en $t = 0$ cuando el voltaje se aplica por primera vez, encuentre la corriente subsiguiente en el sistema.

Sustituyendo los valores dados en la ecuación (*14.7*), obtenemos la ecuación homogénea [dado que $E(t) = 12$, $dE/dt = 0$]

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 20\frac{dI}{dt} + 200I = 0$$

Las raíces de la ecuación característica asociada son $\lambda_1 = -10 + 10i$ y $\lambda_2 - 10 - 10i$; de aquí, éste es un ejemplo de un sistema libre subamortiguado para la corriente. La solución es

$$I = e^{-10t}(c_1 \cos 10t + c_2 \operatorname{sen} 10t) \tag{1}$$

Las condiciones iniciales son $I(0) = 0$ y, de la ecuación (*14.8*),

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = \frac{12}{1/2} - \left(\frac{10}{1/2}\right)(0) - \frac{1}{(1/2)(10^{-2})}(0) = 24$$

Aplicando estas condiciones a (*1*) obtenemos $c_1 = 0$ y $c_2 = \frac{12}{5}$; por lo tanto, $I = \frac{12}{5}e^{-10t}$ la cual es completamente transitoria.

14.14. Resuelva el problema 14.13 hallando primero la carga en el capacitor.

Para resolver el problema, en primer lugar determinamos la carga q y luego usamos $I = dq/dt$ para obtener la corriente. Sustituyendo los valores dados en el problema 14.13 en la ecuación (*14.5*) tenemos $\ddot{q} + 20\dot{q} + 200q = 24$, que representa un sistema forzado para la carga, en contraste con el sistema libre amortiguado obtenido en el problema 14.13 para la corriente. Usando el método de los coeficientes indeterminados para hallar una solución particular, obtenemos la solución general

$$q = e^{-10t}(c_1 \cos 10t + c_2 \operatorname{sen} 10t) + \frac{3}{25}$$

Las condiciones iniciales para la carga son $q(0) = 0$ y $\dot{q}(0) = 0$; aplicándolas, obtenemos $c_1 = c_2 = -3/25$. Por lo tanto,

$$q = -e^{-10t}\left(\frac{3}{25}\cos 10t + \frac{3}{25}\operatorname{sen} 10t\right) + \frac{3}{25}$$

e

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{12}{5}e^{-10t}\operatorname{sen} 10t$$

tal como antes.

Obsérvese que aunque la corriente es completamente transitoria, la carga en el capacitor es la suma de ambos términos: el transitorio y el de estado estacionario.

14.15. Un circuito RCL conectado en serie tiene una resistencia de 5 ohmios, una inductancia de 0.05 henrio, un capacitor de 4×10^{-4} faradios y una fem alterna aplicada de 200 cos $100t$ voltios. Encuentre una expresión para la corriente que fluye a través de este circuito si la corriente y la carga iniciales en el capacitor son ambas cero.

Aquí $R/L = 5/0.05 = 100$, $1/(LC) = 1/[0.05(4 \times 10^{-4})] = 50\,000$, y

$$\frac{1}{L}\frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{0.05}200(-100 \operatorname{sen} 100t) = -400\,000 \operatorname{sen} 100t$$

así que la ecuación (*14.7*) se convierte en

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 100\frac{dI}{dt} + 50\,000I = -400\,000 \operatorname{sen} 100t$$

Las raíces de su ecuación característica son $-50 \pm 50\sqrt{19}i$, por lo tanto la solución al problema homogéneo asociado es

$$I_h = c_1e^{-50t}\cos 50\sqrt{19}t + c_2e^{-50t}\operatorname{sen} 50\sqrt{19}t$$

Usando el método de los coeficientes indeterminados encontramos que una solución particular es

$$I_p = \frac{40}{17}\cos 100t - \frac{160}{17}\operatorname{sen} 100t$$

de modo que la solución general es

$$I = I_h + I_p = c_1e^{-50t}\cos 50\sqrt{19}t + c_2e^{-50t}\operatorname{sen} 50\sqrt{19}t + \frac{40}{17}\cos 100t - \frac{160}{17}\operatorname{sen} 100t \tag{1}$$

Las condiciones iniciales son $I(0) = 0$ y, de la ecuación *(14.8)*,

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = \frac{200}{0.05} - \frac{5}{0.05}(0) - \frac{1}{0.05(4\times 10^{-4})}(0) = 4\ 000$$

Aplicando la primera de estas condiciones directamente a *(1)* obtenemos

$$0 = I(0) = c_1(1) + c_2(0) + \frac{40}{17}$$

o bien $c_1 = -40/17 = -2.35$. Sustituyendo este valor en *(1)* y luego derivando, encontramos que

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= -2.35(-50e^{-50t}\cos 50\sqrt{19}t - 50\sqrt{19}e^{-50t}\operatorname{sen} 50\sqrt{19}t)\\ &\quad + c_2(-50e^{-50t}\operatorname{sen} 50\sqrt{19}t + 50\sqrt{19}e^{-50t}\cos 50\sqrt{19}t) - \frac{4\ 000}{17}\operatorname{sen} 100t - \frac{16\ 000}{17}\cos 100t\end{aligned}$$

de donde

$$4\ 000 = \left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = -2.35(-50) + c_2(50\sqrt{19}) - \frac{16\ 000}{17}$$

y $c_2 = 22.13$. La ecuación *(1)* se convierte en

$$I = -2.35e^{-50t}\cos 50\sqrt{19}t + 22.13e^{-50t}\operatorname{sen} 50\sqrt{19}t + \frac{40}{17}\cos 100t - \frac{160}{17}\operatorname{sen} 100t$$

14.16. Resuelva el problema 14.15 encontrando primero la carga en el capacitor.

Sustituyendo los valores dados en el problema 14.15 en la ecuación *(14.5)* obtenemos

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 100\frac{dq}{dt} + 50\ 000q = 4\ 000\cos 100t$$

La ecuación homogénea asociada es idéntica en forma a la del problema 14.15 de modo que tiene la misma solución (con I_h reemplazado por q_h). Usando el método de los coeficientes indeterminados encontramos que la solución particular es

$$q_p = \frac{16}{170}\cos 100t + \frac{4}{170}\operatorname{sen} 100t$$

de modo que la solución general es

$$q = q_h + q_p = c_1e^{-50t}\cos 50\sqrt{19}t + c_2e^{-50t}\operatorname{sen} 50\sqrt{19}t + \frac{16}{170}\cos 100t + \frac{4}{170}\operatorname{sen} 100t \tag{1}$$

Las condiciones iniciales sobre la carga son $q(0) = 0$ y

$$\left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} = I(0) = 0$$

Aplicando la primera de estas condiciones directamente a *(1)* obtenemos

$$0 = q(0) = c_1(1) + c_2(0) + \frac{16}{170}$$

o bien $c_1 = -16/170 = -0.0941$. Sustituyendo este valor en *(1)* y luego derivando, encontramos que

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= -0.0941(-50e^{-50t}\cos 50\sqrt{19}t - 50\sqrt{19}e^{50t}\operatorname{sen} 50\sqrt{19}t)\\ &\quad + c_2(-50e^{-50t}\operatorname{sen} 50\sqrt{19}t + 50\sqrt{19}e^{-50t}\cos 50\sqrt{19}t) - \frac{160}{17}\operatorname{sen} 100t + \frac{40}{17}\cos 100t\end{aligned} \tag{2}$$

de donde $$0 = \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} = -0.0941(-50) + c_2(50\sqrt{19}) + \frac{40}{17}$$

y $c_2 = -0.0324$. Sustituyendo este valor en (2) y simplificando, obtenemos, como antes

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -2.35e^{-50t}\cos 50\sqrt{19}t + 22.13e^{-50t}\operatorname{sen} 50\sqrt{19}t + \frac{40}{17}\cos 100t - \frac{160}{17}\operatorname{sen} 100t \qquad (3)$$

14.17. Determine la frecuencia circular, la frecuencia natural y el periodo de la corriente de estado estacionario hallados en el problema 14.16.

La corriente está dada por (3) del problema 14.16. Conforme $t \to \infty$, los términos exponenciales tienden a cero, de modo que la corriente de estado estacionario es

$$I(t) = \frac{40}{17}\cos 100t - \frac{160}{17}\operatorname{sen} 100t$$

Frecuencia circular: $\omega = 100$ Hz

Frecuencia natural: $f = \omega/2\pi = 100/2\pi = 15.92$ Hz

Periodo: $T = 1/f = 2\pi/100 = 0.063$ seg

14.18. Escriba la corriente de estado estacionario hallada en el problema 14.17 en la forma especificada por la ecuación (*14.13*).

La amplitud es

$$A = \sqrt{\left(\frac{40}{17}\right)^2 + \left(-\frac{160}{17}\right)^2} = 9.701$$

y el ángulo de fase es

$$\phi = \arctan\frac{-160/17}{40/17} = -1.326 \text{ radianes}$$

La frecuencia circular es $\omega = 100$. El coeficiente del término con coseno es positivo, así que $k = 0$ y la ecuación (*14.13*) se convierte en

$$I_s(t) = 9.701\cos(100t + 1.326)$$

14.19. Determine si un cilindro de 4 pulgadas de radio, 10 pulgadas de altura y 15 lb de peso puede flotar en un estanque profundo de agua de 62.5 lb/pies^3 de densidad de peso.

Aquí h denota la longitud (en pies) de la porción sumergida del cilindro en equilibrio. Con $r = \frac{1}{3}$ pies, se sigue de la ecuación (*14.9*) que

$$h = \frac{mg}{\pi r^2 \rho} = \frac{15}{\pi\left(\frac{1}{3}\right)^2 62.5} = 0.688 \text{ pies} = 8.25 \text{ pulg}$$

De este modo, el cilindro flotará con $10 - 8.25 = 1.75$ pulgadas de longitud por encima de la línea del agua en equilibrio.

14.20. Determine una expresión para el movimiento del cilindro descrito en el problema 14.19 si se le libera con 20 por ciento de su longitud por encima de la línea del agua y con una velocidad inicial de 5 pies/seg en dirección descendente.

Aquí $r = \frac{1}{3}$ pies, $\rho = 62.5\,\text{lb/pies}^3$, $m = 15/32$ unidades técnicas de masa y la ecuación (*14.10*) se convierte en

$$\ddot{x} + 46.5421x = 0$$

Las raíces de la ecuación característica asociada son $\pm\sqrt{46.5241}i = \pm 6.82i$; la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1 \cos 6.82t + c_2 \operatorname{sen} 6.82t \tag{1}$$

En $t = 0$, 20 por ciento de las 10 pulgadas de longitud del cilindro, o bien 2 pulgadas, está afuera del agua. Usando los resultados del problema 14.19, sabemos que la posición de equilibrio tiene 1.75 pulgadas por encima del agua, de modo que en $t = 0$, el cilindro es elevado ¼ pulgadas o 1/48 pies por encima de su posición de equilibrio. En el contexto de la figura 14-3, $x(0) = 1/48$ pies. La velocidad inicial es 5 pies/seg en la dirección descendente o *negativa* en el sistema de coordenadas de la figura 14-3, de modo que $\dot{x}(0) = -5$. Aplicando estas condiciones iniciales a (*1*) encontramos que

$$c_1 = \frac{1}{48} = 0.021 \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{-5}{6.82} = -0.73$$

La ecuación (*1*) se convierte en

$$x(t) = 0.021 \cos 6.82t - 0.73 \operatorname{sen} 6.82t$$

14.21. Determine si un cilindro de 10 cm de diámetro, 15 cm de altura y 19.6 N de peso puede flotar en un estanque profundo de agua de 980 dinas/cm^3 de densidad de peso.

Aquí h denota la altura (en centímetros) de la porción sumergida del cilindro en equilibrio. Con $r = 5$ cm y $mg = 19.6 \text{ N} = 1.96 \times 10^6$ dinas, se sigue de la ecuación (*14.9*), que

$$h = \frac{mg}{\pi r^2 \rho} = \frac{1.96 \times 10^6}{\pi (5)^2 (980)} = 25.5 \text{ cm}$$

Dado que esto representa más altura de la que el cilindro posee, éste no puede desplazar suficiente agua para flotar y se hundirá hasta el fondo del estanque.

14.22. Determine si un cilindro de 10 cm de radio, 15 cm de altura y 19.6 N de peso puede flotar en un estanque profundo de un líquido de 2 450 dinas/cm^3 de densidad de peso.

Sea h la que represente la altura de la porción sumergida del cilindro en equilibrio. Con $r = 5$ cm y $mg = 19.6$ N = 1.96×10^6 dinas, se sigue de la ecuación (*14.9*) que

$$h = \frac{mg}{\pi r^2 \rho} = \frac{1.96 \times 10^6}{\pi (5)^2 (2\,450)} = 10.2 \text{ cm}$$

De este modo, el cilindro flotará con 15 – 10.2 = 4.8 cm de longitud por encima del líquido y en equilibrio.

14.23. Determine una expresión para el movimiento del cilindro descrito en el problema 14.22 si se le suelta hasta la posición de reposo con 12 cm de su longitud completamente sumergida.

Aquí $r = 5$ cm, $\rho = 2\,450 \text{ dinas/cm}^3$, $m = 19.6/9.8 = 2 \text{ kg} = 2\,000 \text{ g}$ y la ecuación (*14.10*) se convierte en

$$\ddot{x} + 96.21x = 0$$

Las raíces de la ecuación característica asociada son $\pm\sqrt{96.21}i = \pm 9.8i$; la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1 \cos 9.81t + c_2 \operatorname{sen} 9.81t \tag{1}$$

En $t = 0$ se sumergen 12 cm de la longitud del cilindro. Utilizando los resultados del problema 14.22, sabemos que la posición de equilibrio tiene 10.2 cm sumergidos, de modo que en $t = 0$, el cilindro está sumergido 12 – 10.2 cm = 1.8 cm *por debajo* de su posición de equilibrio. En el contexto de la figura 14-3, $x(0) = -1.8$ cm con un signo negativo que indica que la línea de equilibrio está sumergida. El cilindro comienza en reposo, de modo que su velocidad inicial es $\dot{x}(0) = 0$. Aplicando estas condiciones iniciales a (*1*) encontramos que $c_1 = -1.8$ y $c_2 = 0$. La ecuación (*1*) se convierte en

14.24. Un cilindro sólido parcialmente sumergido en agua que tiene una densidad de peso de 62.5 lb/pies^3, con su eje vertical, oscila hacia arriba y abajo dentro de un periodo de 0.6 seg. Determine el diámetro del cilindro si éste pesa 2 lb.

Con $\rho = 62.5$ lb/ft^3 y $m = 2/32$ slugs, unidades técnicas de masa, la ecuación (*14.10*) se convierte en

$$\ddot{x} + 1\,000\pi r^2 x = 0$$

que tiene como su solución general

$$x(t) = c_1 \cos\sqrt{1\,000\pi}\, rt + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{1\,000\pi}\, rt \qquad (1)$$

Su frecuencia circular es $\omega = \sqrt{1\,000\pi}$; su frecuencia natural es $f = \omega/2\pi = r\sqrt{250\;\pi} = 8.92r$ y su periodo es $T = 1/f = 1/8.92r$. Sabemos que $0.6 = T = 1/8.92r$, de este modo $r = 0.187$ pies $= 2.24$ pulgadas con un diámetro de 4.48 pulgadas.

14.25. Un prisma cuya sección transversal es un triángulo equilátero con lados de longitud l flota en un estanque de líquido de densidad de peso ρ, con su altura paralela al eje vertical. El prisma se coloca en movimiento desplazándolo de su posición de equilibrio (véase figura 14-4) y dándole una velocidad inicial. Determine la ecuación diferencial que gobierna el movimiento subsiguiente de este prisma.

El equilibrio ocurre cuando la fuerza de flotación del líquido desplazado se iguala con la fuerza de gravedad del cuerpo. El área de un triángulo equilátero con lados de longitud l es $A = \sqrt{3}\,l^2/4$. Para el prisma bosquejado en la figura 14-4, con h unidades de altura sumergidas en equilibrio, el volumen de agua desplazado en equilibrio es $\sqrt{3}l\,h/4$, con la condición de que exista una fuerza de flotación de $\sqrt{3}\,l^2 h\rho/4$. Por el principio de Arquímedes, esta fuerza de flotación en equilibrio debe igualar el peso del prisma mg; de aquí

$$\sqrt{3}\,l^2 h\rho/4 = mg \qquad (1)$$

Arbitrariamente tomamos la dirección ascendente como dirección positiva x. Si el prisma es elevado fuera del agua por $x(t)$ unidades, tal como se muestra en la figura 14-4, entonces ya no está en equilibrio. La fuerza negativa o descendente sobre tal cuerpo sigue siendo mg, pero la flotación o fuerza positiva se reduce a $\sqrt{3}\,l^2\,[h - x(t)]\,\rho/4$. Ahora tenemos, de la segunda ley de Newton que

$$m\ddot{x} = \frac{\sqrt{3}l^2\,[h - x(t)]\,\rho}{4} - mg$$

Sustituyendo (*1*) en esta última ecuación simplificamos a

$$\ddot{x} + \frac{\sqrt{3}l^2\rho}{4m}x = 0$$

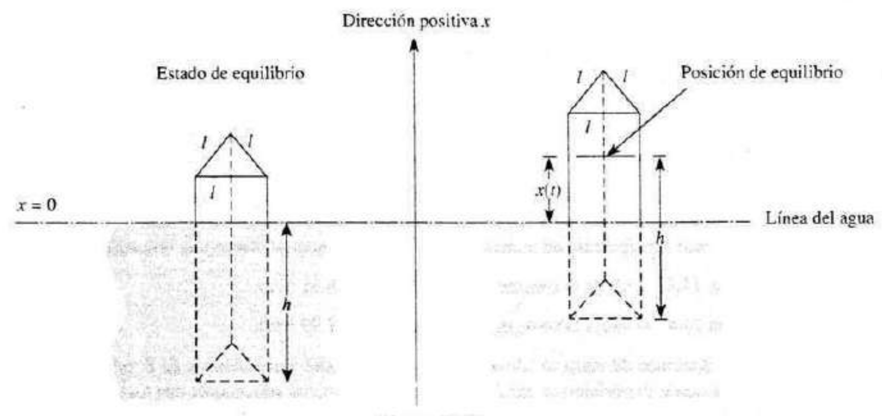


Figura 14-4

PROBLEMAS ADICIONALES

14.26. Un peso de 10 lb se suspende de un resorte que se estira 2 pulgadas de su longitud natural. Encuentre la constante del resorte.

14.27. Una masa de 0.4 unidad técnica de masa se cuelga de un resorte que se estira 9 pulgadas de su longitud natural. Encuentre la constante del resorte.

14.28. Una masa de 0.4 g se cuelga de un resorte que se estira 3 cm de su longitud natural. Encuentre la constante del resorte.

14.29. Una masa de 0.3 kg se cuelga de un resorte que se estira 15 cm de su longitud natural. Encuentre la constante del resorte.

14.30. Un peso de 20 lb se suspende del extremo de un resorte vertical que tiene una constante de 40 lb/pies y se le permite alcanzar el equilibrio. Luego se le pone en movimiento estirando el resorte 2 pulgadas desde su posición de equilibrio y liberando a la masa desde el reposo. Encuentre la posición del peso en cualquier momento t si no hay fuerza externa ni resistencia del aire.

14.31. Resuelva el problema 14.30 si el peso se pone en movimiento comprimiendo el resorte desde su posición de equilibrio y dándole una velocidad inicial de 2 pies/seg en dirección descendente.

14.32. Una masa de 20 g se suspende del extremo de un resorte vertical que tiene una constante de 2880 dinas/cm y se le permite alcanzar el equilibrio. Después se le pone en movimiento estirándolo 3 cm desde su posición de equilibrio y liberando la masa con una velocidad de 10 cm/seg en la dirección descendente. Encuentre la posición de la masa en cualquier momento t si no hay ni fuerza externa ni resistencia del aire.

14.33. Se sujeta un peso de 32 lb a un resorte, estirándolo 8 pies de su longitud natural. El peso se pone en movimiento desplazándolo 1 pie en la dirección ascendente y dándole una velocidad inicial de 2 pies/seg en la dirección descendente. Encuentre el movimiento subsiguiente de la posición del peso, si el medio ofrece una resistencia muy pequeña.

14.34. Determine *a*) la frecuencia circular, *b*) la frecuencia natural y *c*) el periodo para las vibraciones descritas en el problema 14.31.

14.35. Determine *a*) la frecuencia circular, *b*) la frecuencia natural y *c*) el periodo para las vibraciones descritas en el problema 14.32.

14.36. Determine *a*) la frecuencia circular, *b*) la frecuencia natural y *c*) el periodo para las vibraciones descritas en el problema 14.33.

14.37. Encuentre la solución a la ecuación (*14.1*) con las condiciones iniciales dadas por la ecuación (*14.2*) cuando las vibraciones son libres y no amortiguadas.

14.38. Una masa de $\frac{1}{4}$ de unidad técnica de masa se cuelga de un resorte que se estira 6 pulgadas de su longitud natural. La masa se pone en movimiento con una velocidad inicial de 4 pies/seg en la dirección ascendente. Encuentre el movimiento posterior de la masa, si la fuerza debida a la resistencia del aire es $-2\dot{x}$ lb.

14.39. Una masa de $\frac{1}{2}$ unidad técnica de masa es unida a un resorte que se estira 2 pies de su longitud natural. La masa se pone en movimiento sin velocidad inicial desplazándola ½ pies en la dirección ascendente. Encuentre el movimiento subsiguiente de la masa, si el medio circundante ofrece una resistencia de $-4\dot{x}$ lb.

14.40. Una masa de $\frac{1}{2}$ unidad técnica de masa se sujeta de un resorte que tiene una constante de 6 lb/pies. La masa se pone en movimiento desplazándola 6 pulgadas por debajo de su posición de equilibrio sin velocidad inicial. Encuentre el movimiento posterior de la masa, si la fuerza debida al medio es de $-4\dot{x}$ lb.

14.41. Una masa de $\frac{1}{2}$ kg se amarra a un resorte que tiene una constante de 8 N/m. La masa se pone en movimiento desplazándola 10 cm por encima de su posición de equilibrio con una velocidad inicial de 2 m/seg en la dirección ascendente. Encuentre el movimiento subsiguiente de la masa, si el medio circundante ofrece una resistencia de $-4\dot{x}$ N.

14.42. Resuelva el problema 14.41 si ahora la constante del resorte es de 8.01 N/m.

14.43. Resuelva el problema 14.41 si ahora la constante del resorte es de 7.99 N/m.

14.44. Una masa de 1 unidad técnica de masa se adosa a un resorte que tiene una constante de 8 lb/ft. La masa se pone inicialmente en movimiento desde su posición de equilibrio sin velocidad inicial aplicándole una fuerza externa $F(t) = 16\cos 4t$. Encuentre el movimiento posterior de la masa, si la fuerza debida a la resistencia del aire es $-4\dot{x}$ lb.

14.45. Un peso de 64 lb se une a un resorte que se estira 1.28 pies y se le permite regresar a su posición de reposo. El peso se pone en movimiento aplicándole una fuerza externa $F(t) = 4\,\text{sen}\,2t$. Encuentre el movimiento subsiguiente del peso si el medio circundante ofrece una resistencia muy pequeña.

14.46. Un peso de 128 lb se ata a un resorte que se estira 2 pies y se le permite regresar a su posición de reposo. El peso se pone en movimiento desde el reposo desplazándolo 6 pulgadas por encima de su posición de equilibrio y aplicándole además una fuerza externa $F(t) = 8\,\text{sen}\,4t$. Encuentre el movimiento posterior del peso si el medio circundante ofrece una resistencia muy pequeña.

14.47. Resuelva el problema 14.38 si, además, la masa es sometida a una fuerza externamente aplicada de $F(t) = 16\,\text{sen}\,8t$.

14.48. Un peso de 16 lb se une a un resorte que se estira 1.6 pies y se le permite llegar a la posición de reposo. La masa se pone en movimiento desde el reposo desplazando el resorte 9 pulgadas por encima de su posición de equilibrio y aplicándole además una fuerza externa de $F(t) = 5\cos 2t$. Encuentre el movimiento subsiguiente del peso, si el medio circundante ofrece una resistencia de $-2\dot{x}$ lb.

14.49. Escriba la porción de estado estacionario del movimiento hallado en el problema 14.48 en la forma especificada por la ecuación (*14.13*).

14.50. Una masa de $\frac{1}{2}$ kg se une a un resorte que tiene una constante de 6 N/m y se le permite llegar a la posición de reposo. La masa se pone en movimiento aplicándole una fuerza externa $F(t) = 24\cos 3t - 33\,\text{sen}\,3t$. Encuentre el movimiento posterior de la masa, si el medio circundante ofrece una resistencia de $-3\dot{x}$ N.

14.51. Escriba la porción de estado estacionario del movimiento hallado en el problema 14.50 en la forma de la ecuación (*14.13*).

14.52. Un circuito RCL conectado en serie con $R = 6$ ohmios, $C = 0.02$ faradio, $L = 0.1$ henrio tiene un voltaje aplicado $E(t) =$ 6 voltios. Asumiendo que no hay corriente ni carga iniciales en $t = 0$ cuando el voltaje se aplica por vez primera, encuentre la carga subsiguiente en el capacitor y la corriente en el circuito.

14.53. Un circuito RCL conectado en serie con una resistencia de 5 ohmios, un condensador de capacitancia de 4×10^{-4} faradios, y una inductancia de 0.05 henrio tiene una fem aplicada $E(t) = 110$ voltios. Asumiendo que no hay corriente ni carga iniciales en el capacitor, encuentre expresiones para la corriente que fluye a través del circuito y la carga en el capacitor en cualquier tiempo t.

14.54. Un circuito RCL conectado en serie con $R = 6$ ohms, $C = 0.02$ faradio, $L = 0.1$ henrio no tiene voltaje aplicado. Encuentre la corriente posterior en el circuito si la carga inicial en el capacitor es $\frac{1}{10}$ culombios y la corriente inicial es cero.

14.55. Un circuito RCL conectado en serie con una resistencia de 1 000 ohmios, un condensador de capacitancia de 4×10^{-6} faradios, y una inductancia de 1 henrio tiene una fem aplicada $E(t) = 24$ voltios. Asumiendo que no hay corriente ni carga iniciales en el capacitor, encuentre una expresión para la corriente que fluye a través del circuito en cualquier tiempo t.

14.56. Un circuito RCL conectado en serie con una resistencia de 4 ohmios, un capacitor de 1/26 faradio, y una inductancia de $\frac{1}{2}$ henrio tiene un voltaje aplicado $E(t) = 16\cos 2t$. Asumiendo que no hay corriente ni carga iniciales en el capacitor, encuentre una expresión para la corriente que fluye a través del circuito en cualquier tiempo t.

14.57. Determine la corriente de estado estacionario en el circuito descrito en el problema 14.56 y escríbala en la forma de la ecuación (*14.13*).

14.58. Un circuito RCL conectado en serie con una resistencia de 16 ohmios, un capacitor de 0.02 faradios, y una inductancia de 2 henrios tiene un voltaje aplicado $E(t) = 100\,\text{sen}\,3t$. Asumiendo que no hay corriente ni carga iniciales en el capacitor, encuentre una expresión para la corriente que fluye a través del circuito en cualquier tiempo t.

14.59. Determine la corriente de estado estacionario en el circuito descrito en el problema 14.56 y escríbala en la forma de la ecuación (*14.13*).

14.60. Un circuito RCL conectado en serie con una resistencia de 20 ohms, un capacitor de 10^{-4} faradios, y una inductancia de 0.05 henrio tiene un voltaje aplicado $E(t) = 100\cos 200t$. Asumiendo que no hay corriente ni carga iniciales en el capacitor, encuentre una expresión para la corriente que fluye a través del circuito en cualquier tiempo t.

14.61. Determine la corriente de estado estacionario en el circuito descrito en el problema 14.60 y escríbala en la forma de la ecuación (*14.13*).

14.62. Un circuito RCL conectado en serie con una resistencia de 2 ohmios, un capacitor de 1/260 faradio, y una inductancia de 0.1 henrio tiene un voltaje aplicado $E(t) = 100\,\text{sen}\,60t$. Asumiendo que no hay corriente ni carga iniciales en el capacitor, encuentre una expresión para la carga en el capacitor en cualquier tiempo t.

14.63. Determine la carga de estado estacionario en el capacitor del circuito descrito en el problema 14.62 y escríbala en la forma de la ecuación (*14.13*).

14.64. Un circuito RCL conectado en serie tiene $R = 5$ ohmios, $C = 10^{-2}$ faradios, $L = \frac{1}{8}$ henrio, y no tiene voltaje aplicado. Encuentre la corriente de estado estacionario en el circuito. *Sugerencia:* No se necesitan las condiciones iniciales.

14.65. Un circuito RCL conectado en serie tiene $R = 5$ ohmios, $C = 10^{-2}$ faradios, $L = \frac{1}{8}$ henrio, y tiene voltaje aplicado $E(t) =$ sen t. Encuentre la corriente de estado estacionario en el circuito. *Sugerencia:* No se necesitan las condiciones iniciales.

14.66. Determine la posición de equilibrio de un cilindro de 3 pulgadas de radio, 20 pulgadas de altura y 5π lb de peso que está flotando con su eje vertical en un estanque de agua profundo con una densidad del peso de 62.5 lb/pies^3.

14.67. Encuentre una expresión para el movimiento del cilindro descrito en el problema 14.66 si se le mueve desde su posición de equilibrio sumergiéndolo 2 pulgadas adicionales por debajo de la línea del agua y con una velocidad de 1 pie/seg en dirección descendente.

14.68. Escriba el movimiento armónico del cilindro descrito en el problema 14.67 en la forma de la ecuación (*14.13*).

14.69. Determine la posición de equilibrio de un cilindro de 2 pies de radio, 4 pies de altura y 600 lb de peso que está flotando con su eje vertical en un estanque de agua profundo con una densidad de peso de 62.5 lb/pies^3.

14.70. Encuentre una expresión para el movimiento del cilindro descrito en el problema 14.69 si se le libera del reposo con 1 pie de su altura sumergida en el agua.

14.71. Determine *a*) la frecuencia circular, *b*) la frecuencia natural y *c*) el periodo para las vibraciones descritas en el problema 14.70.

14.72. Determine *a*) la fecuencia circular, *b*) la frecuencia natural y *c*) el periodo para las vibraciones descritas en el problema 14.67.

14.73. Determine la posición de equilibrio de un cilindro de 3 cm de radio, 10 cm de altura y una masa de 700 g que está flotando con su eje vertical en un estanque de agua profundo con una densidad de masa de 1g/cm^3.

14.74. Resuelva el problema 14.73 si el líquido no es agua sino otra sustancia con una densidad de masa de 2 g/cm^3.

14.75. Determine la posición de equilibrio de un cilindro de 30 cm de radio, 500 cm de altura y un peso de 2.5×10^7 dinas que está flotando con su eje vertical en un estanque de agua profundo con una densidad de peso de 980 dinas/cm^3.

14.76. Encuentre una expresión para el movimiento del cilindro descrito en el problema 14.75 si se le pone en movimiento desde su posición de equlibrio, golpeándolo para producir una velocidad inicial de 50 cm/seg en dirección descendente.

14.77. Encuentre la solución general para la ecuación (*14.10*) y determine su periodo.

14.78. Determine el radio de un cilindro que pesa 5 lb cuyo eje vertical oscila en un estanque de agua profundo ($\rho = 62.5$ lb/pies^3) con un periodo de 0.75 seg. *Sugerencia:* Use los resultados del problema 14.77.

14.79. Determine el peso de un cilindro que tiene un diámetro de 1 pie con su eje vertical que oscila en un estanque de agua profundo ($\rho = 62.5$ lb/pies^3) con un periodo de 2 seg. *Sugerencia:* Use los resultados del problema 14.77.

14.80. Una caja rectangular de ancho w, largo l y altura h flota en un líquido de densidad de peso ρ con su altura paralela al eje vertical. La caja se pone en movimiento desplazándola x_0 unidades desde su posición de equilibrio y dándole una velocidad inicial de v_0. Determine la ecuación diferencial que gobierna el movimiento posterior de la caja.

14.81. Determine *a*) el periodo de las oscilaciones para el movimiento descrito en el problema 14.80 y *b*) el cambio en ese periodo si se duplica la longitud de la caja.

MATRICES 15

MATRICES Y VECTORES

Una *matriz* (designada con letra mayúscula y negrita) es un arreglo rectangular de elementos en filas (renglones) horizontales y columnas verticales. En este libro, los elementos de las matrices siempre serán números o funciones de la variable t. Si todos los elementos son números, entonces la matriz se llama *matriz constante*.

Las matrices demostrarán su utilidad de varias maneras. Por ejemplo, podemos volver a formar ecuaciones diferenciales de mayor orden en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden usando matrices (véase capítulo 17). La notación de las matrices también proporciona un modo compacto de expresar soluciones para las ecuaciones diferenciales (véase capítulo 16).

EJEMPLO 15.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & e^t & 2 \\ t & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & t^2 & \cos t \end{bmatrix}$$

todas son matrices. En particular, la primera matriz es una matriz constante, en tanto que las dos últimas no lo son.

Una matriz general **A** que tiene p filas (renglones) y n columnas está dada por

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

donde a_{ij} representa ese elemento que aparece en la i-ésima fila y la j-ésima columna. Una matriz es *cuadrada* si tiene el mismo número de filas y columnas.

Un *vector* (designado por letra minúscula y negrita) es una matriz que sólo tiene una columna o bien una fila. (La tercera matriz dada en el ejemplo 15.1 es un vector.)

SUMA DE MATRICES

La *suma* **A** + **B** de dos matrices $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ que tienen el mismo número de filas y el mismo número de columnas es la matriz obtenida sumando los correspondientes elementos de **A** y **B**. Es decir

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

La suma de matrices es tanto asociativa como conmutativa. De este modo, $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ y $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

MULTIPLICACIÓN ESCALAR Y DE MATRICES

Si λ es un número (también llamado escalar) o una función de t, entonces $\lambda\mathbf{A}$ (o, de manera equivalente, $\mathbf{A}\lambda$) se define como la matriz obtenida multiplicando cada elemento de $\mathbf{A}$ por λ. De este modo,

$$\lambda\mathbf{A} = \lambda[a_{ij}] = [\lambda a_{ij}]$$

Tomemos $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ como dos matrices de modo tal que $\mathbf{A}$ tiene r filas y n columnas y $\mathbf{B}$ tiene n renglones y p columnas. Entonces, el *producto* $\mathbf{AB}$ se define como la matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ dada por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, p)$$

El elemento c_{ij} se obtiene multiplicando los elementos de la i-ésima fila de $\mathbf{A}$ por los correspondientes elementos de la j-ésima columna de $\mathbf{B}$ y sumando los resultados.

La multiplicación de matrices es asociativa y distributiva combinada con la suma; sin embargo, en general la multiplicación de matrices *no* es conmutativa. De este modo,

$$\mathbf{A(BC)} = \mathbf{(AB)C}, \quad \mathbf{A(B+C)} = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \quad \text{y} \quad \mathbf{(B+C)A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$$

pero, en general, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

POTENCIAS DE UNA MATRIZ CUADRADA

Si n es un número entero positivo y $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada, entonces

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{AA}\cdots\mathbf{A}}_{n \text{ veces}}$$

En particular, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$ y $\mathbf{A}^3 = \mathbf{AAA}$. Por definición, $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$, donde

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es llamada una *matriz identidad*. Para cualquier matriz cuadrada $\mathbf{A}$ y una matriz de identidad $\mathbf{I}$ del mismo tamaño

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$$

DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE MATRICES

La *derivada* de $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es la matriz obtenida derivando cada elemento de $\mathbf{A}$; es decir,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left[\frac{da_{ij}}{dt}\right]$$

De manera similar, la *integral* de $\mathbf{A}$, ya sea definida o indefinida, se obtiene integrando cada elemento de $\mathbf{A}$. De este modo,

$$\int_a^b \mathbf{A}\,dt = \left[\int_a^b a_{ij}\,dt\right] \quad \text{y} \quad \int \mathbf{A}\,dt = \left[\int a_{ij}\,dt\right]$$

LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

La *ecuación característica* de una matriz cuadrada **A** es la ecuación polinomial λ dada por

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0 \qquad (15.1)$$

donde det( ) representa "el determinante de". Aquellos valores de λ que satisfacen (*15.1*), es decir, las raíces de (*15.1*), son los *valores propios* de **A**, una raíz k-veces repetida se llama *valor propio de multiplicidad k.*

Teorema 15.1. ***(Teorema de Cayley-Hamilton).*** Cualquier matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica. Esto es, si

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=b_n\lambda^n+b_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+b_2\lambda^2+b_1\lambda+b_0$$

entonces

$$b_n\mathbf{A}^n+b_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}+\cdots+b_2\mathbf{A}^2+b_1\mathbf{A}+b_0\mathbf{I}=\mathbf{0}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

15.1. Demuestre que **A** + **B** = **B** + **A** para

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+5&2+6\\3+7&4+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&8\\10&12\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}+\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5+1&6+2\\7+3&8+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&8\\10&12\end{bmatrix}$$

Dado que los correspondientes elementos de las matrices resultantes son iguales, se desprende la igualdad deseada.

15.2. Encuentre $3\mathbf{A}-\frac{1}{2}\mathbf{B}$ para las matrices dadas en el problema 15.1.

$$3\mathbf{A}-\frac{1}{2}\mathbf{B}=3\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}+\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3&6\\9&12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}&-3\\-\frac{7}{2}&-4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3+\left(-\frac{5}{2}\right)&6+(-3)\\9+\left(-\frac{7}{2}\right)&12+(-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&3\\\frac{11}{2}&8\end{bmatrix}$$

15.3. Encuentre **AB** y **BA** para las matrices dadas en el problema 15.1.

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1(5)+2(7)&1(6)+2(8)\\3(5)+4(7)&3(6)+4(8)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19&22\\43&50\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA}=\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5(1)+6(3)&5(2)+6(4)\\7(1)+8(3)&7(2)+8(4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23&34\\31&46\end{bmatrix}$$

Obsérvese que para estas matrices, $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$.

15. 4. Encuentre $(2\mathbf{A}-\mathbf{B})^2$ para las matrices dadas en el problema 15.1.

$$2\mathbf{A}-\mathbf{B}=2\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\6 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5 & -6\\-7 & -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -2\\-1 & 0\end{bmatrix}$$

y

$$(2\mathbf{A}-\mathbf{B})^2=(2\mathbf{A}-\mathbf{B})(2\mathbf{A}-\mathbf{B})=\begin{bmatrix}-3 & -2\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & -2\\-1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-3(-3)+(-2)(-1) & -3(-2)+(-2)(0)\\-1(-3)+0(-1) & -1(-2)+0(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 6\\3 & 2\end{bmatrix}$$

15.5. Encuentre **AB** y **BA** para

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}7 & 0\\8 & -1\end{bmatrix}$$

Como **A** tiene tres columnas y **B** tiene dos renglones, el producto **AB** no está definido. Pero

$$\mathbf{BA}=\begin{bmatrix}7 & 0\\8 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7(1)+(0)(4) & 7(2)+(0)(5) & 7(3)+(0)(6)\\8(1)+(-1)(4) & 8(2)+(-1)(5) & 8(3)+(-1)(6)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & 14 & 21\\4 & 11 & 18\end{bmatrix}$$

15.6. Encuentre **AB** y **AC** si

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & 2 & 0\\2 & 1 & 0\\-2 & -1 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\2 & -2 & -2\\-1 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -3\\0 & 2 & 6\\-1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}4(2)+2(2)+(0)(-1) & 4(3)+2(-2)+(0)(2) & 4(1)+2(-2)+(0)(1)\\2(2)+1(2)+(0)(-1) & 2(3)+1(-2)+(0)(2) & 2(1)+1(-2)+(0)(1)\\-2(2)+(-1)(2)+1(-1) & -2(3)+(-1)(-2)+1(2) & -2(1)+(-1)(-2)+1(1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}12 & 8 & 0\\6 & 4 & 0\\-7 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AC}=\begin{bmatrix}4(3)+2(0)+(0)(-1) & 4(1)+2(2)+(0)(2) & 4(-3)+2(6)+(0)(1)\\2(3)+1(0)+(0)(-1) & 2(1)+1(2)+(0)(2) & 2(-3)+1(6)+(0)(1)\\-2(3)+(-1)(0)+1(-1) & -2(1)+(-1)(2)+1(2) & -2(-3)+(-1)(6)+1(1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}12 & 8 & 0\\6 & 4 & 0\\-7 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

Obsérvese que para estas matrices **AB** = **AC** e incluso **B** ≠ **C**. Por lo tanto, la ley de cancelación no es válida para la multiplicación de matrices.

15.7. Encuentre **Ax** si

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\end{bmatrix}\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}9\\ -1\\ -2\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ax}=\begin{bmatrix}1(9)+2(-1)+3(-2)+4(0)\\ 5(9)+6(-1)+7(-2)+8(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 25\end{bmatrix}$$

15.8. Encuentre $\dfrac{d\mathbf{A}}{dt}$ si $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}t^2+1 & e^{2t}\\ \operatorname{sen} t & 45\end{bmatrix}$.

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\begin{bmatrix}\frac{d}{dt}(t^2+1) & \frac{d}{dt}(e^{2t})\\ \frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) & \frac{d}{dt}(45)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2t & 2e^{2t}\\ \cos t & 0\end{bmatrix}$$

15.9. Encuentre $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}$ si $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}$.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{bmatrix}\frac{dx_1(t)}{dt}\\ \frac{dx_2(t)}{dt}\\ \frac{dx_3(t)}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}$$

15.10. Encuentre $\int \mathbf{A}\, dt$ para **A** tal como está dada en el problema 15.8.

$$\int \mathbf{A}\,dt=\begin{bmatrix}\int (t^2+1)dt & \int e^{2t}dt\\ \int \operatorname{sen} t\,dt & \int 45dt\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}t^3+t+c_1 & \frac{1}{2}e^{2t}+c_2\\ -\cos t+c_3 & 45t+c_4\end{bmatrix}$$

15.11. Encuentre $\int_0^1 \mathbf{x}\,dt$ si $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\ e^t\\ 0\end{bmatrix}$.

$$\int_0^1 \mathbf{x}\,dt=\begin{bmatrix}\int_0^1 1dt\\ \int_0^1 e^t dt\\ \int_0^1 0dt\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ e-1\\ 0\end{bmatrix}$$

15.12. Encuentre los valores propios de $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$.

Tenemos

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}+(-\lambda)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\lambda & 3\\ 4 & 2-\lambda\end{bmatrix}$$

De aquí,

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 3\\ 4 & 2-\lambda\end{bmatrix}$$
$$=(1-\lambda)(2-\lambda)-(3)(4)=\lambda^2-3\lambda-10$$

La ecuación característica de $\mathbf{A}$ es $\lambda^2-3\lambda-10=0$, que se puede factorizar en $(\lambda-5)(\lambda+2)=0$. Las raíces de esta ecuación son $\lambda_1=5$ y $\lambda_2=-2$, que son los valores propios de $\mathbf{A}$.

15.13. Encuentre los valores propios de $\mathbf{A}t$ si $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & -2\end{bmatrix}$.

$$\mathbf{A}t-\lambda\mathbf{I}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & -2\end{bmatrix}t+(-\lambda)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2t & 5t\\ -t & -2t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2t-\lambda & 5t\\ -t & -2t-\lambda\end{bmatrix}$$

De este modo,

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\det\begin{bmatrix}2t-\lambda & 5t\\ -t & -2t-\lambda\end{bmatrix}$$
$$=(2t-\lambda)(-2t-\lambda)-(5t)(-t)=\lambda^2+t^2$$

y la ecuación característica de $\mathbf{A}t$ es $\lambda^2+t^2=0$. Las raíces de esta ecuación, que son los valores propios de $\mathbf{A}t$, son $\lambda_1=it$ y $\lambda_2=-it$, donde $i=\sqrt{-1}$.

15.14. Encuentre los valores propios de $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -3\end{bmatrix}$.

$$-\lambda\mathbf{I}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & -3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}4-\lambda & 1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & 0\\ 2 & 1 & -3-\lambda\end{bmatrix}$$

De este modo,

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\det\begin{bmatrix}4-\lambda & 1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & 0\\ 2 & 1 & -3-\lambda\end{bmatrix}$$
$$=(-3-\lambda)[(4-\lambda)(2-\lambda)-(1)(-1)]$$
$$=(-3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-3)$$

La ecuación característica de **A** es

$$(-3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-3)=0$$

Por esto, los valores específicos de **A** son $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=3$ y $\lambda_3=3$. Aquí $\lambda=3$ es un valor propio de multiplicidad dos, en tanto que $\lambda=-3$ es un valor propio de multiplicidad uno.

15.15. Encuentre los valores propios de

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5&7&0&0\\-3&-5&0&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}=\begin{bmatrix}5-\lambda&7&0&0\\-3&-5-\lambda&0&0\\0&0&-2-\lambda&1\\0&0&0&-2-\lambda\end{bmatrix}$$

y

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})&=[(5-\lambda)(-5-\lambda)-(-3)(7)](-2-\lambda)(-2-\lambda)\\&=(\lambda^2-4)(-2-\lambda)(-2-\lambda)\end{aligned}$$

La ecuación característica de **A** es

$$(\lambda^2-4)(-2-\lambda)(-2-\lambda)=0$$

que tiene raíces $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_3=-2$ y $\lambda_4=-2$. De este modo $\lambda=-2$ es un valor propio de multiplicidad tres, mientras que $\lambda=2$ es un valor propio de multiplicidad uno.

15.16. Verifique el teorema de Cayley-Hamilton para $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&-7\\3&6\end{bmatrix}$.

Para esta matriz, tenemos $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\lambda^2-8\lambda+33$; de aquí,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^2-8\mathbf{A}+33\mathbf{I}&=\begin{bmatrix}2&-7\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-7\\3&6\end{bmatrix}-8\begin{bmatrix}2&-7\\3&6\end{bmatrix}+33\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-17&-56\\24&15\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}16&-56\\24&48\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}33&0\\0&33\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

15.17. Verifique el teorema de Cayley-Hamilton para la matriz del problema 15.14.

Para esta matriz, encontramos que $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=-(\lambda+3)(\lambda-3)^2$; de aquí

$$\begin{aligned}-(\mathbf{A}+3\mathbf{I})(\mathbf{A}-3\mathbf{I})^2&=-\begin{bmatrix}7&1&0\\-1&5&0\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-1&0\\2&1&-6\end{bmatrix}^2\\&=\begin{bmatrix}7&1&0\\-1&5&0\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-11&-5&36\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

De los problemas 15.18 al 15.38, sea

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

15.18. Encuentre $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

15.19. Encuentre $3\mathbf{A}-2\mathbf{B}$.

15.20. Encuentre $\mathbf{C}-\mathbf{D}$.

15.21. Encuentre $2\mathbf{C}+5\mathbf{D}$.

15.22. Encuentre $\mathbf{A}+\mathbf{D}$.

15.23. Encuentre $\mathbf{x}-3\mathbf{y}$.

15.24. Encuentre *a*) **AB** y *b*) **BA**.

15.25. Encuentre $\mathbf{A}^2$.

15.26. Encuentre $\mathbf{A}^7$.

15.27. Encuentre $\mathbf{B}^2$.

15.28. Encuentre *a*) **CD** y *b*) **DC**.

15.29. Encuentre *a*) **Ax** y *b*) **xA**.

15.30. Encuentre **AC**.

15.31. Encuentre $(\mathbf{C}+\mathbf{D})\mathbf{y}$.

15.32. Encuentre la ecuación característica y los valores propios de **A**.

15.33. Encuentre la ecuación característica y los valores propios de **B**.

15.34. Encuentre la ecuación característica y los valores propios de $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

15.35. Encuentre la ecuación característica y los valores propios de $3\mathbf{A}$.

15.36. Encuentre la ecuación característica y los valores propios de $\mathbf{A}+5\mathbf{I}$.

15.37. Encuentre la ecuación característica y los valores propios de **C**. Determine la multiplicidad de cada valor propio.

15.38. Encuentre la ecuación característica y los valores propios de **D**. Determine la multiplicidad de cada valor propio.

15.39. Encuentre la ecuación característica y los valores propios de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{bmatrix}$.

15.40. Encuentre la ecuación característica y los valores propios de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} t & 6t & 0 \\ 4t & -t & 0 \\ 0 & 1 & 5t \end{bmatrix}$.

15.41. Encuentre $\dfrac{d\mathbf{A}}{dt}$ para **A** tal como está dada en el problema 15.39.

15.42. Encuentre $\dfrac{d\mathbf{A}}{dt}$ para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ te^{3t^2} \end{bmatrix}$.

15.43. Encuentre $\int_0^1 \mathbf{A}\, dt$ para **A** tal como está dada en el problema 15.42.

$e^{\mathbf{A}t}$

16

DEFINICIÓN

Para una matriz cuadrada **A**,

$$e^{\mathbf{A}t} \equiv \mathbf{I} + \frac{1}{1!}\mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathbf{A}^n t^n \tag{16.1}$$

La serie infinita (*16.1*) converge para cada **A** y t, así que $e^{\mathbf{A}t}$ está definida para todas las matrices cuadradas.

CÁLCULO DE $e^{\mathbf{A}t}$

Para calcular realmente los elementos de $e^{\mathbf{A}t}$, (*16.1*) no es generalmente útil. Sin embargo, se desprende (con cierto esfuerzo), del teorema 15.1, aplicado a la matriz $\mathbf{A}t$, que las series infinitas se pueden reducir a un polinomio en t. De este modo:

Teorema 16.1. Si **A** es una matriz que tiene n filas y n columnas, entonces

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}t^{n-1} + \alpha_{n-2}\mathbf{A}^{n-2}t^{n-2} + \cdots + \alpha_2\mathbf{A}^2t^2 + \alpha_1\mathbf{A}t + \alpha_0\mathbf{I} \tag{16.2}$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ son funciones de t que se deben determinar para cada **A**.

EJEMPLO 16.1. Cuando **A** tiene dos filas y dos columnas, entonces $n = 2$ y

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_1\mathbf{A}t + \alpha_0\mathbf{I} \tag{16.3}$$

Cuando **A** tiene tres filas y tres columnas, entonces $n = 3$ y

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_2\mathbf{A}^2t^2 + \alpha_1\mathbf{A}t + \alpha_0\mathbf{I} \tag{16.4}$$

Teorema 16.2. Tomemos a **A** como en el teorema 16.1 y definamos

$$r(\lambda) \equiv \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \alpha_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 \tag{16.5}$$

Entonces, si λ_i es un valor propio de $\mathbf{A}t$,

$$e^{\lambda_i} = r(\lambda_i) \tag{16.6}$$

Además, si λ_i es un valor propio de multiplicidad k, $k > 1$, entonces las siguientes ecuaciones son también válidas:

$$\begin{aligned} e^{\lambda_i} &= \frac{d}{d\lambda}r(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_i} \\ e^{\lambda_i} &= \frac{d^2}{d\lambda^2}r(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_i} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e^{\lambda_i} &= \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}}r(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_i} \end{aligned} \tag{16.7}$$

Obsérvese que el teorema 16.2 implica los valores propios de $\mathbf{A}t$; éstos son t veces los valores propios de $\mathbf{A}$. Cuando se calculan las diferentes derivadas en (*16.7*), primero se calculan las derivadas adecuadas de la expresión (*16.5*) con respecto a λ, y luego se sustituye $\lambda = \lambda_i$. El procedimiento inverso de sustituir primero $\lambda = \lambda_i$ (una función de t) en (*16.5*), y luego calcular las derivadas con respecto a t, puede dar resultados erróneos.

EJEMPLO 16.2. Tomemos $\mathbf{A}$ con cuatro filas y cuatro columnas y tomemos $\lambda = 5t$ y $\lambda = 2t$ como los valores propios de $\mathbf{A}t$ con multiplicidades tres y uno, respectivamente. Entonces, $n = 4$ y

$$r(\lambda) = \alpha_3\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$
$$r'(\lambda) = 3\alpha_3\lambda^2 + 2\alpha_2\lambda + \alpha_1$$
$$r''(\lambda) = 6\alpha_3\lambda + 2\alpha_2$$

Dado que $\lambda = 5t$ es un valor propio de multiplicidad tres, se sigue que $e^{5t} = r(5t)$, $e^{5t} = r'(5t)$ y $e^{5t} = r''(5t)$. De este modo,

$$e^{5t} = \alpha_3(5t)^3 + \alpha_2(5t)^2 + \alpha_1(5t) + \alpha_0$$
$$e^{5t} = 3\alpha_3(5t)^2 + 2\alpha_2(5t)^2 + \alpha_1$$
$$e^{5t} = 6\alpha_3(5t) + 2\alpha_2$$

También, dado que $\lambda = 2t$ es un valor propio de multiplicidad uno, tenemos que $e^{2t} = r(2t)$, o bien

$$e^{2t} = \alpha_3(2t)^3 + \alpha_2(2t)^2 + \alpha_1(2t) + \alpha_0$$

Obsérvese que ahora tenemos cuatro ecuaciones con las cuatro α como incógnitas.

Método de cálculo: Para cada valor propio λ_i, de $\mathbf{A}t$, aplicar el teorema 16.2 para obtener un conjunto de ecuaciones lineales. Una vez hecho esto para cada valor propio, el conjunto de todas las ecuaciones así obtenidas se puede resolver para $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. Estos valores se sustituyen luego en la ecuación (*16.2*), la cual, a su vez, se utiliza para calcular $e^{\mathbf{A}t}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

16.1. Encuentre $e^{\mathbf{A}t}$ para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$.

Aquí $n = 2$. De la ecuación (*16.3*),

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_1\mathbf{A}t + \alpha_0\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \alpha_1 t + \alpha_0 & \alpha_1 t \\ 9\alpha_1 t & \alpha_1 t + \alpha_0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

y de la ecuación (*16.5*), $r(\lambda) = \alpha_1\lambda + \alpha_0$. Los valores propios de $\mathbf{A}t$ son $\lambda_1 = 4t$ y $\lambda_2 = -2t$, que son ambos de multiplicidad uno. Sustituyendo estos valores en la ecuación (*16.6*) obtenemos las dos ecuaciones

$$e^{4t} = 4t\alpha_1 + \alpha_0$$
$$e^{-2t} = -2t\alpha_1 + \alpha_0$$

Resolviendo estas ecuaciones para α_1 y α_0, encontramos que

$$\alpha_1 = \frac{1}{6t}(e^{4t} - e^{-2t}) \quad \text{y} \quad \alpha_0 = \frac{1}{3}(e^{4t} + 2e^{-2t})$$

Sustituyendo estos valores en (*1*) y simplificando, tenemos

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3e^{4t} + 3e^{-2t} & e^{4t} - e^{-2t} \\ 9e^{4t} - 9e^{-2t} & 3e^{4t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

16.2. Encuentre $e^{\mathbf{A}t}$ para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$.

Dado que $n = 2$, de las ecuaciones (*16.3*) y (*16.5*), se desprende que

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_1 \mathbf{A}t + \alpha_0 \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 t \\ 8\alpha_1 t & -2\alpha_1 t + \alpha_0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

y $r(\lambda) = \alpha_1 \lambda + \alpha_0$. Los valores propios de $\mathbf{A}t$ son $\lambda_1 = 2t$ y $\lambda_2 = -4t$, que son ambos de multiplicidad uno. Sustituyendo estos valores sucesivamente en (*16.6*) obtenemos

$$e^{2t} = \alpha_1(2t) + \alpha_0 \quad e^{-4t} = \alpha_1(-4t) + \alpha_0$$

Resolviendo estas ecuaciones para α_1 y α_0 encontramos que

$$\alpha_1 = \frac{1}{6t}(e^{2t} - e^{-4t}) \quad \alpha_0 = \frac{1}{3}(2e^{2t} + e^{-4t})$$

Sustituyendo estos valores en (*1*) y simplificando, tenemos

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4e^{2t} + 2e^{-4t} & e^{2t} - e^{-4t} \\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} & 2e^{2t} + 4e^{-4t} \end{bmatrix}$$

16.3. Encuentre $e^{\mathbf{A}t}$ para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Aquí $n = 2$; por esto

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_1 \mathbf{A}t + \alpha_0 \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 t \\ -\alpha_1 t & \alpha_0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

y $r(\lambda) = \alpha_1 \lambda + \alpha_0$. Los valores propios de $\mathbf{A}t$ son $\lambda_1 = it$ y $\lambda_2 = -it$, que son ambos de multiplicidad uno. Sustituyendo estos valores sucesivamente en la ecuación (*16.6*) obtenemos

$$e^{it} = \alpha_1(it) + \alpha_0 \qquad e^{-it} = \alpha_1(-it) + \alpha_0$$

Resolviendo estas ecuaciones para α_1 y α_0 y utilizando las relaciones de Euler, encontramos que

$$\alpha_1 = \frac{1}{2it}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$$
$$\alpha_0 = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \cos t$$

Sustituyendo estos valores en (*1*) obtenemos

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}$$

16.4. Encuentre $e^{\mathbf{A}t}$ para $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$.

Aquí $n = 2$. De la ecuación (*16.3*),

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_1 \mathbf{A}t + \alpha_0 \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 t \\ -9\alpha_1 t & 6\alpha_1 t + \alpha_0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

y de la ecuación (*16.5*), $r(\lambda)=\alpha_1\lambda+\alpha_0$. De este modo, $dr(\lambda)/d\lambda=\alpha_1$. Los valores propios de $\mathbf{A}t$ son $\lambda_1=\lambda_2=3t$, que es un sólo valor de multiplicidad dos. Del teorema 16.2 se desprende que

$$e^{3t}=3t\alpha_1+\alpha_0$$
$$e^{3t}=\alpha_1$$

Resolviendo estas ecuaciones para α_1 y α_0 encontramos que

$$\alpha_1=e^{3t} \quad \text{y} \quad \alpha_0=e^{3t}(1-3t)$$

Sustituyendo estos valores en (*1*) y simplificando, tenemos

$$e^{\mathbf{A}t}=e^{3t}\begin{bmatrix}1-3t & t\\ -9t & 1+3t\end{bmatrix}$$

16.5. Encuentre $e^{\mathbf{A}t}$ para $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

Aquí $n=3$. De las ecuaciones (*16.4*) y (*16.5*) tenemos que

$$\begin{aligned}e^{\mathbf{A}t}&=\alpha_2\mathbf{A}^2t^2+\alpha_1\mathbf{A}t+\alpha_0\mathbf{I}\\ &=\alpha_2\begin{bmatrix}9 & 6 & 1\\ 0 & 9 & 6\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}t^2+\alpha_1\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}t+\alpha_0\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}9\alpha_2t^2+3\alpha_1t+\alpha_0 & 6\alpha_2t^2+\alpha_1t & \alpha_2t^3\\ 0 & 9\alpha_2t^2+3\alpha_1t+\alpha_0 & 6\alpha_2t^2+\alpha_1t\\ 0 & 0 & 9\alpha_2t^2+3\alpha_1t+\alpha_0\end{bmatrix}\end{aligned} \qquad (1)$$

y $r(\lambda)=\alpha_2\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_0$. De este modo,

$$\frac{dr(\lambda)}{d\lambda}=2\alpha_2\lambda+a_1 \quad \frac{d^2r(\lambda)}{d\lambda^2}=2\alpha_2$$

Dado que los valores propios de $\mathbf{A}t$ son $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3t$, un valor propio de multiplicidad tres, del teorema 16.2 se desprende que

$$e^{3t}=\alpha_2 9t^2+\alpha_1 3t+\alpha_0$$
$$e^{3t}=\alpha_2 6t+\alpha_1$$
$$e^{3t}=2\alpha_2$$

La solución para este conjunto de ecuaciones es

$$\alpha_2=\frac{1}{2}e^{3t} \quad \alpha_1=(1-3t)e^{3t} \quad \alpha_0=\left(1-3t+\frac{9}{2}t^2\right)e^{3t}$$

Sustituyendo estos valores en (*1*) y simplificando, tenemos

$$e^{\mathbf{A}t}=e^{3t}\begin{bmatrix}1 & t & t^2/2\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

16.6. Encuentre $e^{\mathbf{A}t}$ para $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$.

Aquí $n = 3$. De la ecuación *(16.4)*,

$$e^{\mathbf{A}t}=\alpha_2\mathbf{A}^2t^2+\alpha_1\mathbf{A}t+\alpha_0\mathbf{I}$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha_0 & \alpha_1 t & \alpha_2 t^2\\ 0 & -\alpha_2 t^2+\alpha_0 & 2\alpha_2 t^2+\alpha_1 t\\ 0 & -2\alpha_2 t^2-\alpha_1 t & 3\alpha_2 t^2+2\alpha_1 t+\alpha_0\end{bmatrix} \qquad (1)$$

y de la ecuación *(16.5)*, $r(\lambda)=\alpha_2\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_0$. Los valores propios de $\mathbf{A}t$ son $\lambda_1=0$ y $\lambda_2=\lambda_3=t$; de aquí $\lambda=t$ es un valor propio de multiplicidad dos, mientras que $\lambda = 0$ es un valor propio de multiplicidad uno. Del teorema 16.2 se desprende que $e^t=r(t)$, $e^t=r'(t)$ y $e^0=r(0)$. Dado que $r'(\lambda)=2\alpha_2\lambda+\alpha_1$, estas ecuaciones se convierten en

$$e^t=\alpha_2t^2+\alpha_1t+\alpha_0$$
$$e^t=2\alpha_2t+\alpha_1$$
$$e^0=\alpha_0$$

que tienen como solución

$$\alpha_2=\frac{te^t-e^t+1}{t^2} \quad \alpha_1=\frac{-te^t+2e^t-2}{t} \quad \alpha_0=1$$

Sustituyendo estos valores en *(1)* y simplificando, tenemos

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix}1 & -te^t+2e^t-2 & te^t-e^t+1\\ 0 & -te^t+e^t & te^t\\ 0 & -te^t & te^t+e^t\end{bmatrix}$$

16.7. Encuentre $e^{\mathbf{A}t}$ para $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -5\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

Aquí $n = 3$. De la ecuación *(16.4)*,

$$e^{\mathbf{A}t}=\alpha_2\mathbf{A}^2t^2+\alpha_1\mathbf{A}t+\alpha_0\mathbf{I}$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha_0 & -2\alpha_2t^2+\alpha_1t & -5\alpha_2t^2\\ 0 & -\alpha_2t^2-2\alpha_1t+\alpha_0 & -5\alpha_1t\\ 0 & -\alpha_1t & -\alpha_2t^2+2\alpha_1t+\alpha_0\end{bmatrix} \qquad (1)$$

y de la ecuación *(16.5)*, $r(\lambda)=\alpha_2\lambda^2+\alpha_1\lambda+\alpha_0$. Los valores específicos de $\mathbf{A}t$ son $\lambda_1=0$, $\lambda_2=it$ y $\lambda_3=-it$. Sustituyendo estos valores sucesivamente en *(16.6)* obtenemos las tres ecuaciones

$$e^0=\alpha_2(0)^2+\alpha_1(0)+\alpha_0$$
$$e^{it}=\alpha_2(it)^2+\alpha_1(it)+\alpha_0$$
$$e^{-it}=\alpha_2(-it)^2+\alpha_1(-it)+\alpha_0$$

que tienen como solución

$$\alpha_2 = \frac{e^{it} + e^{-it} - 2}{-2t^2} = \frac{1 - \cos t}{t^2}$$
$$\alpha_1 = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it} = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$$
$$\alpha_0 = 1$$

Sustituyendo estos valores en (*1*) y simplificando, tenemos

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & -2 + 2\cos t + \operatorname{sen} t & -5 + 5\cos t \\ 0 & \cos t - 2\operatorname{sen} t & -5\operatorname{sen} t \\ 0 & \operatorname{sen} t & \cos t + 2\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

16.8. Establezca las ecuaciones necesarias para hallar $e^{\mathbf{A}t}$ si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aquí $n = 6$, de modo que

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_5\mathbf{A}^5t^5 + \alpha_4\mathbf{A}^4t^4 + \alpha_3\mathbf{A}^3t^3 + \alpha_2\mathbf{A}^2t^2 + \alpha_1\mathbf{A}t + \alpha_0\mathbf{I}$$

y

$$r(\lambda) = \alpha_5\lambda^5 + \alpha_4\lambda^4 + \alpha_3\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$
$$r'(\lambda) = 5\alpha_5\lambda^4 + 4\alpha_4\lambda^3 + 3\alpha_3\lambda^2 + 2\alpha_2\lambda^2 + \alpha_1$$
$$r''(\lambda) = 20\alpha_5\lambda^3 + 12\alpha_4\lambda^2 + 6\alpha_3\lambda + 2\alpha_2$$

Los valores propios de $\mathbf{A}t$ son $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = t$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 2t$ y $\lambda_6 = 0$. De aquí, $\lambda = t$ es un valor propio de multiplicidad tres, $\lambda = 2t$ es un valor propio de multiplicidad dos, y $\lambda = 0$ es un valor propio de multiplicidad uno. Ahora, del teorema 16.2, tenemos que

$$e^{2t} = r(2t) = \alpha_5(2t)^5 + \alpha_4(2t)^4 + \alpha_3(2t)^3 + \alpha_2(2t)^2 + \alpha_1(2t) + \alpha_0$$
$$e^{2t} = r'(2t) = 5\alpha_5(2t)^4 + 4\alpha_4(2t)^3 + 3\alpha_3(2t)^2 + 2\alpha_2(2t) + \alpha_1$$
$$e^{2t} = r''(2t) = 20\alpha_5(2t)^3 + 12\alpha_4(2t)^2 + 6\alpha_3(2t) + 2\alpha_2$$
$$e^{t} = r(t) = \alpha_5(t)^5 + \alpha_4(t)^4 + \alpha_3(t)^3 + \alpha_2(t)^2 + \alpha_1(t) + \alpha_0$$
$$e^{t} = r'(t) = 5\alpha_5(2t)^4 + 4\alpha_4(2t)^3 + 3\alpha_3(2t)^2 + 2\alpha_2(2t) + \alpha_1$$
$$e^{0} = r(0) = \alpha_5(0)^5 + \alpha_4(0)^4 + \alpha_3(0)^3 + \alpha_2(0)^2 + \alpha_1(0) + \alpha_0$$

o, más simplemente,

$$e^{2t} = 32t^5\alpha_5 + 16t^4\alpha_4 + 8t^3\alpha_3 + 4t^2\alpha_2 + 2t\alpha_1 + \alpha_0$$
$$e^{2t} = 80t^4\alpha_5 + 32t^3\alpha_4 + 12t^2\alpha_3 + 4t\alpha_2 + \alpha_1$$
$$e^{2t} = 160t^3\alpha_5 + 48t^2\alpha_4 + 12t\alpha_3 + 2\alpha_2$$
$$e^{t} = t^5\alpha_5 + t^4\alpha_4 + t^3\alpha_3 + t^2\alpha_2 + t\alpha_1 + \alpha_0$$
$$e^{t} = 5t^4\alpha_5 + 4t^3\alpha_4 + 3t^2\alpha_3 + 2t\alpha_2 + \alpha_1$$
$$1 = \alpha_0$$

16.9. Encuentre $e^{\mathbf{A}t}\,e^{\mathbf{B}t}$ y $e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}$ para

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

y verifique que, para estas matrices, $e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} \neq e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}$.

Aquí, $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$. Utilizando el teorema 16.1 y el resultado del problema 16.3, encontramos que

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad e^{\mathbf{B}t}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -t & 1\end{bmatrix} \quad e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}=\begin{bmatrix}\cos t & \operatorname{sen} t\\ -\operatorname{sen} t & \cos t\end{bmatrix}$$

De este modo,

$$e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}=\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -t & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-t^2 & t\\ -t & 1\end{bmatrix}\neq e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}$$

16.10. Pruebe que $e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}=e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}$ si y sólo si las matrices **A** y **B** conmutan.

Si **AB** = **BA**, y sólo entonces, tenemos

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{A}^2+\mathbf{AB}+\mathbf{BA}+\mathbf{B}^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$$
$$=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}\mathbf{A}^{2-k}\mathbf{B}^k$$

y, en general,

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathbf{A}^{n-k}\mathbf{B}^k \tag{1}$$

donde $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ es el coeficiente binomial ("de n cosas se toman k en una vez").

Ahora, de acuerdo con la ecuación (*16.1*), tenemos para **A** y **B**:

$$e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathbf{A}^n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathbf{B}^n t^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathbf{A}^{n-k}t^{n-k}}{(n-k)!}\frac{\mathbf{B}^k t^k}{k!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathbf{A}^{n-k}\mathbf{B}^k}{(n-k)!k!}\right]t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathbf{A}^{n-k}\mathbf{B}^k\right]\frac{t^n}{n!} \tag{2}$$

y también

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^n t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^n\frac{t^n}{n!} \tag{3}$$

Podemos igualar la última serie en (*3*) a la última serie en (2) si y sólo si (*1*) se mantiene; es decir, si y sólo si **A** y **B** conmutan.

16.11. Pruebe que $e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}s}=e^{\mathbf{A}(t-s)}$.

Colocando $t=1$ en el problema 16.10, concluimos que $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}=e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})}$ si **A** y **B** conmutan. Pero las matrices $\mathbf{A}t$ y $-\mathbf{A}s$ conmutan, pues

$$(\mathbf{A}t)(-\mathbf{A}s)=(\mathbf{AA})(-ts)=(\mathbf{AA})(-st)=(-\mathbf{A}s)(\mathbf{A}t)$$

En consecuencia $e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}s}=e^{(\mathbf{A}t-\mathbf{A}s)}=e^{\mathbf{A}(t-s)}$.

16.12. Pruebe que $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$, donde $\mathbf{0}$ denota una matriz cuadrada todos cuyos elementos son cero.

A partir de la definición de multiplicación de matrices, $\mathbf{0}^n = \mathbf{0}$ para $n \geq 1$. De aquí,

$$e^{\mathbf{0}} = e^{\mathbf{0}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{0}^n t^n = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{0}^n t^n = \mathbf{I} + \mathbf{0} = \mathbf{I}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

Encuentre $e^{\mathbf{A}t}$ para las siguientes matrices $\mathbf{A}$.

16.13. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

16.14. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

16.15. $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$

16.16. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$

16.17. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -14 & -9 \end{bmatrix}$

16.18. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

16.19. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

16.20. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$

16.21. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & 0 \end{bmatrix}$

16.22. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -64 & -16 \end{bmatrix}$

16.23. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$

16.24. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -36 & 0 \end{bmatrix}$

16.25. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -8 \end{bmatrix}$

16.26. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

16.27. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

16.28. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

16.29. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

16.30. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

16.31. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

16.32. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

REDUCCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES A UN SISTEMA DE ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

17

UN EJEMPLO

En el capítulo 15 introdujimos la idea de una *matriz* con conceptos asociados. Considérese la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$t^4 \frac{d^2x}{dt^2} + (\operatorname{sen} t)\frac{dx}{dt} - 4x = \ln t \qquad (17.1)$$

Vemos que (*17.1*) implica

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{4}{t^4}x - \frac{\operatorname{sen} t}{t^4}\frac{dx}{dt} + \frac{\ln t}{t^4} \qquad (17.2)$$

Dado que las derivadas se pueden expresar de muchas maneras —usando *primas* o *puntos* no son sino dos de ellas— tenemos $v = \frac{dx}{dt} = x' = \dot{x}$ y $v' = \frac{d^2x}{dt^2} = x'' = \ddot{x}$. Entonces, la ecuación (*17.1*) se puede escribir como la siguiente *ecuación matricial*:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{t^4} & \frac{-\operatorname{sen} t}{t^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\ln t}{t^4} \end{bmatrix} \qquad (17.3)$$

porque $\dot{x} = 0x + 1\dot{v}$ y $\dot{v} = \frac{4}{t^4}x - \frac{\operatorname{sen} t}{t^4}v + \frac{\ln t}{t^4}$. Observamos, finalmente, que la ecuación (*17.1*) se puede expresar también como

$$dx(t)/dt = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \qquad (17.4)$$

Obsérvese que si $x(0) = 5$ y $x(0) = -12$ en (*17.1*), entonces estas condiciones iniciales se escriben como $x(0) = 5$, $v(0) = -12$.

REDUCCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE n-ÉSIMO ORDEN

Como en el caso de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, asociadas con condiciones iniciales, podemos remoldear los problemas de valor inicial de mayor orden en un sistema matricial de primer orden, tal y como se ilustra a continuación:

$$b_n(t)\frac{d^n x}{dt^n}+b_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+b_1(t)\dot{x}+b_0(t)x=g(t); \tag{17.5}$$

$$x(t_0)=c_0, \quad \dot{x}(t_0)=c_1,\ldots, x^{(n-1)}(t_0)=c_{n-1} \tag{17.6}$$

con $b_n(t)\neq 0$ se puede reducir al siguiente sistema matricial de primer orden:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t)&=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{f}(t)\\ \mathbf{x}(t_0)&=\mathbf{c}\end{aligned} \tag{17.7}$$

donde $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, $\mathbf{c}$ y el tiempo inicial t_0 son conocidos. El método de reducción es el siguiente:

Paso 1. Vuelva a escribir (*17.5*) de modo que $d^n x/dt^n$ aparezca por sí misma. De este modo,

$$\frac{d^n x}{dt^n}=a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1(t)\dot{x}+a_0(t)x+f(t) \tag{17.8}$$

donde $a_j(t)=-b_j(t)/b_n(t)$ $(j=0, 1, \ldots, n-1)$ y $f(t)=g(t)/b_n(t)$.

Paso 2. Defina n nuevas variables (el mismo número que el orden de la ecuación diferencial original); $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, por medio de las ecuaciones

$$x_1(t)=x(t), \quad x_2(t)=\frac{dx(t)}{dt}, \quad x_2(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \ldots, \; x_n(t)=\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} \tag{17.9}$$

Estas nuevas variables están interrelacionadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)&=x_3(t)\\ \dot{x}_3(t)&=x_4(t)\\ &\cdots\cdots\\ \dot{x}_{n-1}(t)&=x_n(t)\end{aligned} \tag{17.10}$$

Paso 3. Exprese dx_n/dt en términos de las nuevas variables. Proceda derivando primero la última ecuación de (*17.9*) para obtener

$$\dot{x}_n(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}\right]=\frac{d^n x(t)}{dt^n}$$

Entonces, de las ecuaciones (*17.8*) y (*17.9*),

$$\begin{aligned}\dot{x}_n(t)&=a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1(t)\dot{x}(t)+a_0(t)x(t)+f(t)\\ &=a_{n-1}(t)x_n(t)+\cdots+a_1(t)x_2(t)+a_0(t)x_1(t)+f(t)\end{aligned}$$

Por conveniencia, volvemos a escribir esta última ecuación de modo que $x_1(t)$ aparezca antes de $x_2(t)$, etc. De este modo,

$$\dot{x}_n(t)=a_0(t)x_1(t)+a_1(t)x_2(t)+\cdots+a_{n-1}(t)x_n(t)+f(t) \tag{17.11}$$

Paso 4. Las ecuaciones (*17.10*) y (*17.11*) son un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en $x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots, x_n(t)$. Este sistema es equivalente a la única ecuación matricial $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$ si definimos

$$\mathbf{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{17.12}$$

$$\mathbf{f}(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \tag{17.13}$$

$$\mathbf{A}(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) & \cdots & a_{n-1}(t) \end{bmatrix} \tag{17.14}$$

Paso 5. Defina

$$\mathbf{c} \equiv \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$$

Entonces las condiciones iniciales (*17.6*) se pueden dar por la ecuación matricial (vector) $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$. Esta última ecuación es una consecuencia inmediata de las ecuaciones (*17.12*), (*17.13*) y (*17.6*), pues

$$\mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{c}$$

Obsérvese que si no se prescriben condiciones iniciales, los pasos del 1 al 4 por sí mismos reducen cualquier ecuación diferencial lineal (*17.5*) a la ecuación matricial $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$.

REDUCCIÓN DE UN SISTEMA

Un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales también se pueden reducir al sistema (*17.7*). El procedimiento es casi idéntico al método para reducir una ecuación sencilla a la forma matricial; sólo cambia el paso 2. Con un sistema de ecuaciones, el paso 2 se generaliza de modo que se definen nuevas variables para *cada una* de las funciones desconocidas del conjunto.

PROBLEMAS RESUELTOS

17.1. Ponga el problema de valor inicial

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 8x = e^t; \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -4$$

en la forma del sistema *(17.7)*.

Siguiendo el paso 1, escribimos $\ddot{x} = -2\dot{x} + 8x + e^t$; de aquí $a_1(t) = -2$, $a_0(t) = 8$ y $f(t) = e^t$. Entonces, definiendo $x_1(t) = x$ y $x_2(t) = \dot{x}$ (la ecuación diferencial es de segundo orden, de modo que necesitamos dos variables nuevas), obtenemos $\dot{x}_1 = x_2$. Siguiendo el paso 3, encontramos

$$\dot{x}_2 = \frac{d^2x}{dt^2} = -2\dot{x} + 8x + e^t = -2x_2 + 8x_1 + e^t$$

De este modo,

$$\dot{x}_1 = 0x_1 + 1x_2 + 0$$
$$\dot{x}_2 = 8x_1 - 2x_2 + e^t$$

Estas ecuaciones son equivalentes a la ecuación matricial $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$ si definimos

$$\mathbf{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}$$

Además, si también definimos $\mathbf{c} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$, entonces las condiciones iniciales pueden estar dadas por $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$, donde $t_0 = 0$.

17.2. Ponga el problema de valor inicial

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 8x = 0; \; x(1) = 2, \; \dot{x}(1) = 3$$

en la forma del sistema *(17.7)*.

Procediendo como en el problema 17.1, con e^t reemplazada por cero, definimos

$$\mathbf{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La ecuación diferencial es entonces equivalente a la ecuación matricial $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$, o simplemente $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$, dado que $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$. Las condiciones iniciales pueden estar dadas por $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$, si definimos $t_0 = 1$ y $\mathbf{c} \equiv \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

17.3. Ponga el problema de valor inicial

$$\ddot{x} + x = 3; \; x(\pi) = 1, \; \dot{x}(\pi) = 2$$

en la forma del sistema *(17.7)*.

Siguiendo el paso 1, escribimos $\ddot{x} = -x + 3$; de aquí, $a_1(t) = 0$, $a_0(t) = -1$ y $f(t) = 3$. Entonces, definiendo $x_1(t) = x$ y $x_2(t) = \dot{x}$, obtenemos $\dot{x}_1 = x_2$. Siguiendo el paso 3, encontramos

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = -x + 3 = -x_1 + 3$$

De este modo,

$$\dot{x}_1 = 0x_1 + 1x_2 + 0$$
$$\dot{x}_2 = -1x_1 + 0x_2 + 3$$

Estas ecuaciones son equivalentes a la ecuación matricial $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$, si definimos

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Además, si también definimos

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

entonces las condiciones iniciales toman la forma $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$, donde $t_0 = \pi$.

17.4. Convierta la ecuación diferencial $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = t$ en la ecuación matricial

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$$

Aquí omitimos el paso 5, porque la ecuación diferencial no tiene prescritas condiciones iniciales. Siguiendo el paso 1 obtenemos

$$\ddot{x} = 6\dot{x} - 9x + t$$

De aquí $a_1(t) = 6$, $a_0(t) = -9$ y $f(t) = t$. Si definimos dos nuevas variables, $x_1(t) = x$ y $x_2(t) = \dot{x}$, tenemos

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \text{y} \quad \dot{x}_2 = \ddot{x} = 6\dot{x} - 9x + t = 6x_2 - 9x_1 + t$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0x_1 + 1x_2 + 0 \\ \dot{x}_2 &= -9x_1 + 6x_2 + t \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son equivalentes a la ecuación matricial $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$ si definimos

$$\mathbf{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

17.5. Convierta la ecuación diferencial

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 0$$

en la ecuación matricial $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$.

La ecuación diferencial dada no tiene condiciones iniciales prescritas, así que se omite el paso 5. Siguiendo el paso 1, obtenemos

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 2\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}$$

Definiendo $x_1(t) = x$, $x_2(t) = \dot{x}$ y $x_3(t) = \ddot{x}$ (la ecuación diferencial es de tercer orden, de modo que necesitamos tres nuevas variables), tenemos que $\dot{x}_1 = x_2$ y $\dot{x}_2 = x_3$. Siguiendo el paso 3, encontramos

$$\dot{x}_3 = \frac{d^3x}{dt^3} = 2\ddot{x} - \dot{x} = 2x_3 - x_2$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 \\ \dot{x}_2 &= 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 \\ \dot{x}_3 &= 0x_1 - 1x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

Colocamos

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}\quad \mathbf{A}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-1&2\end{bmatrix}\quad \mathbf{f}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Entonces la ecuación diferencial original de tercer orden es equivalente a la ecuación matricial $\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{f}(t)$, o bien, más simplemente, $\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ porque $\mathbf{f}(t)=\mathbf{0}$.

17.6. Ponga el problema de valor inicial

$$e^{-t}\frac{d^4x}{dt^4}-\frac{d^2x}{dt^2}+e^t t^2\frac{dx}{dt}=5e^{-t};$$

$$x(1)=2,\ \dot{x}(1)=3,\ \ddot{x}(1)=4,\ \dddot{x}(1)=5$$

en la forma del sistema *(17.7)*.

Siguiendo el paso 1, obtenemos

$$\frac{d^4x}{dt^4}=e^t\frac{d^2x}{dt^2}-t^2e^{2t}\frac{dx}{dt}+5$$

De aquí, $a_3(t)=0$, $a_2(t)=e^t$, $a_1(t)=-t^2e^{2t}$, $a_0(t)=0$ y $f(t)=5$. Si definimos cuatro nuevas variables,

$$x_1(t)=x\quad x_2(t)=\frac{dx}{dt}\quad x_3(t)=\frac{d^2x}{dt^2}\quad x_4(t)=\frac{d^3x}{dt^3}$$

obtenemos $\dot{x}_1=x_2$, $\dot{x}_2=x_3$, $\dot{x}_3=x_4$ y, siguiendo el paso 3,

$$\dot{x}_4=\frac{d^4x}{dt^4}=e^t\ddot{x}-t^2e^{2t}\dot{x}+5=e^tx_3-t^2e^{2t}x_2+5$$

De este modo,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=0x_1+1x_2+0x_3+0x_4+0\\ \dot{x}_2&=0x_1+0x_2+1x_3+0x_4+0\\ \dot{x}_3&=0x_1+0x_2+0x_3+1x_4+0\\ \dot{x}_4&=0x_1-t^2e^{2t}x_2+e^tx_3+0x_4+5\end{aligned}$$

Estas ecuaciones son equivalentes a la ecuación matricial $\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{f}(t)$ si definimos

$$\dot{\mathbf{x}}(t)\equiv\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_4(t)\end{bmatrix}\quad \mathbf{A}(t)\equiv\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&-t^2e^{2t}&e^t&0\end{bmatrix}\quad \mathbf{f}(t)\equiv\begin{bmatrix}0\\0\\0\\5\end{bmatrix}$$

Además, si también definimos $\mathbf{c}\equiv\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$, entonces las condiciones iniciales pueden estar dadas por $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{c}$, donde $t_0=1$.

17.7. Ponga el siguiente sistema en la forma del sistema (*17.7*).

$$\dddot{x} = t\ddot{x} + x - \dot{y} + t + 1$$
$$\ddot{y} = (\operatorname{sen} t)\dot{x} + x - y + t^2;$$
$$x(1) = 2,\ \ \dot{x}(1) = 3,\ \ \ddot{x}(1) = 4,\ \ y(1) = 5,\ \ \dot{y}(1) = 6$$

Dado que este sistema contiene una ecuación diferencial de tercer orden en x, *así como* una ecuación diferencial de segundo orden en y, necesitaremos tres nuevas variables x y dos nuevas variables y. Generalizando el paso 2, definimos

$$x_1(t) = x \quad x_2(t) = \frac{dx}{dt} \quad x_3(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$
$$y_1(t) = y \quad y_2(t) = \frac{dy}{dt}$$

De este modo,

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = \frac{d^3x}{dt^3} = t\ddot{x} + x - \dot{y} + t + 1 = tx_3 + x_1 - y_2 + t + 1$$
$$\dot{y}_1 = y_2$$
$$\dot{y}_2 = \frac{d^2y}{dt^2} = (\operatorname{sen} t)\dot{x} + x - y + t^2 = (\operatorname{sen} t)x_2 + x_1 - y_2 + t^2$$

o bien

$$\dot{x}_1 = 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 0$$
$$\dot{x}_2 = 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 0$$
$$\dot{x}_3 = 1x_1 + 0x_2 + tx_3 + 0y_1 - 1y_2 + (t+1)$$
$$\dot{y}_1 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0y_1 + 1y_2 + 0$$
$$\dot{y}_2 = 1x_1 + (\operatorname{sen} t)x_2 + 0x_3 - 1y_1 + 0y_2 + t^2$$

Estas ecuaciones son equivalentes a la ecuación matricial $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$ si definimos

$$\mathbf{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & t & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \operatorname{sen} t & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t+1 \\ 0 \\ t^2 \end{bmatrix}$$

Además, si definimos $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $t_0 = 1$, entonces la condición inicial puede estar dada por $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}$.

17.8. Ponga el siguiente sistema en la forma del sistema (*17.7*):

$$\ddot{x} = -2\dot{x} - 5y + 3$$
$$\dot{y} = \dot{x} + 2y;$$
$$x(0) = 0,\quad \dot{x}(0) = 0,\quad y(0) = 1$$

Como este sistema contiene una ecuación diferencial de segundo orden en x y una ecuación diferencial de primer orden en y,

definimos las tres nuevas variables

$$x_1(t)=x \quad x_2(t)=\frac{dx}{dt} \quad y_1(t)=y$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= \ddot{x}=-2\dot{x}-5y+3=-2x_2-5y_1+3\\ \dot{y}_1 &= \dot{y}=\dot{x}+2y=x_2+2y_1\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0x_1+1x_2+0y_1+0\\ \dot{x}_2 &= 0x_1-2x_2-5y_1+3\\ \dot{y}_1 &= 0x_1+1x_2+2y_1+0\end{aligned}$$

Estas ecuaciones son equivalentes a la ecuación matricial $\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{f}(t)$ si definimos

$$\mathbf{x}(t)\equiv\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\y_1(t)\end{bmatrix} \quad \mathbf{A}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&-5\\0&1&0\end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(t)=\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$$

Si también definimos $t_0=0$ y $\mathbf{c}\equiv\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, entonces las condiciones iniciales pueden estar dadas por $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{c}$.

17.9. Ponga el siguiente sistema en forma de matriz:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=x+y\\ \dot{y}&=9x+y\end{aligned}$$

Procedemos exactamente como en los problemas 17.7 y 17.8, excepto que ahora no hay condiciones iniciales para considerar. Dado que el sistema consiste de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, definimos dos nuevas variables $x_1(t)=x$ y $y_1(t)=y$. De este modo,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=\dot{x}=x+y=x_1+y_1+0\\ \dot{y}_1&=\dot{y}=9x+y=9x_1+y_1+0\end{aligned}$$

Si definimos

$$\mathbf{x}(t)\equiv\begin{bmatrix}x_1(t)\\y_1(t)\end{bmatrix} \quad \mathbf{A}(t)\equiv\begin{bmatrix}1&1\\9&1\end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(t)\equiv\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

entonces este último conjunto de ecuaciones es equivalente a la ecuación matricial $\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{f}(t)$, o simplemente a $\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$, dado que $\mathbf{f}(t)=\mathbf{0}$.

PROBLEMAS ADICIONALES

Reduzca cada uno de los siguientes sistemas a un sistema matricial de primer orden.

17.10. $\ddot{x}-2\dot{x}+x=t+1$; $x(1)=1$, $\dot{x}(1)=2$

17.11. $2\dddot{x}+x=4e^t$; $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=1$

17.12. $t\dddot{x}-3\dot{x}-t^2x=\operatorname{sen} t$; $x(2)=3$, $\dot{x}(2)=4$

17.13. $\ddot{y}+5\dot{y}-2ty=t^2+1$; $y(0)=11$, $\dot{y}(0)=12$

17.14. $-\dddot{y}+5\dot{y}+6y=0$

17.15. $e^t\dddot{x}-t\ddot{x}+\dot{x}-e^t x=0;$
$x(-1)=1,\ \dot{x}(-1)=0,\ \ddot{x}(-1)=1$

17.16. $2\dfrac{d^3y}{dt^3}+3\dfrac{d^2y}{dt^2}-4\dfrac{dy}{dt}+5y=t^2+16t+20;$
$y(\pi)=-1,\ y'(\pi)=-2,\ y''(\pi)=-3$

17.17. $\dddot{x}=t;\ x(0)=0,\ \dot{x}(0)=0,\ \ddot{x}(0)=0$

17.18. $\ddot{x}=\dot{x}+\dot{y}-z+t$
$\ddot{y}=tx+\dot{y}+2y+t^2+1$
$\dot{z}=x-y+\dot{y}+z;$
$x(1)=1,\ \dot{x}(1)=15,\ y(1)=0,\ \dot{y}(1)=-7,\ z(1)=4$

17.19. $\ddot{x}=2\dot{x}+5y+3$
$\dot{y}=-\dot{x}-2y;$
$x(0)=0,\ \dot{x}(0)=0,\ y(0)=1$

17.20. $\dot{x}=x+2y$
$\dot{y}=4x+3y;$
$x(7)=2,\ y(7)=-3$

MÉTODOS GRÁFICOS Y NUMÉRICOS PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

18

MÉTODOS CUALITATIVOS

En el capítulo 2 hablamos del concepto de *métodos cualitativos* con respecto a las ecuaciones diferenciales; es decir, las técnicas que se usan cuando las soluciones analíticas son difíciles o virtualmente imposibles de obtener. En este capítulo, y en los dos siguientes, introducimos varios enfoques cualitativos para tratar con las ecuaciones diferenciales.

CAMPOS DIRECCIONALES

Los métodos gráficos producen diagramas de soluciones para las ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$y' = f(x, y) \tag{18.1}$$

donde la derivada sólo aparece en el lado izquierdo de la ecuación.

EJEMPLO 18.1. *a*) Para el problema $y' = -y + x + 2$, tenemos $f(x, y) = -y + x + 2$. *b*) Para el problema $y' = y^2 + 1$, tenemos $f(x, y) = y^2 + 1$. *c*) Para el problema $y' = 3$, tenemos $f(x, y) \equiv 3$. Obsérvese que en un problema particular, $f(x, y)$ puede ser independiente de x, o bien de y, o bien de x y y.

La ecuación (*18.1*) define la pendiente de la curva de la solución $y(x)$ en cualquier punto (x, y) del plano. Un *elemento de la línea* es un segmento corto de línea que comienza en el punto (x, y) y tiene una pendiente especificada por (*18.1*); representa una aproximación a la curva de la solución a través de ese punto. Una colección de elementos de línea es un *campo direccional*. Las gráficas de las soluciones para (*18.1*) se generan a partir de los campos direccionales trazando curvas que pasen a través de los puntos en los que se dibujan los elementos de línea y también son tangentes a esos elementos de línea.

Si el lado izquierdo de la ecuación (*18.1*) se establece igual a una constante, la gráfica de la ecuación resultante se llama una *isoclina*. Constantes diferentes definen isoclinas diferentes, y cada isoclina tiene la propiedad de que todos los elementos de línea que provienen de puntos sobre esa isoclina tienen la misma pendiente, una pendiente

que es igual a la constante que generó la isoclina. Cuando ellas son simples de trazar, las isoclinas producen muchos elementos de línea de una vez, los que son útiles para construir los campos direccionales.

MÉTODO DE EULER

Si se especifica también una condición inicial de la forma

$$y(x_0) = y_0 \tag{18.2}$$

entonces la única curva de la solución de la ecuación de interés (*18.1*) es la que pasa a través del punto inicial (x_0, y_0).

Con el fin de obtener una aproximación gráfica para la curva solución de las ecuaciones (*18.1*) y (*18.2*), se comienza por construir un elemento de línea en el punto inicial (x_0, y_0), y luego se prolonga una corta distancia. Se indica el punto terminal de este elemento de línea como (x_1, y_1). Luego se construye un segundo elemento de línea en (x_1, y_1) y se prolonga una corta distancia. Se denota el punto terminal de este segundo elemento de línea como (x_2, y_2). Se sigue con un tercer elemento de línea construido en (x_2, y_2) y se prolonga una corta distancia. El proceso se efectúa reiterativamente y se concluye cuando se han trazado suficientes curvas de la solución para satisfacer las necesidades relacionadas con el problema.

Si la diferencia entre sucesivos valores de x son iguales, es decir, si para una constante especificada h, $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots$, entonces el método gráfico dado en el párrafo anterior para un problema de valor inicial de primer orden se conoce como método de Euler. Éste satisface la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{18.3}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Esta fórmula a menudo se escribe como

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n \tag{18.4}$$

donde

$$y'_n = f(x_n, y_n) \tag{18.5}$$

tal como lo requiere la ecuación (*18.1*).

ESTABILIDAD

La constante h de las ecuaciones (*18.3*) y (*18.4*) se llama *tamaño de paso* y su valor es arbitrario. En general, cuanto menor sea el tamaño de paso, tanto más aproximada se convierte la solución al precio de tener más trabajo para obtenerla. De este modo, la elección final de h puede ser un compromiso entre exactitud y esfuerzo. Si h se elige demasiado grande, entonces la solución aproximada puede que no se parezca en absoluto a la solución real, una condición conocida como *inestabilidad numérica*. Para evitarla se repite el método de Euler, cada vez con un tamaño de paso que sea la mitad de su valor previo, hasta que dos aproximaciones sucesivas sean lo suficientemente cercanas para satisfacer las necesidades de la solución.

PROBLEMAS RESUELTOS

18.1. Construya un campo direccional para la ecuación $y' = 2y - x$.

Aquí $f(x, y) = 2y - x$.

En $x = 1, y = 1, f(1, 1) = 2(1) - 1 = 1$, equivalente a un ángulo de 45°.

En $x = 1, y = 2, f(1, 2) = 2(2) - 1 = 3$, equivalente a un ángulo de 71.6°.

En $x = 2, y = 1, f(2, 1) = 2(1) - 2 = 0$, equivalente a un ángulo de 0°.

En $x = 2, y = 2, f(2, 2) = 2(2) - 2 = 2$, equivalente a un ángulo de 63.4°.

En $x = 1, y = -1, f(1, -1) = 2(-1) - 1 = -3$, equivalente a un ángulo de −71.6°.

En $x = -2, y = -1, f(-2, -1) = 2(-1) - (-2) = 0$, equivalente a un ángulo de 0°.

Los elementos de línea de estos puntos con sus respectivas pendientes se grafican en la figura 18-1. Continuando de esta manera, generamos el campo direccional más completo que se muestra en la figura 18-2. Para evitar confusiones entre los elementos de línea asociados con la ecuación diferencial y las marcas de los ejes, borramos los ejes en la figura 18-2. El origen está en el centro de la gráfica.

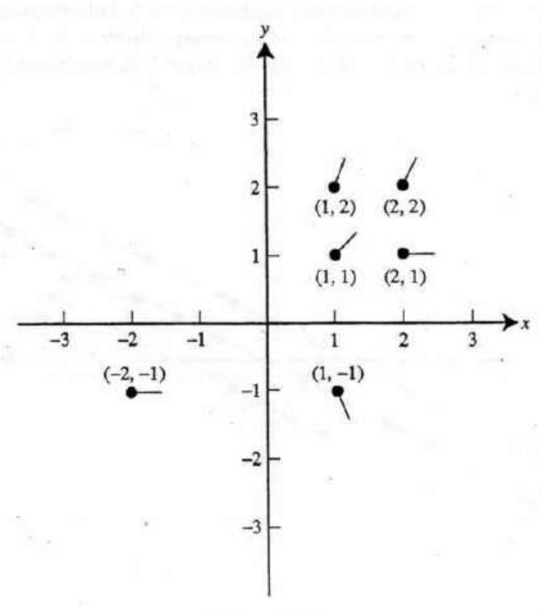


Figura 18.1

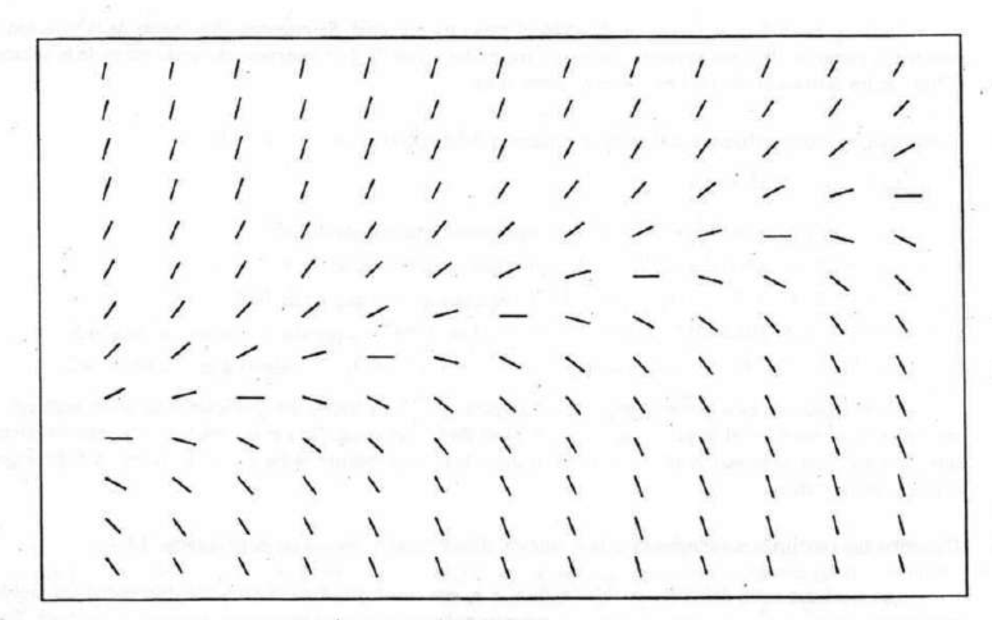


Figura 18.2

18.2. Describa las isoclinas asociadas con la ecuación diferencial definida en el problema 18.1.

Las isoclinas están definidas estableciendo $y' = c$, una constante. Para la ecuación diferencial del problema 18.1 obtenemos

$$c = 2y - x \quad \text{o bien} \quad y = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}c$$

que es la ecuación para una línea recta. Tres de tales isoclinas, que corresponden a $c = 1$, $c = 0$ y $c = -1$, se grafican en la figura 18-3. Sobre la isoclina correspondiente a $c = 1$, cada elemento de línea que comienza sobre la isoclina tendrá una pendiente igual a la unidad. Sobre la isoclina correspondiente a $c = 0$, cada elemento de línea que comienza sobre la isoclina tendrá una pendiente igual a cero. Sobre la isoclina correspondiente a $c = -1$, cada elemento de línea que comienza sobre la isoclina tendrá una pendiente igual a uno negativo. Algunos de estos elementos de línea también están trazados en la figura 18-3.

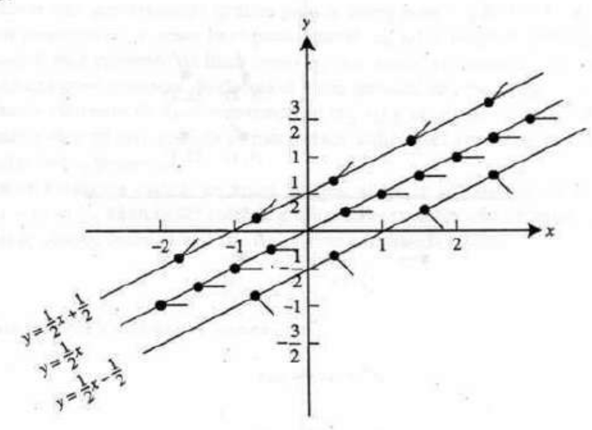


Figura 18.3

18.3. Trace dos curvas de la solución para la ecuación diferencial dada en el problema 18.1.

En la figura 18-2 se da un campo direccional para esta ecuación. Se muestran dos curvas de la solución, una que pasa por el punto (0, 0) y una segunda que pasa a través del punto (0, 2). Obsérvese que cada curva de la solución sigue el flujo de los elementos de línea en el campo direccional.

18.4. Construya un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2 - 1$.

Aquí $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

En $x = 0$, $y = 0$, $f(0, 0) = (0)^2 + (0)^2 - 1 = -1$, equivalente a un ángulo de $-45°$.

En $x = 1$, $y = 2$, $f(1, 2) = (1)^2 + (2)^2 - 1 = 4$, equivalente a un ángulo de $76.0°$.

En $x = -1$, $y = 2$, $f(-1, 2) = (-1)^2 + (2)^2 - 1 = 4$, equivalente a un ángulo de $76.0°$.

En $x = 0.25$, $y = 0.5$, $f(0.25, 0.5) = (0.25)^2 + (0.5)^2 - 1 = -0.6875$, equivalente a un ángulo de $-34.5°$.

En $x = -0.3$, $y = -0.1$, $f(-0.3, -0.1) = (-0.3)^2 + (-0.1)^2 - 1 = -0.9$, equivalente a un ángulo de $-42.0°$.

Continuando de esta manera, generamos la figura 18-5. En cada punto, graficamos un corto segmento de línea proveniente del punto en el ángulo especificado a partir de la horizontal. Para evitar confusiones entre los elementos de línea asociados con la ecuación diferencial y las marcas de los ejes, borramos los ejes en la figura 18-5. El origen está en el centro de la gráfica.

18.5. Describa las isoclinas asociadas con la ecuación diferencial definida en el problema 18.4.

Las isoclinas están definidas estableciendo $y' = c$, una constante. Para la ecuación diferencial del problema 18.4 obtenemos $c = x^2 + y^2 - 1$ o bien $x^2 + y^2 = c + 1$, que es la ecuación para un círculo centrado en el origen. Tres de tales isoclinas, correspondientes a $c = 4$, $c = 1$ y $c = 0$, se grafican en la figura 18-6. Sobre la isoclina correspondiente a $c = 4$,

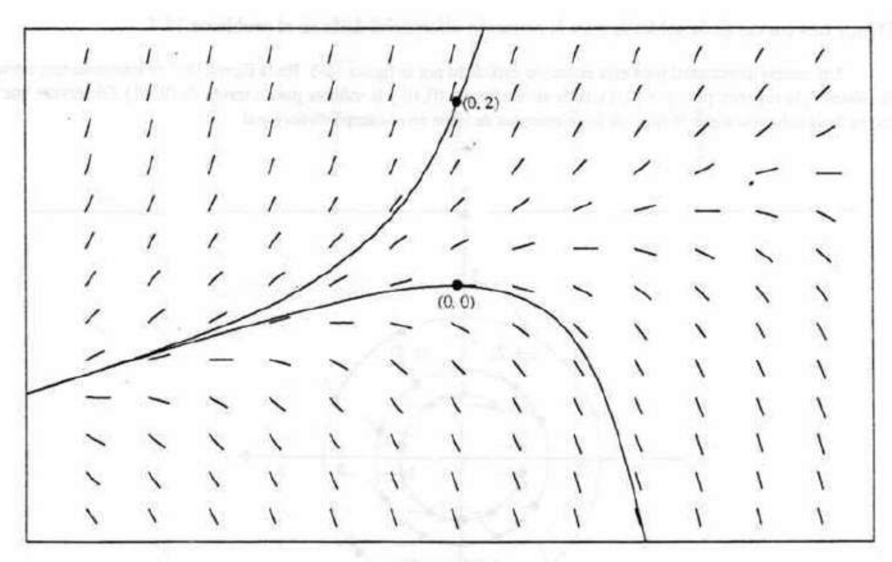


Figura 18.4

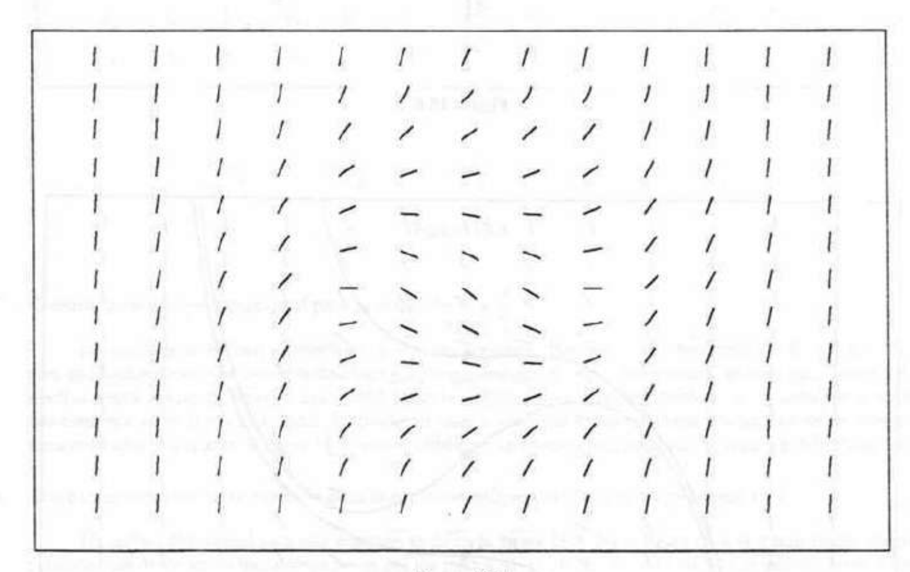


Figura 18.5

cada elemento de línea que comienza sobre la isoclina tendrá una pendiente igual a cuatro. Sobre la isoclina correspondiente a $c = 1$, cada elemento de línea que comienza sobre la isoclina tendrá una pendiente igual a la unidad. Sobre la isoclina correspondiente a $c = 0$, cada elemento de línea que comienza sobre la isoclina tendrá una pendiente igual a cero. Algunos de estos elementos de línea también se trazan en la figura 18-6.

18.6. Dibuje tres curvas de la solución para la ecuación diferencial dada en el problema 18.4.

Un campo direccional para esta ecuación está dado por la figura 18-5. En la figura 18-7 se muestran tres curvas de la solución, la superior pasa por (0, 1), la de en medio por (0, 0) y la inferior pasa a través de (0, –1). Obsérvese que cada curva de la solución sigue el flujo de los elementos de línea en el campo direccional.

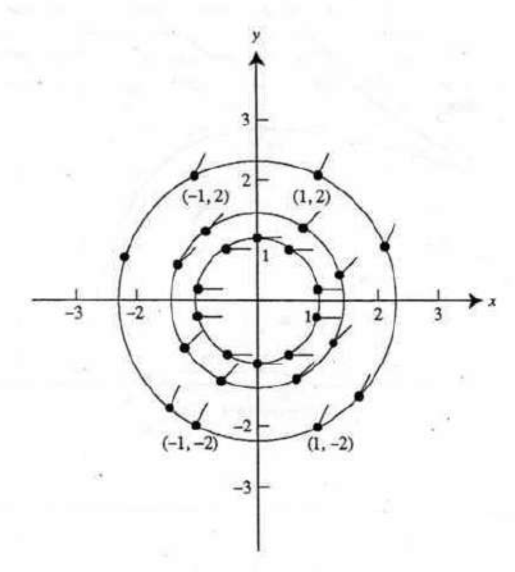


Figura 18.6

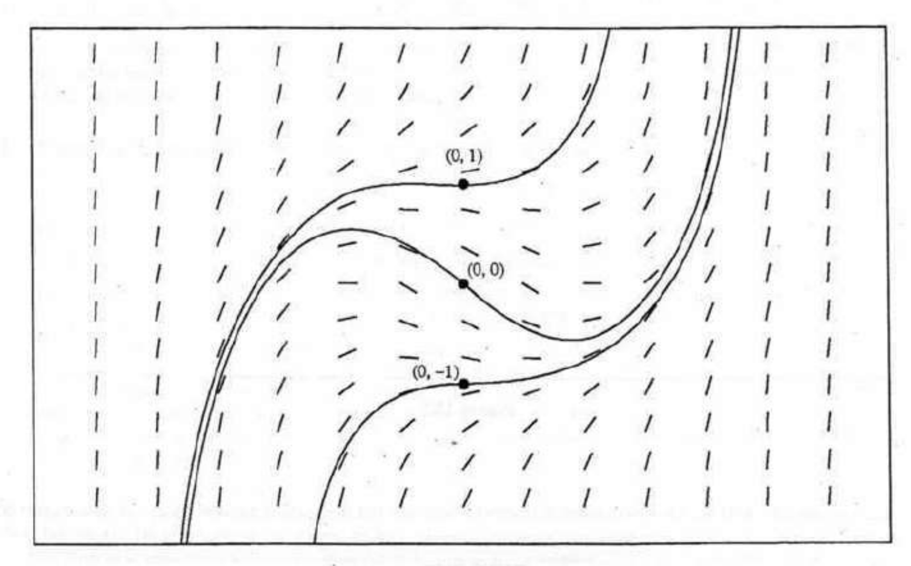


Figura 18.7

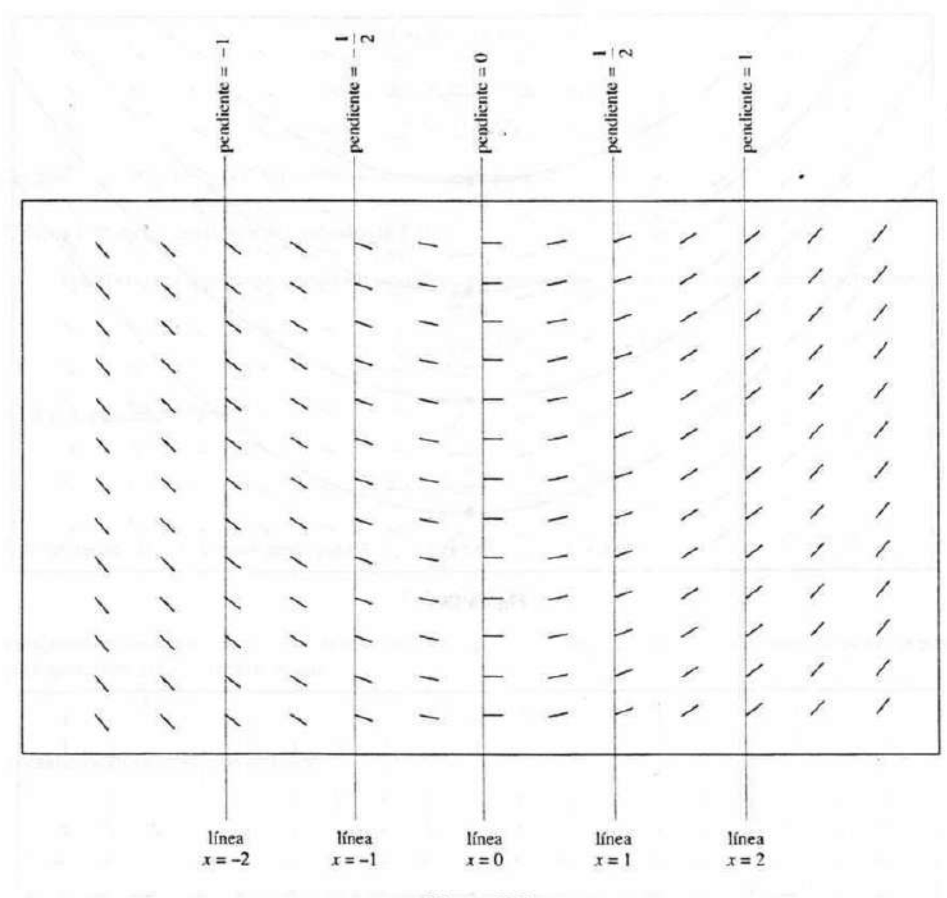


Figura 18.8

18.7. Construya un campo direccional para la ecuación $y' = \dfrac{x}{2}$.

Las isoclinas se definen estableciendo $y' = c$, una constante. Haciendo esto, obtenemos $x = 2c$, que es la ecuación para una línea recta vertical. Sobre la isoclina $x = 2$, correspondiente a $c = 1$, cada elemento de línea que comience sobre la isoclina tendrá una pendiente igual a la unidad. Sobre la isoclina $x = -1$, correspondiente a $c = -\frac{1}{2}$, cada elemento de línea que comience sobre la isoclina tendrá una pendiente igual a $-\frac{1}{2}$. Éstas y otras isoclinas con algunos de sus elementos de línea asociados se trazan en la figura 18-8, lo cual constituye un campo direccional para la ecuación diferencial dada.

18.8. Trace cuatro curvas de la solución para la ecuación diferencial dada en el problema 18.7.

Un campo direccional para esta ecuación se da en la figura 18-8. En la figura 18-9 se trazan cuatro curvas de la solución, que desde arriba hacia abajo pasan por los puntos (0, 1), (0, 0), (0, −1) y (0, −2), respectivamente. Obsérvese que la ecuación diferencial se resuelve fácilmente por integración directa. Su solución, $y = x^2/4 + k$, donde k es una constante de integración, es una familia de parábolas, una para cada valor de k.

18.9. Trace curvas de la solución para la ecuación diferencial $y' = 5y(y - 1)$.

La figura 18-10 da un campo direccional para esta ecuación. Dos isoclinas con elementos de línea con pendientes cero son las líneas rectas $y = 0$ y $y = 1$. Obsérvese que las curvas de la solución tienen formas diferentes que dependen de si están por arriba de estas isoclinas, entre ellas, o por debajo. En la figura 18-11 desde *a*) hasta *c*) se traza una curva de la solución representativa de cada tipo.

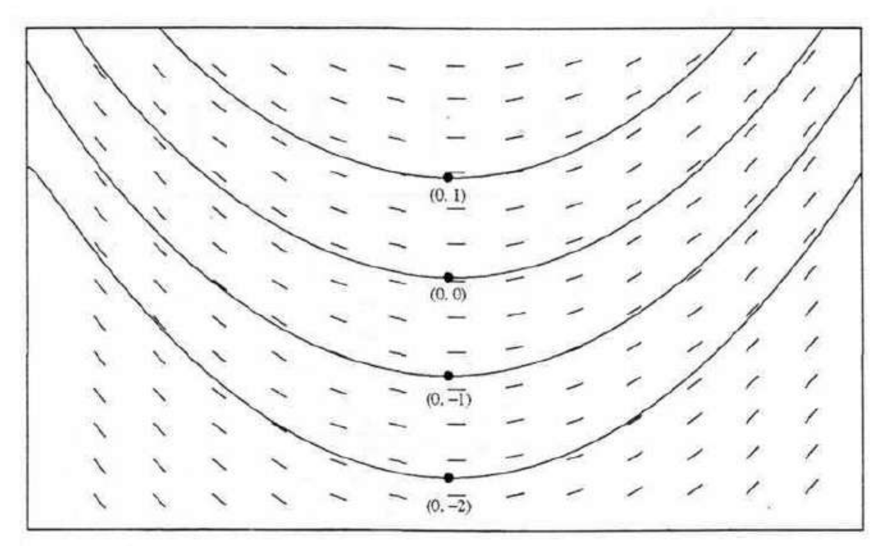


Figura 18.9

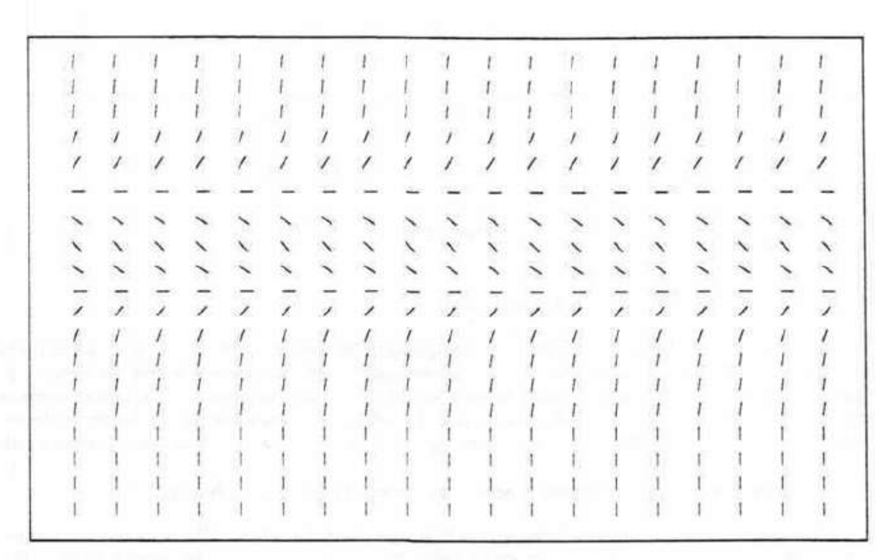


Figura 18.10

18.10. Dé una derivación geométrica del método de Euler.

Asuma que $y_n = y(x_n)$ ya ha sido calculada, de modo que y'_n ya se conoce, a través de la ecuación (*18.5*). Trace una línea recta $l(x)$ que parta de (x_n, y_n) y tenga una pendiente y'_n y utilice $l(x)$ para aproximar a $y(x)$ en el intervalo $[x_n, x_{n+1}]$ (véase la figura 18-12). El valor $l(x_{n+1})$ se toma como y_{n+1}. De este modo,

$$l(x) = (y_n')x + [y_n - (y_n')x_n]$$

y

$$l(x_{n+1}) = (y_n')x_{n+1} + [y_n - (y_n')x_n]$$
$$= y_n + (y_n')(x_{n+1} - x_n) = y_n + hy_n'$$

De aquí, $y_{n+1} = y_n + hy_n'$, lo cual constituye el método de Euler.

18.11. Dé una derivación analítica del método de Euler.

Sea $Y(x)$ quien represente la solución verdadera. Entonces, usando la definición de la derivada, tenemos

$$Y'(x_n) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Y(x_n + \Delta x) - Y(x_n)}{\Delta x}$$

Si Δx es pequeña, entonces

$$Y'(x_n) \approx \frac{Y(x_n + \Delta x) - Y(x_n)}{\Delta x}$$

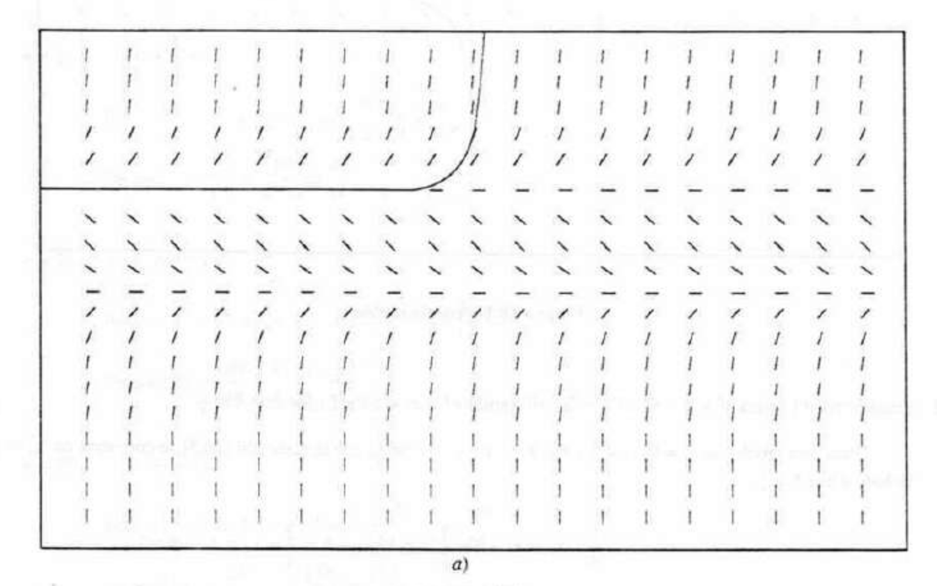
Estableciendo $\Delta x = h$ y resolviendo para $Y(x_n + \Delta x) = Y(x_{n+1})$, obtenemos

$$Y(x_{n+1}) \approx Y(x_n) + hY'(x_n) \tag{1}$$

Finalmente, si utilizamos y_n y y_n' para aproximar $Y(x_n)$ y $Y'(x_n)$, respectivamente, el lado derecho de *(1)* se puede usar para aproximar $Y(x_{n+1})$. De este modo,

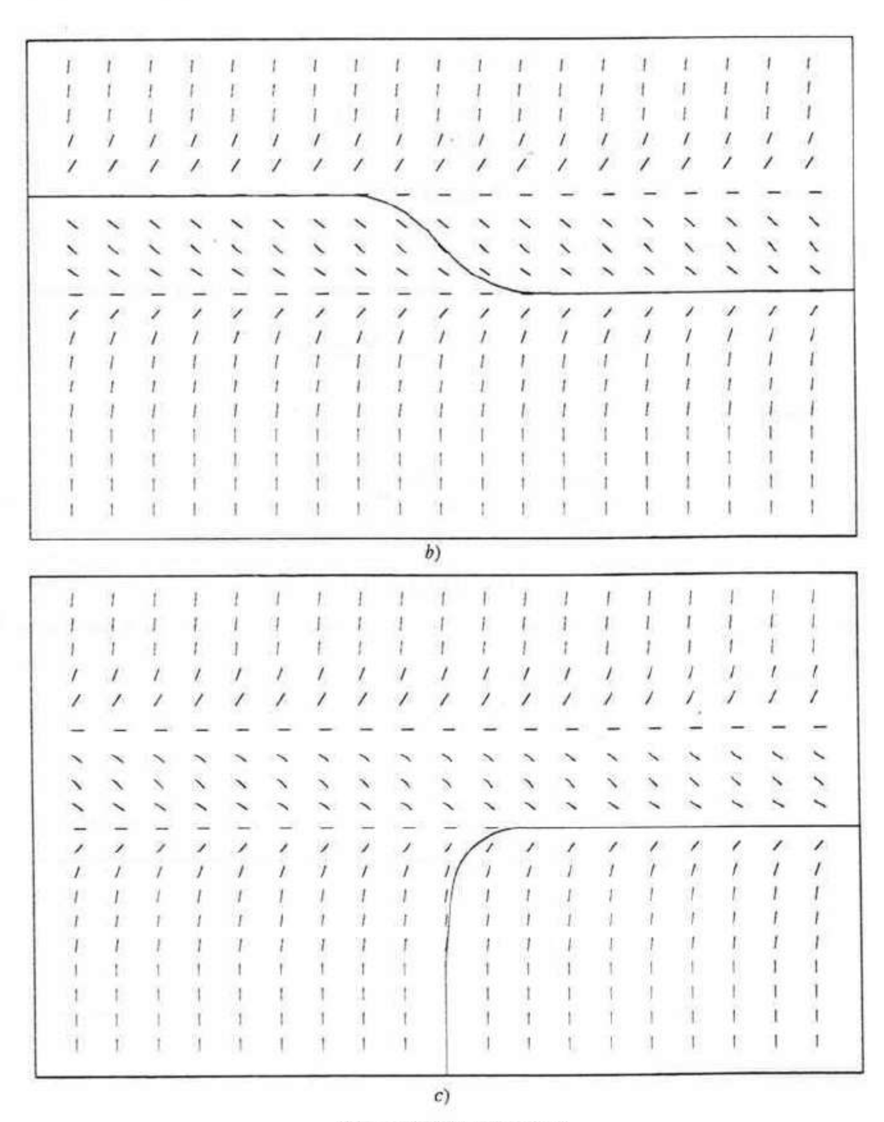
$$y_{n+1} = y_n + hy_n'$$

lo cual constituye el método de Euler.



a)

Figura 18.11



b)

c)

Figura 18.11 (*continuación*)

18.12. Encuentre $y(1)$ para $y' = y - x$; $y(0) = 2$, utilizando el método de Euler con $h = \frac{1}{4}$.

Para este problema, $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ y $f(x, y) = y - x$; de modo que la ecuación (*18.5*) se convierte en $y_n' = y_n - x_n$. Debido a que $h = \frac{1}{4}$,

$$x_1 = x_0 + h = \frac{1}{4} \quad x_2 = x_1 + h = \frac{1}{2} \quad x_3 = x_2 + h = \frac{3}{4} \quad x_4 = x_3 + h = 1$$

Usando la ecuación (*18.4*) con $n = 0, 1, 2, 3$ sucesivamente, ahora calculamos los correspondientes valores de y.

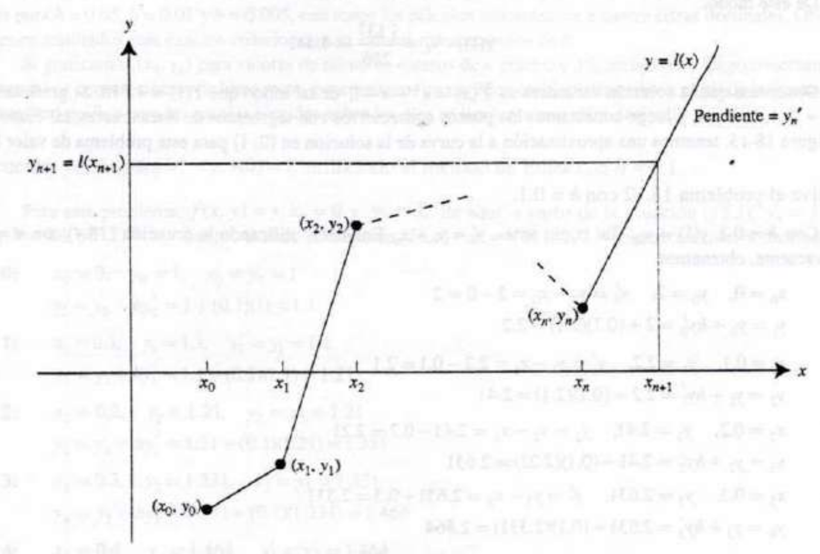


Figura 18.12

= 0: $y_1 = y_0 + hy_0'$

Pero $y_0' = f(x_0, y_0) = y_0 - x_0 = 2 - 0 = 2$

De aquí, $y_1 = 2 + \frac{1}{4}(2) = \frac{5}{2}$

= 1: $y_2 = y_1 + hy_1'$

Pero $y_1' = f(x_1, y_1) = y_1 - x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

De aquí, $y_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{49}{16}$

= 2: $y_3 = y_2 + hy_2'$

Pero $y_2' = f(x_2, y_2) = y_2 - x_2 = \frac{49}{16} - \frac{1}{2} = \frac{41}{16}$

De aquí, $y_3 = \frac{49}{16} + \frac{1}{4}\left(\frac{41}{16}\right) = \frac{237}{64}$

= 3: $y_4 = y_3 + hy_3'$

Pero $y_3' = f(x_3, y_3) = y_3 - x_3 = \frac{237}{64} - \frac{3}{4} = \frac{189}{64}$

De aquí, $y_4 = \frac{237}{64} + \frac{1}{4}\left(\frac{189}{64}\right) = \frac{1\,137}{256}$

De este modo,

$$y(1) = y_4 = \frac{1137}{256} = 4.441$$

Obsérvese que la solución verdadera es $Y(x) = e^x + x + 1$, de tal modo que $Y(1) = 4.718$. Si graficamos (x_n, y_n) para $n = 0, 1, 2, 3$ y 4, y luego conectamos los puntos consecutivos con segmentos de líneas rectas, tal como lo hicimos en la figura 18-13, tenemos una aproximación a la curva de la solución en [0, 1] para este problema de valor inicial.

18.13. Resuelva el problema 18.12 con $h = 0.1$.

Con $h = 0.1$, $y(1) = y_{10}$. Tal como antes, $y'_n = y_n - x_n$. Entonces, utilizando la ecuación (*18.4*) con $n = 0, 1, \ldots, 9$ sucesivamente, obtenemos

n = 0: $x_0 = 0,\quad y_0 = 2,\quad y'_0 = y_0 - x_0 = 2 - 0 = 2$
$y_1 = y_0 + hy'_0 = 2 + (0.1)(2.1) = 2.2$

n = 1: $x_1 = 0.1,\quad y_1 = 2.2,\quad y'_1 = y_1 - x_1 = 2.2 - 0.1 = 2.1$
$y_2 = y_1 + hy'_1 = 2.2 + (0.1)(2.1) = 2.41$

n = 2: $x_2 = 0.2,\quad y_2 = 2.41,\quad y'_2 = y_2 - x_2 = 2.41 - 0.2 = 2.21$
$y_3 = y_2 + hy'_2 = 2.41 + (0.1)(2.21) = 2.631$

n = 3: $x_3 = 0.3,\quad y_3 = 2.631,\quad y'_3 = y_3 - x_3 = 2.631 - 0.3 = 2.331$
$y_4 = y_3 + hy'_3 = 2.631 + (0.1)(2.331) = 2.864$

n = 4: $x_4 = 0.4,\quad y_4 = 2.864,\quad y'_4 = y_4 - x_4 = 2.864 - 0.4 = 2.464$
$y_5 = y_4 + hy'_4 = 2.864 + (0.1)(2.464) = 3.110$

n = 5: $x_5 = 0.5,\quad y_5 = 3.110,\quad y'_5 = y_5 - x_5 = 3.110 - 0.5 = 2.610$
$y_6 = y_5 + hy'_5 = 3.110 + (0.1)(2.610) = 3.371$

n = 6: $x_6 = 0.6,\quad y_6 = 3.371,\quad y'_6 = y_6 - x_6 = 3.371 - 0.6 = 2.771$
$y_7 = y_6 + hy'_6 = 3.371 + (0.1)(2.771) = 3.648$

n = 7: $x_7 = 0.7,\quad y_7 = 3.648,\quad y'_7 = y_7 - x_7 = 3.648 - 0.7 = 2.948$
$y_8 = y_7 + hy'_7 = 3.648 + (0.1)(2.948) = 3.943$

n = 8: $x_8 = 0.8,\quad y_8 = 3.943,\quad y'_8 = y_8 - x_8 = 3.943 - 0.8 = 3.143$
$y_9 = y_8 + hy'_8 = 3.943 + (0.1)(3.143) = 4.257$

n = 9: $x_9 = 0.9,\quad y_9 = 4.257,\quad y'_9 = y_9 - x_9 = 4.257 - 0.9 = 3.357$
$y_{10} = y_9 + hy'_9 = 4.257 + (0.1)(3.357) = 4.593$

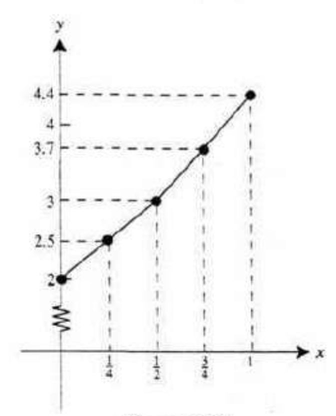


Figura 18.13

Los resultados anteriores se muestran en la tabla 18-1: para comparaciones, la tabla 18-1 también contiene resultados para $h = 0.05$, $h = 0.01$ y $h = 0.005$, con todos los cálculos redondeados a cuatro cifras decimales. Obsérvese que se obtienen resultados más exactos cuando se usan valores más pequeños de h.

Si graficamos (x_n, y_n) para valores de números enteros de n entre 0 y 10, inclusive, y luego conectamos los puntos consecutivos con segmentos de línea recta, generaríamos una gráfica casi indistinguible a partir de la figura 18-13, porque la exactitud gráfica para las escalas elegidas sobre los ejes se limitan a una cifra decimal.

18.14. Encuentre $y(0.5)$ para $y' = y$; $y(0) = 1$, utilizando el método de Euler con $h = 0.1$.

Para este problema, $f(x, y) = y$, $x_0 = 0$ y $y_0 = 1$; de aquí, a partir de la ecuación (*18.5*), $y'_n = f(x_n, y_n) = y_n$. Con $h = 0.1$, $y(0.5) = y_5$. Luego, usando la ecuación (*18.4*) con $n = 0, 1, 2, 3, 4$ sucesivamente, obtenemos

$n = 0$: $x_0 = 0,\quad y_0 = 1,\quad y'_0 = y_0 = 1$
$y_1 = y_0 + hy'_0 = 1 + (0.1)(1) = 1.1$

$n = 1$: $x_1 = 0.1,\quad y_1 = 1.1,\quad y'_1 = y_1 = 1.1$
$y_2 = y_1 + hy'_1 = 1.1 + (0.1)(1.1) = 1.21$

$n = 2$: $x_2 = 0.2,\quad y_2 = 1.21,\quad y'_2 = y_2 = 1.21$
$y_3 = y_2 + hy'_2 = 1.21 + (0.1)(1.21) = 1.331$

$n = 3$: $x_3 = 0.3,\quad y_3 = 1.331,\quad y'_3 = y_3 = 1.331$
$y_4 = y_3 + hy'_3 = 1.331 + (0.1)(1.331) = 1.464$

$n = 4$: $x_4 = 0.4,\quad y_4 = 1.464,\quad y'_4 = y_4 = 1.464$
$y_5 = y_4 + hy'_4 = 1.464 + (0.1)(1.464) = 1.610$

De este modo, $y(0.5) = y_5 = 1.610$. Obsérvese que como la solución verdadera es $Y(x) = e^x$, $Y(0.5) = e^{0.5} = 1.649$.

Tabla 18-1

Método: MÉTODO DE EULER					
Problema: $y' = y - x$; $y(0) = 2$					
x_n	y_n				Solución verdadera $Y(x) = e^x + x + 1$
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.01$	$h = 0.005$	
0.0	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
0.1	2.2000	2.2025	2.2046	2.2049	2.2052
0.2	2.4100	2.4155	2.4202	2.4208	2.4214
0.3	2.6310	2.6401	2.6478	2.6489	2.6499
0.4	2.8641	2.8775	2.8889	2.8903	2.8918
0.5	3.1105	3.1289	3.1446	3.1467	3.1487
0.6	3.3716	3.3959	3.4167	3.4194	3.4221
0.7	3.6487	3.6799	3.7068	3.7102	3.7138
0.8	3.9436	3.9829	4.0167	4.0211	4.0255
0.9	4.2579	4.3066	4.3486	4.3541	4.3596
1.0	4.5937	4.6533	4.7048	4.7115	4.7183

18.15. Encuentre $y(1)$ para $y' = y$; $y(0) = 1$, utilizando el método de Euler con $h = 0.1$.

Procedemos exactamente como en el problema 18.14, excepto que ahora calculamos hasta $n = 9$. Los resultados de estos cálculos se dan en la tabla 18-2. Para comparaciones, la tabla 18-2 también contiene resultados para $h = 0.05$, $h = 0.001$ y $h = 0.005$, con todos los cálculos redondeados a cuatro cifras decimales.

18.16. Encuentre $y(1)$ para $y' = y^2 + 1$; $y(0) = 0$, utilizando el método de Euler con $h = 0.1$.

Aquí, $f(x, y) = y^2 + 1$, $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$; por eso, de la ecuación (*18.5*), $y'_n = f(x_n, y_n) = (y_n)^2 + 1$. Con $h = 0.1$, $y(1) = y_{10}$. Luego, usando la ecuación (*18.4*) con $n = 0, 1, \ldots, 9$ sucesivamente, obtenemos.

$n = 0$: $x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad y'_0 = (y_0)^2 + 1 = (0)^2 + 1 = 1$

$y_1 = y_0 + hy'_0 = 0 + (0.1)(1) = 0.1$

$n = 1$: $x_1 = 0.1, \quad y_1 = 0.1, \quad y'_1 = (y_1)^2 + 1 = (0.1)^2 + 1 = 1.01$

$y_2 = y_1 + hy'_1 = 0.1 + (0.1)(1.01) = 0.201$

$n = 2$: $x_2 = 0.2, \quad y_2 = 0.201$

$y'_2 = (y_2)^2 + 1 = (0.201)^2 + 1 = 1.040$

$y_3 = y_2 + hy'_2 = 0.201 + (0.1)(1.040) = 0.305$

$n = 3$: $x_3 = 0.3, \quad y_3 = 0.305$

$y'_3 = (y_3)^2 + 1 = (0.305)^2 + 1 = 1.093$

$y_4 = y_3 + hy'_3 = 0.305 + (0.1)(1.093) = 0.414$

Tabla 18-2

Método: MÉTODO DE EULER					
Problema: $y' = y$; $y(0) = 1$					
x_n	y_n				Solución verdadera
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.01$	$h = 0.005$	$Y(x) = e^x$
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	1.1000	1.1025	1.1046	1.1049	1.1052
0.2	1.2100	1.2155	1.2202	1.2208	1.2214
0.3	1.3310	1.3401	1.3478	1.3489	1.3499
0.4	1.4641	1.4775	1.4889	1.4903	1.4918
0.5	1.6105	1.6289	1.6446	1.6467	1.6487
0.6	1.7716	1.7959	1.8167	1.8194	1.8221
0.7	1.9487	1.9799	2.0068	2.0102	2.0138
0.8	2.1436	2.1829	2.2167	2.2211	2.2255
0.9	2.3579	2.4066	2.4486	2.4541	2.4596
1.0	2.5937	2.6533	2.7048	2.7115	2.7183

Tabla 18-3

Método: MÉTODO DE EULER					
Problema: $y' = y^2 + 1;\ y(0) = 0$					
x_n	y_n				Solución verdadera $Y(x) = \tan x$
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.01$	$h = 0.005$	
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.1000	0.1001	0.1003	0.1003	0.1003
0.2	0.2010	0.2018	0.2025	0.2026	0.2027
0.3	0.3050	0.3070	0.3088	0.3091	0.3093
0.4	0.4143	0.4183	0.4218	0.4233	0.4228
0.5	0.5315	0.5384	0.5446	0.5455	0.5463
0.6	0.6598	0.6711	0.6814	0.6827	0.6841
0.7	0.8033	0.8212	0.8378	0.8400	0.8423
0.8	0.9678	0.9959	1.0223	1.0260	1.0296
0.9	1.1615	1.2055	1.2482	1.2541	1.2602
1.0	1.3964	1.4663	1.5370	1.5470	1.5574

$n = 4$: $x_4 = 0.4,\quad y_4 = 0.414$

$$y_4' = (y_4)^2 + 1 = (0.414)^2 + 1 = 1.171$$
$$y_5 = y_4 + hy_4' = 0.414 + (0.1)(1.171) = 0.531$$

Continuando de esta manera, encontramos que $y_{10} = 1.396$.

Los cálculos se encuentran en la tabla 18-3. Para comparaciones, la tabla 18-3 también contiene resultados para $h = 0.05$, $h = 0.01$ y $h = 0.005$, con todos los cálculos redondeados a cuatro cifras decimales. La solución verdadera de este problema es $Y(x) = \tan x$, por ello, $Y(1) = 1.557$.

PROBLEMAS ADICIONALES

En los problemas del 18.17 al 18.22 se dan los campos direccionales. Dibuje algunas de las curvas de la solución.

18.17. Véase figura 18-14.

18.18. Véase figura 18-15.

18.19. Véase figura 18-16.

18.20. Véase figura 18-17.

18.21. Véase figura 18-18.

18.22. Véase figura 18-19.

18.23. Trace un campo direccional para la ecuación $y' = x - y + 1$.

18.24. Describa las isoclinas para la ecuación del problema 18.23.

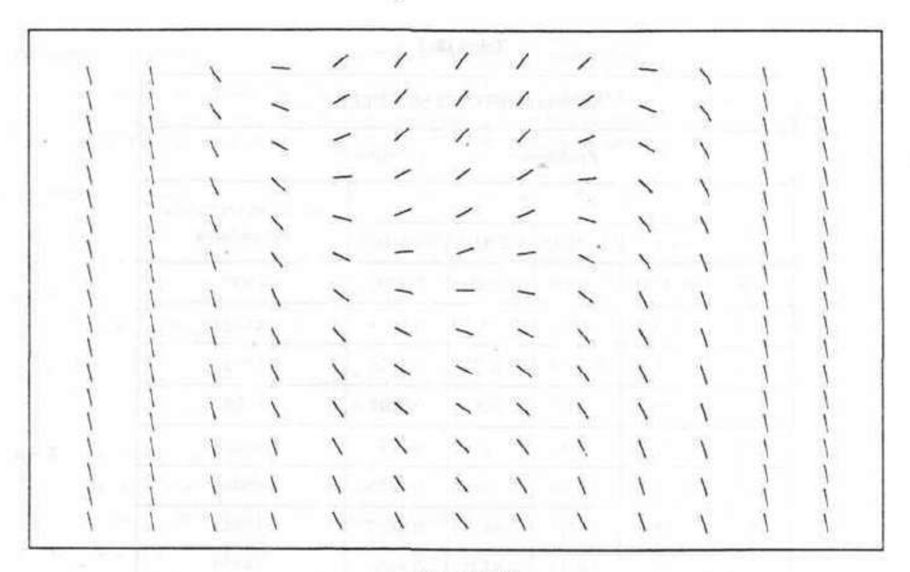


Figura 18.14

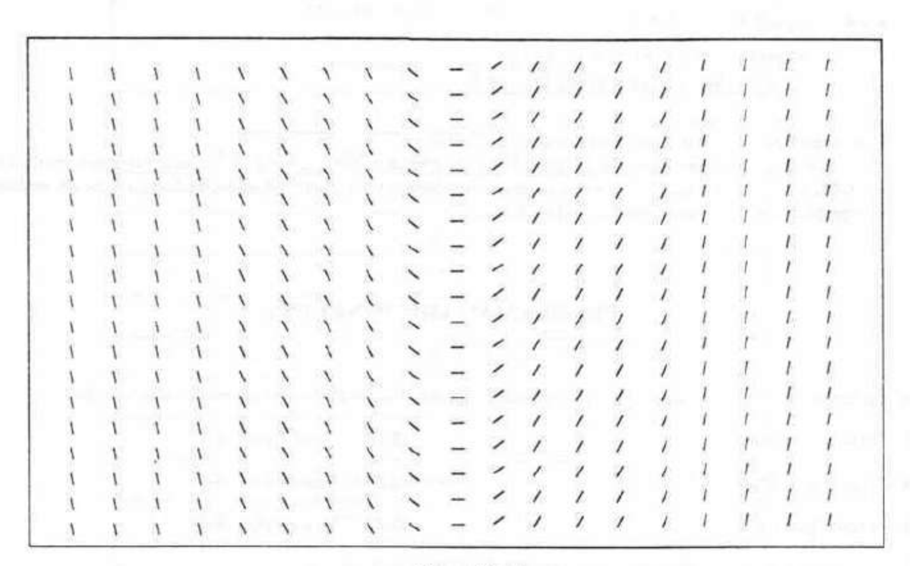


Figura 18.15

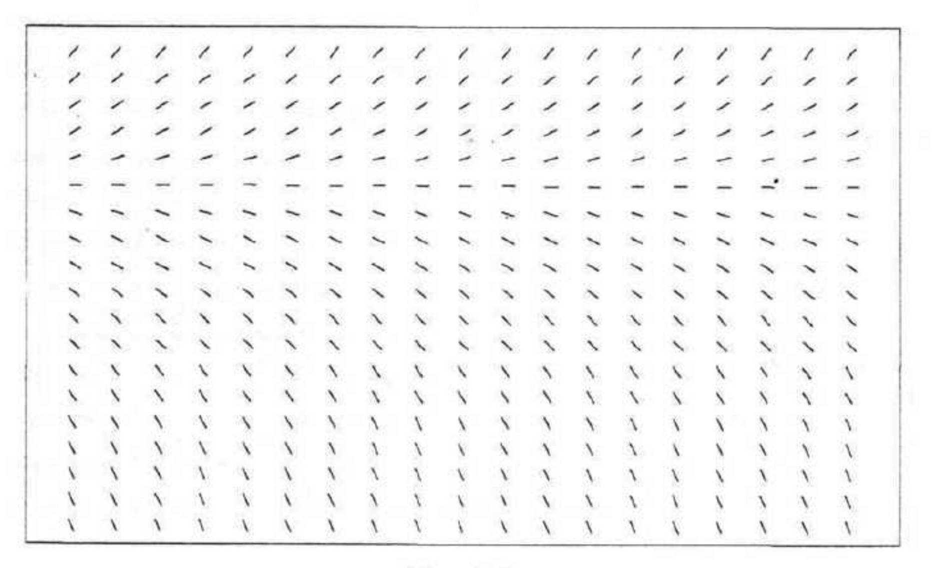


Figura 18.16

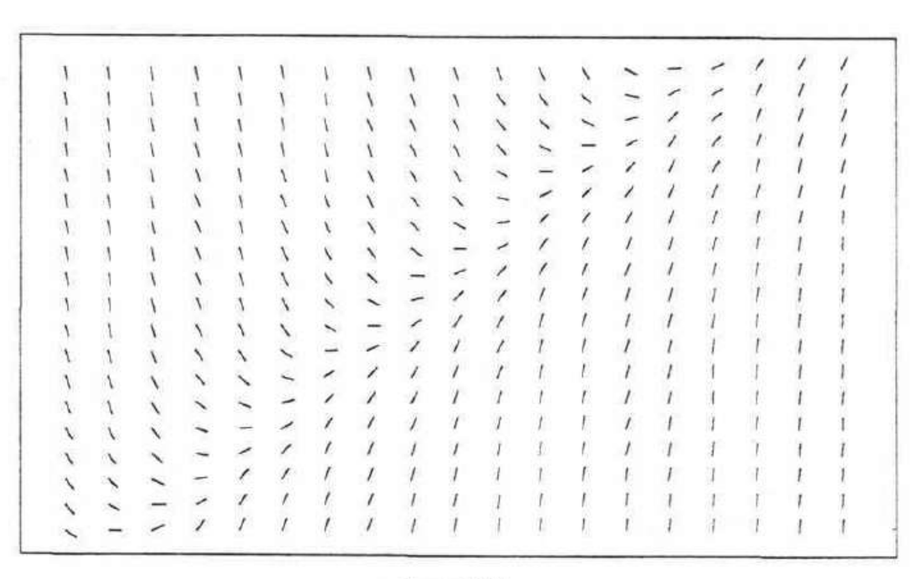


Figura 18.17

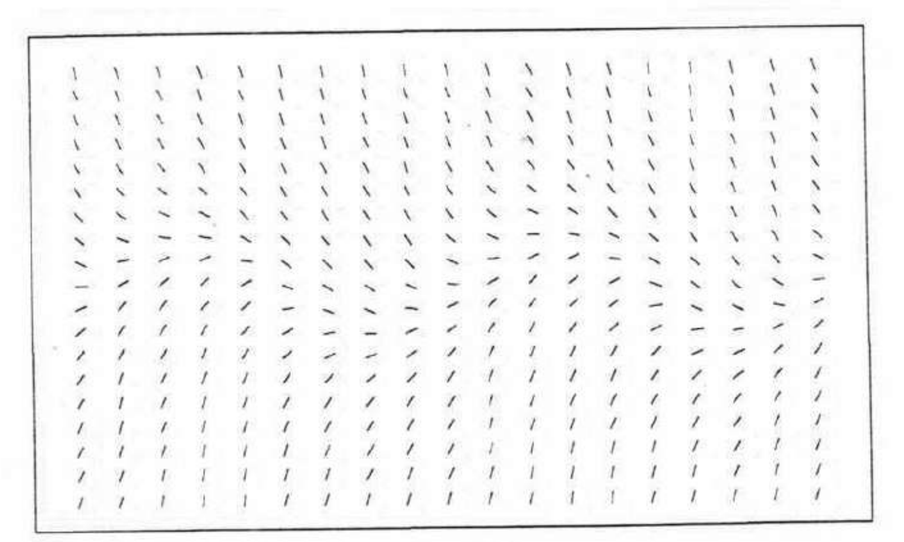


Figura 18.18

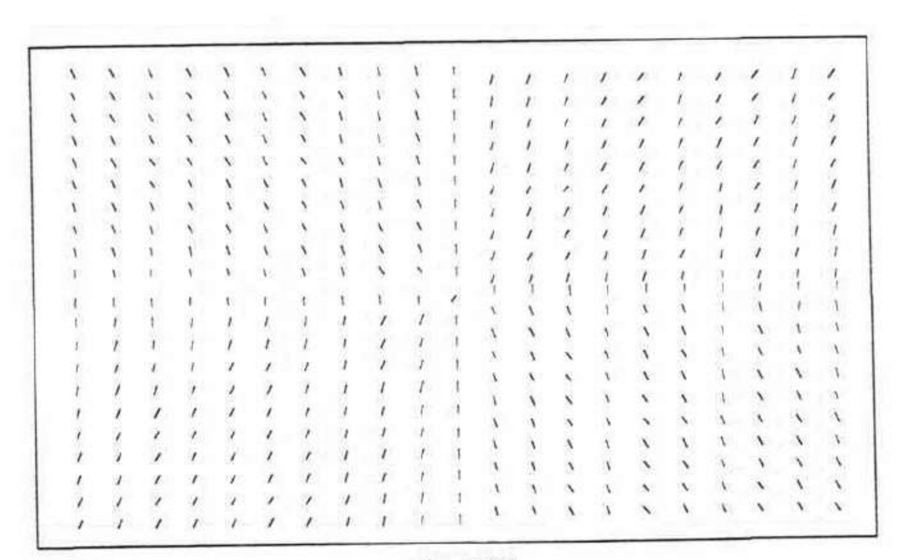


Figura 18.19

18.25. Trace un campo direccional para la ecuación $y' = 2x$.

18.26. Describa las isoclinas para la ecuación del problema 18.25.

18.27. Trace un campo direccional para la ecuación $y' = y - 1$.

18.28. Describa las isoclinas para la ecuación del problema 18.27.

18.29. Trace un campo direccional para la ecuación $y' = y - x^2$.

18.30. Describa las isoclinas para la ecuación del problema 18.29.

18.31. Trace un campo direccional para la ecuación $y' = \operatorname{sen} x - y$.

18.32. Describa las isoclinas para la ecuación del problema 18.31.

18.33. Encuentre $y(1.0)$ para $y' = -y$; $y(0) = 1$, utilizando el método de Euler con $h = 0.1$.

18.34. Encuentre $y(0.5)$ para $y' = 2x$; $y(0) = 0$, utilizando el método de Euler con $h = 0.1$.

18.35. Encuentre $y(0.5)$ para $y' = -y + x + 2$; $y(0) = 2$, utilizando el método de Euler con $h = 0.1$.

18.36. Encuentre $y(0.5)$ para $y' = 4x^3$; $y(0) = 0$, utilizando el método de Euler con $h = 0.1$.

MÉTODOS NUMÉRICOS ADICIONALES PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

19

COMENTARIOS GENERALES

Tal como hemos visto en el capítulo anterior, los métodos gráficos y numéricos son muy útiles para obtener soluciones aproximadas para los problemas de valor inicial en puntos particulares. Es interesante notar que a menudo las únicas operaciones requeridas son la suma, la resta, la multiplicación, la división y la evaluación de las funciones.

En este capítulo consideraremos solamente problemas de valor inicial de primer orden de la forma

$$y' = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0 \tag{19.1}$$

En el capítulo 20 se dan generalizaciones para problemas de mayor orden. Cada método numérico producirá soluciones aproximadas en los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots$, donde la diferencia entre cualesquiera de dos valores consecutivos de x es un tamaño de paso h constante, es decir, $x_{n+1} - x_n = h$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Los comentarios hechos en el capítulo 18 sobre el tamaño de paso siguen siendo válidos para todos los métodos numéricos que se presentan a continuación.

La solución aproximada en x_n se designará como $y(x_n)$, o simplemente y_n. La solución verdadera en x_n se indicará con $Y(x_n)$ o bien Y_n. Obsérvese que una vez que se conoce y_n se puede usar la ecuación (*19.1*) para obtener y_n' como

$$y_n' = f(x_n, y_n) \tag{19.2}$$

El método numérico más sencillo es el método de Euler, descrito en el capítulo 18.

Un método de *predictor-corrector* es un conjunto de dos ecuaciones para y_{n+1}. La primera ecuación, llamada el *predictor*, se utiliza para predecir (obtener una primera aproximación a) y_{n+1}; la segunda ecuación, llamada el *corrector*, se usa luego para obtener un valor corregido (segunda aproximación a) y_{n+1}. En general, el corrector depende del valor predicho.

MÉTODO MODIFICADO DE EULER

Éste es un simple método de predictor-corrector que utiliza el método de Euler (véase capítulo 18) como el predictor y luego usa el valor promedio de y' en ambos extremos, derecho e izquierdo, del intervalo $[x_n, x_{n+1}]$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ como la pendiente de la aproximación del elemento de línea para la solución sobre ese intervalo. Las ecuaciones resultantes son:

$$\text{predictor:} \qquad y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$\text{corrector:} \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(y'_{n+1} + y'_n)$$

Por conveniencia de notación, designamos el valor predicho de y_{n+1} por py_{n+1}. De lo que se desprende, de la ecuación *(19.2)*, que

$$py'_{n+1} = f(x_{n+1}, py_{n+1}) \tag{19.3}$$

El método modificado de Euler se convierte en

$$\text{predictor:} \qquad py_{n+1} = y_n + hy'_n$$

$$\text{corrector:} \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(py'_{n+1} + y'_n) \tag{19.4}$$

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{19.5}$$

donde

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

Éste *no* es un método predictor-corrector.

MÉTODO DE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON

$$\text{predictor:} \qquad py_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3})$$

$$\text{corrector:} \qquad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9py'_{n+1} + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}) \tag{19.6}$$

MÉTODO DE MILNE

$$\text{predictor:} \qquad py_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2})$$

$$\text{corrector:} \qquad y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(py'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1}) \tag{19.7}$$

VALORES INICIALES

El método de Adams-Bashforth-Moulton y el método de Milne requieren información en y_0, y_1, y_2 y y_3 para comenzar. El primero de estos valores está dado por la condición inicial en la ecuación (*19.1*). Los otros tres valores iniciales se consiguen por medio del método de Runge-Kutta.

ORDEN DE UN MÉTODO NUMÉRICO

Un método numérico es de *orden n*, donde *n* es un número entero positivo, si el método es exacto para polinomios de grado *n* o menores. En otras palabras, si la solución verdadera de un problema de valor inicial es un polinomio de grado *n* o menor, entonces la solución aproximada y la solución verdadera serán idénticas para un método de orden *n*.

En general, cuanto mayor sea el orden, más exacto será el método. El método de Euler, ecuación (*18.4*), es de orden uno; el método modificado de Euler, ecuación (*19.4*), es de orden dos, en tanto que los otros tres métodos, ecuaciones de la (*19.5*) a la (*19.7*), son métodos de cuarto orden.

PROBLEMAS RESUELTOS

19.1. Utilice el método modificado de Euler para resolver $y' = y - x$; $y(0) = 2$ en el intervalo [0, 1] con $h = 0.1$.

Aquí $f(x, y) = y - x$, $x_0 = 0$ y $y_0 = 2$. De la ecuación (*19.2*) tenemos $y_0' = f(0, 2) = 2 - 0 = 2$. Usando luego las ecuaciones (*19.4*) y (*19.3*), calculamos

n = 0:

$$x_1 = 0.1$$
$$py_1 = y_0 + hy_0' = 2 + 0.1(2) = 2.2$$
$$py_1' = f(x_1, py_1) = f(0.1, 2.2) = 2.2 - 0.1 = 2.1$$
$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(py_1' + y_0') = 2 + 0.05(2.1 + 2) = 2.205$$
$$y_1' = f(x_1, y_1) = f(0.1, 2.205) = 2.205 - 0.1 = 2.105$$

n = 1:

$$x_2 = 0.2$$
$$py_2 = y_1 + hy_1' = 2.205 + 0.1(2.105) = 2.4155$$
$$py_2' = f(x_2, py_2) = f(0.2, 2.4155) = 2.4155 - 0.2 = 2.2155$$
$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}(py_2' + y_1') = 2.205 + 0.05(2.2155 + 2.105) = 2.421025$$
$$y_2' = f(x_2, y_2) = f(0.2, 2.421025) = 2.421025 - 0.2 = 2.221025$$

n = 2:

$$x_3 = 0.3$$
$$py_3 = y_2 + hy_2' = 2.421025 + 0.1(2.221025) = 2.6431275$$
$$py_3' = f(x_3, py_3) = f(0.3, 2.6431275) = 2.6431275 - 0.3 = 2.3431275$$
$$y_3 = y_2 + \frac{h}{2}(py_3' + y_2') = 2.421025 + 0.05(2.3431275 + 2.221025) = 2.6492326$$
$$y_3' = f(x_3, y_3) = f(0.3, 2.6492326) = 2.6492326 - 0.3 = 2.3492326$$

Continuando de esta manera generamos la tabla 19-1. Compáresela con la tabla 18-1.

19.2. Utilice el método modificado de Euler para resolver $y' = y^2 + 1$; $y(0) = 0$ en el intervalo [0, 1] con $h = 0.1$.

Aquí $f(x, y) = y^2 + 1$, $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$. De la ecuación (*19.2*) tenemos $y_0' = f(0, 0) = (0)^2 + 1 = 1$. Entonces, usando (*19.4*) y (*19.3*), calculamos

Tabla 19-1

Método: MÉTODO MODIFICADO DE EULER			
Problema: $y' = y - x$; $y(0) = 2$			
x_n	$h = 0.1$		Solución verdadera $Y(x) = e^x + x + 1$
	py_n	y_n	
0.0	—	2.0000000	2.0000000
0.1	2.2000000	2.2050000	2.2051709
0.2	2.4155000	2.4210250	2.4214028
0.3	2.6431275	2.6492326	2.6498588
0.4	2.8841559	2.8909021	2.8918247
0.5	3.1399923	3.1474468	3.1487213
0.6	3.4121914	3.4204287	3.4221188
0.7	3.7024715	3.7115737	3.7137527
0.8	4.0127311	4.0227889	4.0255409
0.9	4.3450678	4.3561818	4.3596031
1.0	4.7017999	4.7140808	4.7182818

$n = 0$:

$$x_1 = 0.1$$
$$py_1 = y_0 + hy_0' = 0 + 0.1(1) = 0.1$$
$$py_1' = f(x_1, py_1) = f(0.1, 0.1) = (0.1)^2 + 1 = 1.01$$
$$y_1 = y_0 + (h/2)(py_1' + y_0') = 0 + 0.05(1.01 + 1) = 0.1005$$
$$y_1' = f(x_1, y_1) = f(0.1, 0.1005) = (0.1005)^2 + 1 = 1.0101003$$

$n = 1$:

$$x_2 = 0.2$$
$$py_2 = y_1 + hy_1' = 0.1005 + 0.1(1.0101003) = 0.2015100$$
$$py_2' = f(x_2, py_2) = f(0.2, 0.2015100) = (0.2015100)^2 + 1 = 1.0406063$$
$$y_2 = y_1 + (h/2)(py_2' + y_1') = 0.1005 + 0.05(1.0406063) + 1.0101002 = 0.2030353$$
$$y_2' = f(x_2, y_2) = f(0.2, 0.2030353) = (0.2030353)^2 + 1 = 1.0412233$$

$n = 2$:

$$x_3 = 0.3$$
$$py_3 = y_2 + hy_2' = 0.2030353 + 0.1(1.0412233) = 0.3071577$$
$$py_3' = f(x_3, py_3) = f(0.3, 0.3071577) = (0.3071577)^2 + 1 = 1.0943458$$
$$y_3 = y_2 + (h/2)(py_3' + y_2') = 0.2030353 + 0.05(1.0943458 + 1.0412233) = 0.3098138$$
$$y_3' = f(x_3, y_3) = f(0.3, 0.3098138) = (0.3098138)^2 + 1 = 1.0959846$$

Continuando de esta manera generamos la tabla 19-2. Compáresela con la tabla 18-3.

Tabla 19-2

Método: MÉTODO MODIFICADO DE EULER			
Problema: $y' = y^2 + 1;\ y(0) = 0$			
x_n	$h = 0.1$		Solución verdadera $Y(x) = \tan x$
	py_n	y_n	
0.0	—	0.0000000	0.0000000
0.1	0.1000000	0.1005000	0.1003347
0.2	0.2015100	0.2030353	0.2027100
0.3	0.3071577	0.3098138	0.3093363
0.4	0.4194122	0.4234083	0.4227932
0.5	0.5413358	0.5470243	0.5463025
0.6	0.6769479	0.6848990	0.6841368
0.7	0.8318077	0.8429485	0.8422884
0.8	1.0140048	1.0298869	1.0296386
0.9	1.2359536	1.2592993	1.2601582
1.0	1.5178828	1.5537895	1.5574077

19.2. Encuentre $y(1.6)$ para $y' = 2x;\ y(1) = 1$ utilizando el método mofificado de Euler con $h = 0.2$.

Aquí $f(x, y) = 2x$, $x_0 = 1$ y $y_0 = 2$. De la ecuación (*19.2*), tenemos $y_0' = f(1, 2) = 2(1) = 2$. Entonces, usando (*19.4*) y (*19.3*), calculamos

n = 0:
$$x_1 = x_0 + h = 1 + 0.2 = 1.2$$
$$py_1 = y_0 + hy_0' = 1 + 0.2(2) = 1.4$$
$$py_1' = f(x_1, py_1) = f(1.2, 1.4) = 2(1.2) = 2.4$$
$$y_1 = y_0 + (h/2)(py_1' + y_0') = 1 + 0.1(2.4 + 2) = 1.44$$
$$y_1' = f(x_1, y_1) = f(1.2, 1.44) = 2(1.2) = 2.4$$

n = 1:
$$x_2 = x_1 + h = 1.2 + 0.2 = 1.4$$
$$py_2 = y_1 + hy_1' = 1.44 + 0.2(2.4) = 1.92$$
$$py_2' = f(x_2, py_2) = f(1.4, 1.92) = 2(1.4) = 2.8$$
$$y_2 = y_1 + (h/2)(py_2' + y_1') = 1.44 + 0.1(2.8 + 2.4) = 1.96$$
$$y_2' = f(x_2, y_2) = f(1.4, 1.96) = 2(1.4) = 2.8$$

n = 2:
$$x_3 = x_2 + h = 1.4 + 0.2 = 1.6$$
$$py_3 = y_2 + hy_2' = 1.96 + 0.2(2.8) = 2.52$$
$$py_3' = f(x_3, py_3) = f(1.6, 2.52) = 2(1.6) = 3.2$$
$$y_3 = y_2 + (h/2)(py_3' + y_2') = 1.96 + 0.1(3.2 + 2.8) = 2.56$$

La solución verdadera es $Y(x) = x^2$; de aquí $Y(1.6) = y(1.6) = (1.6)^2 = 2.56$. Dado que la solución verdadera es un polinomio de segundo grado y el método modificado de Euler es un método de segundo orden, se espera esta coincidencia.

9.4. Utilice el método de Runge-Kutta para resolver $y' = y - x$; $y(0) = 2$ en el intervalo [0, 1] con $h = 0.1$.

Aquí $f(x, y) = y - x$. Usando la ecuación (*19.5*) con $n = 0, 1, \ldots, 9$, calculamos

$n = 0$:

$$
\begin{aligned}
&x_0 = 0, \quad y_0 = 2 \\
&k_1 = hf(x_0, y_0) = hf(0, 2) = (0.1)(2 - 0) = 0.2 \\
&k_2 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) = hf\left[0 + \tfrac{1}{2}(0.1), 2 + \tfrac{1}{2}(0.2)\right] \\
&\quad = hf(0.05, 2.1) = (0.1)(2.1 - 0.05) = 0.205 \\
&k_3 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_2) = hf\left[0 + \tfrac{1}{2}(0.1), 2 + \tfrac{1}{2}(0.205)\right] \\
&\quad = hf(0.05, 2.103) = (0.1)(2.103 - 0.05) = 0.205 \\
&k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = hf(0 + 0.1, 2 + 0.205) \\
&\quad = hf(0.1, 2.205) = (0.1)(2.205 - 0.1) = 0.211 \\
&y_1 = y_0 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&\quad = 2 + \tfrac{1}{6}\left[0.2 + 2(0.205) + 2(0.205) + 0.211\right] = 2.205
\end{aligned}
$$

$n = 1$:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = 0.1, \quad y_1 = 2.205 \\
&k_1 = hf(x_1, y_1) = hf(0.1, 2.205) = (0.1)(2.205 - 0.1) = 0.211 \\
&k_2 = hf(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_1) = hf\left[0.1 + \tfrac{1}{2}(0.1), 2.205 + \tfrac{1}{2}(0.211)\right] \\
&\quad = hf(0.15, 2.311) = (0.1)(2.311 - 0.15) = 0.216 \\
&k_3 = hf(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_2) = hf\left[0.1 + \tfrac{1}{2}(0.1), 2.205 + \tfrac{1}{2}(0.216)\right] \\
&\quad = hf(0.15, 2.313) = (0.1)(2.313 - 0.15) = 0.216 \\
&k_4 = hf(x_1 + h, y_1 + k_3) = hf(0.1 + 0.1, 2.205 + 0.216) \\
&\quad = hf(0.2, 2.421) = (0.1)(2.421 - 0.2) = 0.222 \\
&y_2 = y_1 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&\quad = 2.205 + \tfrac{1}{6}\left[0.211 + 2(0.216) + 2(0.216) + 0.222\right] = 2.421
\end{aligned}
$$

$n = 2$:

$$
\begin{aligned}
&x_2 = 0.2, \quad y_2 = 2.421 \\
&k_1 = hf(x_2, y_2) = hf(0.2, 2.421) = (0.1)(2.421 - 0.2) = 0.222 \\
&k_2 = hf(x_2 + \tfrac{1}{2}h, y_2 + \tfrac{1}{2}k_1) = hf\left[0.2 + \tfrac{1}{2}(0.1), 2.421 + \tfrac{1}{2}(0.222)\right] \\
&\quad = hf(0.25, 2.532) = (0.1)(2.532 - 0.25) = 0.228 \\
&k_3 = hf(x_2 + \tfrac{1}{2}h, y_2 + \tfrac{1}{2}k_2) = hf\left[0.2 + \tfrac{1}{2}(0.1), 2.421 + \tfrac{1}{2}(0.228)\right] \\
&\quad = hf(0.25, 2.532) = (0.1)(2.532 - 0.25) = 0.229 \\
&k_4 = hf(x_2 + h, y_2 + k_3) = hf(0.2 + 0.1, 2.421 + 0.229) \\
&\quad = hf(0.3, 2.650) = (0.1)(2.650 - 0.3) = 0.235 \\
&y_3 = y_2 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&\quad = 2.421 + \tfrac{1}{6}\left[0.222 + 2(0.228) + 2(0.229) + 0.235\right] = 2.650
\end{aligned}
$$

Continuando de esta manera generamos la tabla 19-3. Compáresela con la tabla 19-1.

9.5. Utilice el método de Runge-Kutta para resolver $y' = y$; $y(0) = 1$ en el intervalo [0, 1] con $h = 0.1$.

Aquí $f(x, y) = y$. Usando la ecuación (*19.5*) con $n = 0, 1, \ldots, 9$, calculamos

$n = 0$:

$$
\begin{aligned}
&x_0 = 0, \quad y_1 = 1 \\
&k_1 = hf(x_0, y_0) = hf(0, 1) = (0.1)(1) = 0.1 \\
&k_2 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) = hf\left[0 + \tfrac{1}{2}(0.1), 1 + \tfrac{1}{2}(0.1)\right] \\
&\quad = hf(0.05, 1.05) = (0.1)(1.05) = 0.105
\end{aligned}
$$

Tabla 19-3

Método: MÉTODO DE RUNGE-KUTTA		
Problema: $y' = y - x$; $y(0) = 2$		
x_n	$h = 0.1$	Solución verdadera
	y_n	$Y(x) = e^x + x + 1$
0.0	2.0000000	2.0000000
0.1	2.2051708	2.2051709
0.2	2.4214026	2.4214028
0.3	2.6498585	2.6498588
0.4	2.8918242	2.8918247
0.5	3.1487206	3.1487213
0.6	3.4221180	3.4221188
0.7	3.7137516	3.7137527
0.8	4.0255396	4.0255409
0.9	4.3596014	4.3596031
1.0	4.7182797	4.7182818

$$k_3 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_2) = hf\left[0 + \tfrac{1}{2}(0.1), 1 + \tfrac{1}{2}(0.105)\right]$$
$$= hf(0.05, 1.053) = (0.1)(1.053) = 0.105$$
$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = hf(0 + 0.1, 1 + 0.105)$$
$$= hf(0.1, 1.105) = (0.1)(1.105) = 0.111$$
$$y_1 = y_0 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 1 + \tfrac{1}{6}[0.1 + 2(0.105) + 2(0.105) + 0.111] = 1.105$$

$n = 1$: $x_1 = 0.1$, $y_1 = 1.105$

$$k_1 = hf(x_1, y_1) = hf(0.1, 1.105) = (0.1)(1.105) = 0.111$$
$$k_2 = hf(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_1) = hf\left[0.1 + \tfrac{1}{2}(0.1), 1.105 + \tfrac{1}{2}(0.111)\right]$$
$$= hf(0.15, 1.161) = (0.1)(1.161) = 0.116$$
$$k_3 = hf(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_2) = hf\left[0.1 + \tfrac{1}{2}(0.1), 1.105 + \tfrac{1}{2}(0.116)\right]$$
$$= hf(0.15, 1.163) = (0.1)(1.163) = 0.116$$
$$k_4 = hf(x_1 + h, y_1 + k_3) = hf(0.1 + 0.1, 1.105 + 0.116)$$
$$= hf(0.2, 1.221) = (0.1)(1.221) = 0.122$$
$$y_2 = y_1 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 1.105 + \tfrac{1}{6}[0.111 + 2(0.116) + 2(0.116) + 0.122] = 1.221$$

n = 2: $x_2 = 0.2, \quad y_2 = 1.221$

$$k_1 = hf(x_2, y_2) = hf(0.2, 1.221) = (0.1)(1.221) = 0.122$$
$$k_2 = hf(x_2 + \tfrac{1}{2}h, y_2 + \tfrac{1}{2}k_1) = hf\left[0.2 + \tfrac{1}{2}(0.1), 1.221 + \tfrac{1}{2}(1.22)\right]$$
$$= hf(0.25, 1.282) = (0.1)(1.282) = 0.128$$
$$k_3 = hf(x_2 + \tfrac{1}{2}h, y_2 + \tfrac{1}{2}k_2) = hf\left[0.2 + \tfrac{1}{2}(0.1), 1.221 + \tfrac{1}{2}(0.128)\right]$$
$$= hf(0.25, 1.285) = (0.1)(1.285) = 0.129$$
$$k_4 = hf(x_2 + h, y_2 + k_3) = hf(0.2 + 0.1, 1.221 + 0.129)$$
$$= hf(0.3, 1.350) = (0.1)(1.350) = 0.135$$
$$y_3 = y_2 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 1.221 + \tfrac{1}{6}\left[0.122 + 2(0.128) + 2(0.129) + 0.135\right] = 1.350$$

Continuando de esta manera generamos la tabla 19-4.

Tabla 19-4

Método: MÉTODO DE RUNGE-KUTTA		
Problema: $y' = y$; $y(0) = 1$		
x_n	$h = 0.1$	Solución verdadera
	y_n	$Y(x) = e^x$
0.0	1.0000000	1.0000000
0.1	1.1051708	1.1051709
0.2	1.2214026	1.2214028
0.3	1.3498585	1.3498588
0.4	1.4918242	1.4918247
0.5	1.6487206	1.6487213
0.6	1.8221180	1.8221188
0.7	2.0137516	2.0137527
0.8	2.2255396	2.2255409
0.9	2.4596014	2.4596031
1.0	2.7182797	2.7182818

19.6. Utilice el método de Runge-Kutta para resolver $y' = y^2 + 1$; $y(0) = 0$ en el intervalo $[0, 1]$ con $h = 0.1$.

Aquí $f(x, y) = y^2 + 1$. Usando la ecuación (*19.5*) calculamos

n = 0: $x_0 = 0, \quad y_0 = 0$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = hf(0, 0) = (0.1)\left[(0) + 1\right] = 0.1$$
$$k_2 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) = hf\left[0 + \tfrac{1}{2}(0.1), 0 + \tfrac{1}{2}(0.1)\right]$$
$$= hf(0.05, 0.05) = (0.1)\left[(0.05)^2 + 1\right] = 0.1$$

$$k_3 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_2) = hf\left[0 + \tfrac{1}{2}(0.1), 0 + \tfrac{1}{2}(0.1)\right]$$
$$= hf(0.05, 0.05) = (0.1)\left[(0.05)^2 + 1\right] = 0.1$$
$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = hf(0 + 0.1, 0 + 0.1)$$
$$= hf(0.1, 0.1) = (0.1)\left[(0.1)^2 + 1\right] = 0.101$$
$$y_1 = y_0 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 0 + \tfrac{1}{6}\left[0.1 + 2(0.1) + 2(0.1) + 0.101\right] = 0.1$$

$n = 1$: $x_1 = 0.1, \quad y_1 = 0.1$

$$k_1 = hf(x_1, y_1) = hf(0.1, 0.1) = (0.1)\left[(0.1)^2 + 1\right] = 0.101$$
$$k_2 = hf(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_1) = hf\left[0.1 + \tfrac{1}{2}(0.1), 0.1 + \tfrac{1}{2}(0.101)\right]$$
$$= hf(0.15, 0.151) = (0.1)\left[(0.151)^2 + 1\right] = 0.102$$
$$k_3 = hf(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_2) = hf\left[0.1 + \tfrac{1}{2}(0.1), (0.1) + \tfrac{1}{2}(0.102)\right]$$
$$= hf(0.15, 0.151) = (0.1)\left[(0.151)^2 + 1\right] = 0.102$$
$$k_4 = hf(x_1 + h, y_1 + k_3) = hf(0.1 + 0.1, 0.1 + 0.102)$$
$$= hf(0.2, 0.202) = (0.1)\left[(0.202)^2 + 1\right] = 0.104$$
$$y_2 = y_1 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 0.1 + \tfrac{1}{6}\left[0.101 + 2(0.102) + 2(0.102) + 0.104\right] = 0.202$$

$n = 2$: $x_2 = 0.2, \quad y_2 = 0.202$

$$k_1 = hf(x_2, y_2) = hf(0.2, 0.202) = (0.1)\left[(0.202)^2 + 1\right] = 0.104$$
$$k_2 = hf(x_2 + \tfrac{1}{2}h, y_2 + \tfrac{1}{2}k_1) = hf\left[0.2 + \tfrac{1}{2}(0.1), 0.202 + \tfrac{1}{2}(0.104)\right]$$
$$= hf(0.25, 0.254) = (0.1)\left[(0.254)^2 + 1\right] = 0.106$$
$$k_3 = hf(x_2 + \tfrac{1}{2}h, y_2 + \tfrac{1}{2}k_2) = hf\left[0.2 + \tfrac{1}{2}(0.1), 0.202 + \tfrac{1}{2}(0.106)\right]$$
$$= hf(0.25, 0.255) = (0.1)\left[(0.255)^2 + 1\right] = 0.107$$
$$k_4 = hf(x_2 + h, y_2 + k_3) = hf(0.2 + 0.1, 0.202 + 0.107)$$
$$= hf(0.3, 0.309) = (0.1)\left[(0.309)^2 + 1\right] = 0.110$$
$$y_3 = y_2 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 0.202 + \tfrac{1}{6}\left[0.104 + 2(0.106) + 2(0.107) + 0.110\right] = 0.309$$

Continuando de esta manera generamos la tabla 19-5.

19.7. Utilice el método de Adams-Bashforth-Moulton para resolver $y' = y - x;\ y(0) = 2$ en el intervalo [0, 1] con $h = 0.1$.

Aquí $f(x, y) = y - x$, $x_0 = 0$ y $y_0 = 2$. Usando la tabla 19-3 encontramos que los tres valores iniciales adicionales son $y_1 = 2.2051708$, $y_2 = 2.4214026$ y $y_3 = 2.6498585$. De este modo,

$$y_0' = y_0 - x_0 = 2 - 0 = 2 \qquad y_1' = y_1 - x_1 = 2.1051708$$
$$y_2' = y_2 - x_2 = 2.2214026 \qquad y_3' = y_3 - x_3 = 2.3498585$$

Entonces, usando las ecuaciones (*19.6*), comenzando con $n = 3$, y la ecuación (*19.3*), calculamos

$n = 3$: $x_4 = 0.4$

$$py_4 = y_3 + (h/24)(55y_3' - 59y_2' + 37y_1' - 9y_0')$$
$$= 2.6498585 + (0.1/24)[55(2.349585) - 59(2.2214026) + 37(2.1051708) - 9(2)]$$
$$= 2.8918201$$
$$py_4' = py_4 - x_4 = 2.8918201 - 0.4 = 2.4918201$$
$$y_4 = y_3 + (h/24)(9py_4' + 19y_3' - 5y_2' + y_1')$$
$$= 2.6498585 + (0.1/24)[9(2.4918201) + 19(2.3498585) - 5(2.2214026) + 2.1051708]$$
$$= 2.8918245$$
$$y_4' = y_4 - x_4 = 2.8918245 - 0.4 = 2.4918245$$

Tabla 19-5

Método: MÉTODO DE RUNGE-KUTTA		
Problema: $y' = y^2 + 1;\ y(0) = 0$		
x_n	$h = 0.1$	Solución verdadera
	y_n	$Y(x) = \tan x$
0.0	0.0000000	0.0000000
0.1	0.1003346	0.1003347
0.2	0.2027099	0.2027100
0.3	0.3093360	0.3093363
0.4	0.4227930	0.4227932
0.5	0.5463023	0.5463025
0.6	0.6841368	0.6841368
0.7	0.8422886	0.8422884
0.8	1.0296391	1.0296386
0.9	1.2601588	1.2601582
1.0	1.5574064	1.5574077

$n = 4$: $x_5 = 0.5$

$$\begin{aligned}
py_5 &= y_4 + (h/24)(55y'_4 - 59y'_3 + 37y'_2 - 9y'_1) \\
&= 2.8919245 + (0.1/24)[55(2.4918245) - 59(2.3498585) + 37(2.2214026) - 9(2.1051708)] \\
&= 3.1487164 \\
py'_5 &= py_5 - x_5 = 3.1487164 - 0.5 = 2.6487164 \\
y_5 &= y_4 + (h/24)(9\,py'_5 + 19y'_4 - 5y'_3 + y'_2) \\
&= 2.8918245 + (0.1/24)[9(2.6487164) + 19(2.4918245) - 5(2.3498585) + 2.2214026] \\
&= 3.1487213 \\
y'_5 &= y_5 - x_5 = 3.1487213 - 0.5 = 2.6487213
\end{aligned}$$

$n = 5$: $x_6 = 0.6$

$$\begin{aligned}
py_6 &= y_5 + (h/24)(55y'_5 - 59y'_4 + 37y'_3 - 9y'_2) \\
&= 3.1487164 + (0.1/24)[55(2.6487213) - 59(2.4918245) + 37(2.3498585) - 9(2.2214026)] \\
&= 3.4221137 \\
py'_6 &= py_6 - x_6 = 3.4221137 - 0.6 = 2.8221137 \\
y_6 &= y_5 + (h/24)(9\,py'_6 + 19y'_5 - 5y'_4 + y'_3) \\
&= 3.1487213 + (0.1/24)[9(2.8221137) + 19(2.6487164) - 5(2.4918245) + 2.3498585] \\
&= 3.4221191 \\
y'_6 &= y_6 - x_6 = 3.4221191 - 0.6 = 2.8221191
\end{aligned}$$

Continuando de esta manera generamos la tabla 19-6.

Tabla 19-6

Método: MÉTODO DE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON			
Problema: $y' = y - x;\ y(0) = 2$			
x_n	$h = 0.1$		Solución verdadera $Y(x) = e^x + x + 1$
	py_n	y_n	
0.0	—	2.0000000	2.0000000
0.1	—	2.2051708	2.2051709
0.2	—	2.4214026	2.4214028
0.3	—	2.6498585	2.6498588
0.4	2.8918201	2.8918245	2.8918247
0.5	3.1487164	3.1487213	3.1487213
0.6	3.4221137	3.4221191	3.4221188
0.7	3.7137473	3.7137533	3.7137527
0.8	4.0255352	4.0255418	4.0255409
0.9	4.3595971	4.3596044	4.3596031
1.0	4.7182756	4.7182836	4.7182818

19.8. Utilice el método de Adams-Bashforth-Moulton para resolver $y' = y^2 + 1;\ y(0) = 0$, en el intervalo $[0, 1]$ con $h = 0.1$.

Aquí $f(x, y) = y^2 + 1$, $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$. Usando la tabla 19-5 encontramos que los tres valores iniciales adicionales son $y_1 = 0.1003346$, $y_2 = 0.2027099$ y $y_3 = 0.3093360$. De este modo,

$$y_0' = (y_0)^2 + 1 = (0)^2 + 1 = 1$$
$$y_1' = (y_1)^2 + 1 = (0.1003346)^2 + 1 = 1.0100670$$
$$y_2' = (y_2)^2 + 1 = (0.2027099)^2 + 1 = 1.0410913$$
$$y_3' = (y_3)^2 + 1 = (0.3093360)^2 + 1 = 1.0956888$$

Entonces, usando las ecuaciones (*19.6*), comenzando con $n = 3$, y la ecuación (*19.3*), calculamos

$n = 3$: $x_4 = 0.4$

$$\begin{aligned} py_4 &= y_3 + (h/24)(55y_3' - 59y_2' + 37y_1' - 9y_0') \\ &= 0.3093360 + (0.1/24)[55(1.0956888) - 59(1.0410913) + 37(1.0100670) - 9(1)] \\ &= 0.4227151 \end{aligned}$$

$$py_4' = (py_4)^2 + 1 = (0.4227151)^2 + 1 = 1.1786881$$

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + (h/24)(9py_4' + 19y_3' - 5y_2' + y_1') \\ &= 0.3093360 + (0.1/24)[9(1.1786881) + 19(1.0956888) - 5(1.0410913) + 1.0100670] \\ &= 0.4227981 \end{aligned}$$

$$y_4' = (y_4)^2 + 1 = (0.4227981)^2 + 1 = 1.1787582$$

n = 4: $x_5 = 0.5$

$$py_5 = y_4 + (h/24)(55y'_4 - 59y'_3 + 37y'_2 - 9y'_1)$$
$$= 0.4227981 + (0.1/24)[55(1.1787582) - 59(1.0956888) + 37(1.0410913) - 9(1.0100670)]$$
$$= 0.5461974$$
$$py'_5 = (py_5)^2 + 1 = (0.5461974)^2 + 1 = 1.2983316$$
$$y_5 = y_4 + (h/24)(9py'_5 + 19y'_4 - 5y'_3 + y'_2)$$
$$= 0.4227981 + (0.1/24)[9(1.2983316) + 19(1.1787582) - 5(1.0956888) + 1.0410913]$$
$$= 0.5463149$$
$$y'_5 = (y_5)^2 + 1 = (0.5463149)^2 + 1 = 1.2984600$$

n = 5: $x_6 = 0.6$

$$py_6 = y_5 + (h/24)(55y'_5 - 59y'_4 + 37y'_3 - 9y'_2)$$
$$= 0.5463149 + (0.1/24)[55(1.2984600) - 59(1.1787582) + 37(1.0956888) - 9(1.0410913)]$$
$$= 0.6839784$$
$$py'_6 = (py_6)^2 + 1 = (0.6839784)^2 + 1 = 1.4678265$$
$$y_6 = y_5 + (h/24)(9py'_6 + 19y'_5 - 5y'_4 + y'_3)$$
$$= 0.5463149 + (0.1/24)[9(1.4678265) + 19(1.2984600) - 5(1.1787582) + 1.0956888]$$
$$= 0.6841611$$
$$y'_6 = (y_6)^2 + 1 = (0.6841611)^2 + 1 = 1.4680764$$

Continuando de esta manera, generamos la tabla 19-7.

Tabla 19-7

Método: MÉTODO DE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON			
Problema: $y' = y^2 + 1$; $y(0) = 0$			
x_n	$h = 0.1$		Solución verdadera $Y(x) = \tan x$
	py_n	y_n	
0.0	—	0.0000000	0.0000090
0.1	—	0.1003346	0.1003347
0.2	—	0.2027099	0.2027100
0.3	—	0.3093360	0.3093363
0.4	0.4227151	0.4227981	0.4227932
0.5	0.5461974	0.5463149	0.5463025
0.6	0.6839784	0.6841611	0.6841368
0.7	0.8420274	0.8423319	0.8422884
0.8	1.0291713	1.0297142	1.0296386
0.9	1.2592473	1.2602880	1.2601582
1.0	1.5554514	1.5576256	1.5574077

19.9. Utilice el método de Adams-Bashforth-Moulton para resolver $y' = 2xy/(x^2 - y^2)$; $y(1) = 3$ en el intervalo $[1, 2]$ con $h = 0.2$.

Aquí $f(x, y) = 2xy/(x^2 - y^2)$, $x_0 = 1$ y $y_0 = 3$. Con $h = 0.2$, $x_1 = x_0 + h = 1.2$, $x_2 = x_1 + h = 1.4$ y $x_3 = x_2 + h = 1.6$. Usando el método de Runge-Kutta para obtener los correspondientes valores de y necesarios para comenzar el método de Adams-Bashforth- Moulton, encontramos $y_1 = 2.8232844$, $y_2 = 2.5709342$ y $y_3 = 2.1321698$. De la ecuación (*19.3*) se desprende que

$$y_0' = \frac{2x_0y_0}{(x_0)^2 - (y_0)^2} = \frac{2(1)(3)}{(1)^2 - (3)^2} = -0.75$$

$$y_1' = \frac{2x_1y_1}{(x_1)^2 - (y_1)^2} = \frac{2(1.2)(2.8232844)}{(1.2)^2 - (2.8232844)^2} = -1.0375058$$

$$y_2' = \frac{2x_2y_2}{(x_2)^2 - (y_2)^2} = \frac{2(1.4)(2.5709342)}{(1.4)^2 - (2.5709342)^2} = -1.5481884$$

$$y_3' = \frac{2x_3y_3}{(x_3)^2 - (y_3)^2} = \frac{2(1.6)(2.1321698)}{(1.6)^2 - (2.1321698)^2} = -3.4352644$$

Entonces, usando las ecuaciones (*19.6*), comenzando con $n = 3$, y la ecuación (*19.3*), calculamos

$n = 3$: $x_4 = 1.8$

$$\begin{aligned} py_4 &= y_3 + (h/24)(55y_3' - 59y_2' + 37y_1' - 9y_0') \\ &= 2.1321698 + (0.1/24)[55(-3.4352644) - 59(-1.5481884) + 37(-1.0375058) - 9(-0.75)] \\ &= 1.0552186 \end{aligned}$$

$$py_4' = \frac{2x_4py_4}{(x_4)^2 - (py_4)^2} = \frac{2(1.8)(1.0552186)}{(1.8)^2 - (1.0552186)^2} = 1.7863919$$

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + (h/24)(9py_4' + 19y_3' - 5y_2' + y_1') \\ &= 2.1321698 + (0.1/24)[9(1.7863919) + 19(-3.4352644) - 5(-1.5481884) - (-1.0375058)] \\ &= 1.7780943 \end{aligned}$$

$$y_4' = \frac{2x_4y_4}{(x_4)^2 - (y_4)^2} = \frac{2(1.8)(1.7780943)}{(1.8)^2 - (1.7780943)^2} = 81.6671689$$

$n = 4$: $x_5 = 2.0$

$$\begin{aligned} py_5 &= y_4 + (h/24)(55y_4' - 59y_3' + 37y_2' - 9y_1') \\ &= 1.7780943 + (0.1/24)[55(81.6671689) - 59(-3.4352644) + 37(-1.5481884) - 9(-1.0375058)] \\ &= 40.4983398 \end{aligned}$$

$$py_5' = \frac{2x_5py_5}{(x_5)^2 - (py_5)^2} = \frac{2(2.0)(40.4983398)}{(2.0)^2 - (40.4983398)^2} = -0.0990110$$

$$\begin{aligned} y_5 &= y_4 + (h/24)(9py_5' + 19y_4' - 5y_3' + y_2') \\ &= 1.17780943 + (0.1/24)[9(-0.0990110) + 19(81.6671689) - 5(-3.4352644) + (-1.5481884)] \\ &= 14.8315380 \end{aligned}$$

$$y_5' = \frac{2x_5y_5}{(x_5)^2 - (y_5)^2} = \frac{2(2.0)(14.8315380)}{(2.0)^2 - (14.8315380)^2} = -0.2746905$$

Estos resultados son problemáticos porque los valores corregidos no están cerca de los valores predichos tal como deberían estarlo. Obsérvese que y_5 es significativamente diferente de py_5 y y_4' es significativamente distinta que py_4'. En cualquier método de predictor-corrector, los valores corregidos de y y y' representan un ajuste fino de los valores predichos, y no un cambio notable. Cuando se dan cambios significativos, éstos son generalmente el resultado de inestabilidad numérica, lo cual se puede remediar con un tamaño de paso pequeño. Sin embargo, algunas veces surgen diferencias significativas a causa de una singularidad en la solución.

En los cálculos anteriores obsérvese que la derivada en $x = 1.8$, precisamente 81.667, genera una pendiente casi vertical y sugiere una posible singularidad cerca de 1.8. La figura 19-1 es un campo direccional para esta ecuación dife-

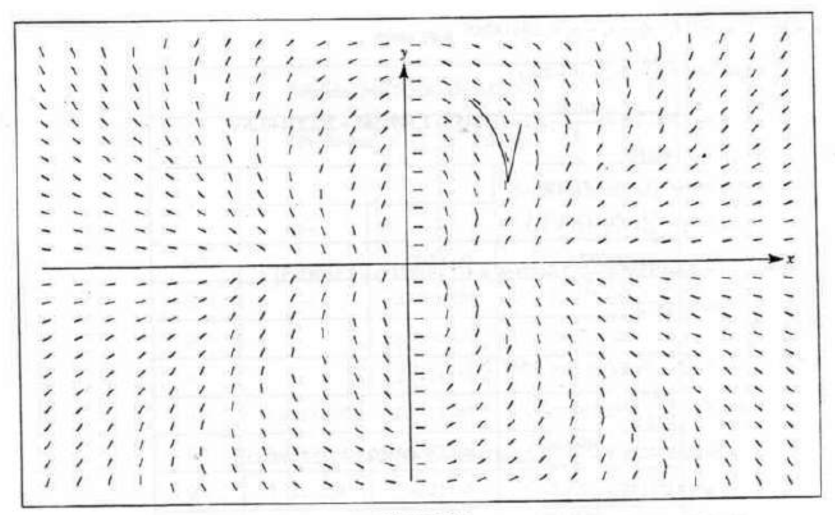


Figura 19.1

rencial. Sobre este campo direccional hemos graficado los puntos desde (x_0, y_0) hasta (x_4, y_4) tal como los determina el método de Adams-Bashforth-Moulton y luego hemos bosquejado la curva de la solución a través de estos puntos consistentes con el campo direccional. El pico entre 1.6 y 1.8 es un claro indicador de un problema.

La solución analítica de la ecuación diferencial está dada en el problema 4.14 como $x^2 + y^2 = ky$. Aplicando la condición inicial encontramos $k = 10/3$, y usando luego la fórmula cuadrática para resolver explícitamente para y, obtenemos la solución

$$y = \frac{5 + \sqrt{25 - 9x^2}}{3}$$

Esta solución está sólo definida en $x = \frac{5}{3}$ y es indefinida en otro valor.

19.10. Vuelva a hacer el problema 19.7 utilizando el método de Milne.

Los valores de y_0, y_1, y_2, y_3 y sus derivadas son exactamente como los dados en el problema 19.7. Usando las ecuaciones (*19.7*) y (*19.3*) calculamos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n = 3:} \qquad py_4 &= y_0 + \frac{4h}{3}(2y_3' - y_2' + 2y_1') \\
&= 2 + \frac{4(0.1)}{3}[2(2.3498585) - 2.2214026 + 2(2.1051708)] \\
&= 2.8918208 \\
py_4' &= py_4 - x_4 = 2.4918208 \\
y_4 &= y_2 + \frac{h}{3}(py_4' + 4y_3' + y_2') \\
&= 2.4214026 + \frac{0.1}{3}[2.4918208 + 4(2.3498585) + 2.2214026] \\
&= 2.8918245
\end{aligned}$$

$n = 4$: $x_4 = 0.4,\ \ y_4' = y_4 - x_4 = 2.4918245$

$$\begin{aligned} py_5 &= y_1 + \frac{4h}{3}(2y_4' - y_3' + 2y_2') \\ &= 2.2051708 + \frac{4(0.1)}{3}[2(2.4918245) - 2.3498585 + 2(2.2214026)] \\ &= 3.1487169 \end{aligned}$$

$$py_5' = py_5 - x_5 = 2.6487169$$

$$\begin{aligned} y_5 &= y_3 + \frac{h}{3}(py_5' + 4y_4' + y_3') \\ &= 2.6498585 + \frac{0.1}{3}[2.6487169 + 4(2.4918245) + 2.3498585] \\ &= 3.1487209 \end{aligned}$$

$n = 5$: $x_5 = 0.5,\ \ y_5' = y_5 - x_5 = 2.6487209$

$$\begin{aligned} py_6 &= y_2 + \frac{4h}{3}(2y_5' - y_4' + 2y_3') \\ &= 2.4214026 + \frac{4(0.1)}{3}[2(2.6487209) - 2.4918245 + 2(2.3498585)] \\ &= 3.4221138 \end{aligned}$$

$$py_6' = py_6 - x_6 = 2.8221138$$

$$\begin{aligned} y_6 &= y_4 + \frac{h}{3}(py_6' + 4y_5' + y_4') \\ &= 2.8918245 + \frac{0.1}{3}[2.8221138 + 4(2.6487209) + 2.4918245] \\ &= 3.4221186 \end{aligned}$$

Continuando de esta manera generamos la tabla 19-8.

19.11. Vuelva a hacer el problema 19.8 utilizando el método de Milne.

Los valores de y_0, y_1, y_2, y_3 y sus derivadas son exactamente como los dados en el problema 19.8. Usando las ecuaciones *(19.7)* y *(19.3)* calculamos

$n = 3$:

$$\begin{aligned} py_4 &= y_0 + \frac{4h}{3}(2y_3' - y_2' + 2y_1') \\ &= 0 + \frac{4(0.1)}{3}[2(1.0956888) - 1.0410913 + 2(1.0100670)] \\ &= 0.4227227 \end{aligned}$$

$$py_4' = (py_4)^2 + 1 = (0.4227227)^2 + 1 = 1.1786945$$

$$\begin{aligned} y_4 &= y_2 + \frac{h}{3}(py_4' + 4y_3' + y_2') \\ &= 0.2027099 + \frac{0.1}{3}[1.1786945 + 4(1.0956888) + 1.0410913] \\ &= 0.4227946 \end{aligned}$$

$n = 4$: $x_4 = 0.4,\ \ y_4' = (y_4)^2 + 1 = (0.4227946)^2 + 1 = 1.1787553$

$$\begin{aligned} py_5 &= y_1 + \frac{4h}{3}(2y_4' - y_3' + 2y_2') \\ &= 0.1003346 + \frac{4(0.1)}{3}[2(1.1787553) - 1.0956888 + 2(1.0410913)] \\ &= 0.5462019 \end{aligned}$$

Tabla 19-8

Método: MÉTODO DE MILNE			
Problema: $y' = y - x;\ y(0) = 2$			
x_n	$h = 0.1$		Solución verdadera $Y(x) = e^x + x + 1$
	py_n	y_n	
0.0	—	2.0000000	2.0000000
0.1	—	2.2051708	2.2051709
0.2	—	2.4214026	2.4214028
0.3	—	2.6498585	2.6498588
0.4	2.8918208	2.8918245	2.8918247
0.5	3.1487169	3.1487209	3.1487213
0.6	3.4221138	3.4221186	3.4221188
0.7	3.7137472	3.7137524	3.7137527
0.8	4.0255349	4.0255407	4.0255409
0.9	4.3595964	4.3596027	4.3596031
1.0	4.7182745	4.7182815	4.7182818

$$py'_5 = (py_5) + 1 = (0.5462019)^2 + 1 = 1.2983365$$

$$y_5 = y_3 + \frac{h}{3}(py'_5 + 4y'_4 + y'_3)$$

$$= 0.3093360 + \frac{0.1}{3}[1.2983365 + 4(1.1786945) + 1.0956888]$$

$$= 0.5463042$$

$n = 5$: $\quad x_5 = 0.5, \quad y'_5 = (y_5)^2 + 1 = (0.5463042)^2 + 1 = 1.2984483$

$$py_6 = y_2 + \frac{4h}{3}(2y'_5 - y'_4 + 2y'_3)$$

$$= 0.2027099 + \frac{4(0.1)}{3}[2(1.2984483) - 1.1787553 + 2(1.0956888)]$$

$$= 0.6839791$$

$$py'_6 = (py_6)^2 + 1 = (0.6839791)^2 + 1 = 1.4678274$$

$$y_6 = y_4 + \frac{h}{3}(py'_6 + 4y'_5 + y'_4)$$

$$= 0.4227946 + \frac{0.1}{3}[1.4678274 + 4(1.2984483) + 1.1787553]$$

$$= 0.6841405$$

Continuando de esta manera generamos la tabla 19-9.

Tabla 19-9

Método: MÉTODO DE MILNE			
Problema: $y' = y^2 + 1;\ y(0) = 0$			
x_n	$h = 0.1$		Solución verdadera $Y(x) = \tan x$
	py_n	y_n	
0.0	—	0.0000000	0.0000000
0.1	—	0.1003346	0.1003347
0.2	—	0.2027099	0.2027100
0.3	—	0.3093360	0.3093363
0.4	0.4227227	0.4227946	0.4227932
0.5	0.5462019	0.5463042	0.5463025
0.6	0.6839791	0.6841405	0.6841368
0.7	0.8420238	0.8422924	0.8422884
0.8	1.0291628	1.0296421	1.0296386
0.9	1.2592330	1.2601516	1.2601582
1.0	1.5554357	1.5574578	1.5574077

19.12. Utilice el método de Milne para resolver $y' = y$; $y(0) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$ con $h = 0.1$.

Aquí $f(x, y) = y$, $x_0 = 0$ y $y_0 = 1$. De la tabla 19-4 encontramos que los tres valores iniciales adicionales son $y_1 = 1.1051708$, $y_2 = 1.2214026$ y $y_3 = 1.3498585$. Obsérvese que $y_1' = y_1$, $y_2' = y_2$ y $y_3' = y_3$. Entonces, usando los valores de las ecuaciones *(19.7)* y *(19.3)* calculamos

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n = 3}: \quad py_4 &= y_0 + \frac{4h}{3}(2y_3' - y_2' + 2y_1') \\
&= 1 + \frac{4(0.1)}{3}[2(1.3498585) - 1.2214026 + 2(1.1051708)] \\
&= 1.4918208 \\
py_4' &= py_4 = 1.4918208 \\
y_4 &= y_2 + \frac{h}{3}(py_4' + 4y_3' + y_2') \\
&= 1.2214026 + \frac{0.1}{3}[1.4918208 + 4(1.3498585) + 1.2214026] \\
&= 1.4918245
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{n = 4}: \quad x_4 = 0.4, \quad y_4' = y_4 = 1.4918245$$

$$
\begin{aligned}
py_5 &= y_1 + \frac{4h}{3}(2y_4' - y_3' + 2y_2') \\
&= 1.1051708 + \frac{4(0.1)}{3}[2(1.4918245) - 1.3498585 + 2(1.2214026)] \\
&= 1.6487169
\end{aligned}
$$

$$py_5' = py_5 = 1.6487169$$

$$y_5 = y_3 + \frac{h}{3}(py_5' + 4y_4' + y_3')$$

$$= 1.3498585 + \frac{0.1}{3}[1.6487169 + 4(1.4918245) + 1.3498585]$$

$$= 1.6487209$$

n = 5: $x_5 = 0.5, \quad y_5' = y_5 = 1.6487209$

$$py_6 = y_2 + \frac{4h}{3}(2y_5' - y_4' + 2y_3')$$

$$= 1.2214026 + \frac{4(0.1)}{3}[2(1.6487209) - 1.4918245 + 2(1.3498585)]$$

$$= 1.8221138$$

$$py_6' = py_6 = 1.8221138$$

$$y_6 = y_4 + \frac{h}{3}(py_6' + 4y_5' + y_4')$$

$$= 1.4918245 + \frac{0.1}{3}[1.8221138 + 4(1.6487209) + 1.4918245]$$

$$= 1.8221186$$

Continuando de esta manera generamos la tabla 19-10.

Tabla 19-10

Método: MÉTODO DE MILNE			
Problema: $y' = y;\ y(0) = 1$			
x_n	$h = 0.1$		Solución verdadera $Y(x) = e^x$
	py_n	y_n	
0.0	—	1.0000000	1.0000000
0.1	—	1.1051708	1.1051709
0.2	—	1.2214026	1.2214028
0.3	—	1.3498585	1.3498588
0.4	1.4918208	1.4918245	1.4918247
0.5	1.6487169	1.6487209	1.6487213
0.6	1.8221138	1.8221186	1.8221188
0.7	2.0137472	2.0137524	2.0137527
0.8	2.2255349	2.2255407	2.2255409
0.9	2.4595964	2.4596027	2.4596031
1.0	2.7182745	2.7182815	2.7182818

PROBLEMAS ADICIONALES

Lleve todos los cálculos hasta tres cifras decimales.

19.13. Utilice el método modificado de Euler para resolver $y' = -y + x + 2$; $y(0) = 2$ en el intervalo $[0, 1]$ con $h = 0.1$.

19.14. Utilice el método modificado de Euler para resolver $y' = -y$; $y(0) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$ con $h = 0.1$.

19.15. Utilice el método modificado de Euler para resolver $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$; $y(1) = 3$ en el intervalo $[1, 2]$ con $h = 0.2$.

19.16. Utilice el método modificado de Euler para resolver $y' = x$; $y(2) = 1$ en el intervalo $[2, 3]$ con $h = 0.25$.

19.17. Utilice el método modificado de Euler para resolver $y' = 4x^3$; $y(2) = 6$ en el intervalo $[2, 3]$ con $h = 0.2$.

19.18. Vuelva a hacer el problema 19.13 utilizando el método de Runge-Kutta.

19.19. Vuelva a hacer el problema 19.14 utilizando el método de Runge-Kutta.

19.20. Vuelva a hacer el problema 19.15 utilizando el método de Runge-Kutta.

19.21. Vuelva a hacer el problema 19.17 utilizando el método de Runge-Kutta.

19.22. Utilice el método de Runge-Kutta para resolver $y' = 5x^4$; $y(0) = 0$ en el intervalo $[0, 1]$ con $h = 0.1$.

19.23. Utilice el método de Adams-Bashforth-Moulton para resolver $y' = y$; $y(0) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$ con $h = 0.1$.

19.24. Vuelva a hacer el problema 19.13 utilizando el método de Adams-Bashforth-Moulton.

19.25. Vuelva a hacer el problema 19.14 utilizando el método de Adams-Bashforth-Moulton.

19.26. Vuelva a hacer el problema 19.15 utilizando el método de Adams-Bashforth-Moulton.

19.27. Vuelva a hacer el problema 19.13 utilizando el método de Milne.

19.28. Vuelva a hacer el problema 19.14 utilizando el método de Milne.

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN A TRAVÉS DE SISTEMAS

20

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

En el capítulo 17 mostramos cómo una ecuación diferencial de segundo (o mayor) orden se podía expresar como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

En este capítulo investigamos varias técnicas numéricas que tratan con tales sistemas.

En el siguiente sistema de problemas de valor inicial, y y z son funciones de x:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y, z) \\ z' &= g(x, y, z); \\ y(x_0) &= y_0, \; z(x_0) = z_0 \end{aligned} \tag{20.1}$$

Observamos que, con $y' = f(x, y, z) \equiv z$, el sistema *(20.1)* representa el problema de valor inicial de segundo orden

$$y'' = g(x, y, y'); \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = z_0$$

La forma estándar para un sistema de tres ecuaciones es

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y, z, w) \\ z' &= g(x, y, z, w) \\ w' &= r(x, y, z, w); \\ y(x_0) &= y_0, \; z(x_0) = z_0, \; w(x_0) = w_0 \end{aligned} \tag{20.2}$$

Si, en tal sistema, $f(x, y, z, w) = z$ y $g(x, y, z, w) = w$, entonces el sistema *(20.2)* representa el problema de valor inicial de tercer orden

$$y''' = r(x, y, z, w); \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = z_0, \quad y''(x_0) = w_0$$

Las fórmulas que siguen son para sistemas de dos ecuaciones en la forma estándar *(20.1)*. Las generalizaciones para sistemas de tres ecuaciones en la forma estándar *(20.2)* o bien para sistemas con cuatro o más ecuaciones son directas.

MÉTODO DE EULER

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hy'_n \\ z_{n+1} &= z_n + hz'_n \end{aligned} \tag{20.3}$$

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \end{aligned} \tag{20.4}$$

donde
$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n, z_n) \\
l_1 &= hg(x_n, y_n, z_n) \\
k_2 &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1, z_n + \tfrac{1}{2}l_1) \\
l_2 &= hg(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1, z_n + \tfrac{1}{2}l_1) \\
k_3 &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_2, z_n + \tfrac{1}{2}l_2) \\
l_3 &= hg(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_2, z_n + \tfrac{1}{2}l_2) \\
k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3) \\
l_4 &= hg(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3)
\end{aligned}$$

MÉTODO DE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON

predictores:
$$\begin{aligned} py_{n+1} &= y_n + \frac{h}{24}(55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}) \\ pz_{n+1} &= z_n + \frac{h}{24}(55z'_n - 59z'_{n-1} + 37z'_{n-2} - 9z'_{n-3}) \end{aligned}$$

correctores:
$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{24}(9py'_{n+1} + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}) \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{h}{24}(9pz'_{n+1} + 19z'_n - 5z'_{n-1} + z'_{n-2}) \end{aligned} \tag{20.5}$$

Las derivadas correspondientes se calculan a partir del sistema *(20.1)*. En particular,

$$\begin{aligned} y'_{n+1} &= f(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) \\ z'_{n+1} &= g(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) \end{aligned} \tag{20.6}$$

Las derivadas asociadas con los valores predichos se obtienen en forma similar, reemplazando y y z en la ecuación *(20.6)* con py y pz, respectivamente. Tal como en el capítulo 19, se requieren cuatro conjuntos de valores iniciales para el método de Adams-Bashforth-Moulton. El primer conjunto proviene directamente de las condiciones iniciales; los otros tres conjuntos se obtienen del método de Runge-Kutta.

PROBLEMAS RESUELTOS

20.1. Reduzca el problema de valor inicial $y'' - y = x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ al sistema (*20.1*).

Definiendo $z = y'$, tenemos $z(0) = y'(0) = 1$ y $z' = y''$. La ecuación diferencial dada se puede volver a escribir como $y'' = y + x$, o bien $z' = y + x$. De este modo, obtenemos el sistema de primer orden

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= y + x; \\ y(0) &= 0, \; z(0) = 1 \end{aligned}$$

20.2. Reduzca el problema de valor inicial $y'' - 3y' + 2y = 0$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$ al sistema (*20.1*).

Definiendo $z = y'$, tenemos $z(0) = y'(0) = 0$ y $z' = y''$. La ecuación diferencial dada se puede volver a escribir como $y'' = 3y' - 2y$, o bien $z' = 3z - 2y$. De este modo, obtenemos el sistema de primer orden

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= 3z - 2y; \\ y(0) &= -1; \; z(0) = 0 \end{aligned}$$

20.3. Reduzca el problema de valor inicial $3x^2y'' - xy' + y = 0$; $y(1) = 4$, $y'(1) = 2$ al sistema (*20.1*).

Definiendo $z = y'$ tenemos $z(1) = y'(1) = 2$ y $z' = y''$. La ecuación diferencial dada se puede volver a escribir como

$$y'' = \frac{xy' - y}{3x^2}$$

o bien

$$z' = \frac{xz - y}{3x^2}$$

De este modo, obtenemos el sistema de primer orden

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= \frac{xz - y}{3x^2} \\ y(1) &= 4, \; z(1) = 2 \end{aligned}$$

20.4. Reduzca el problema de valor inicial $y''' - 2xy'' + 4y' - x^2y = 1$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$ al sistema (*20.2*).

Siguiendo los pasos del 1 al 3, del capítulo 17, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= x^2y_1 - 4y_2 + 2xy_3 + 1; \\ y_1(0) &= 1, \; y_2(0) = 2, \; y_3(0) = 3 \end{aligned}$$

Para eliminar los subíndices, definimos $y = y_1$, $z = y_2$ y $w = y_3$. El sistema se convierte entonces en

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= w \\ w' &= x^2y - 4z + 2xw + 1; \\ y(0) &= 1, \; z(0) = 2, \; w(0) = 3 \end{aligned}$$

20.5. Utilice el método de Euler para resolver $y'' - y = x;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$ con $h = 0.1$.

Usando los resultados del problema 20.1 tenemos $f(x, y, z) = z$, $g(x, y, z) = y + x$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ y $z_0 = 1$. Luego, usando *(20.3)*, calculamos

$n = 0$:

$$y_0' = f(x_0, y_0, z_0) = z_0 = 1$$
$$z_0' = g(x_0, y_0, z_0) = y_0 + x_0 = 0 + 0 = 0$$
$$y_1 = y_0 + hy_0' = 0 + (0.1)(1) = 0.1$$
$$z_1 = z_0 + hz_0' = 1 + (0.1)(1) = 1$$

$n' = 1$:

$$y_1' = f(x_1, y_1, z_1) = z_1 = 1$$
$$z_1' = g(x_1, y_1, z_1) = y_1 + x_1 = 0.1 + 0.1 = 0.2$$
$$y_2 = y_1 + hy_1' = 0.1 + (0.1)(1) = 0.2$$
$$z_2 = z_1 + hz_1' = 1 + (0.1)(0.2) = 1.02$$

$n = 2$:

$$y_2' = f(x_2, y_2, z_2) = z_2 = 1.02$$
$$z_2' = g(x_2, y_2, z_2) = y_2 + x_2 = 0.2 + 0.2 = 0.4$$
$$y_3 = y_2 + hy_2' = 0.2 + (0.1)(1.02) = 0.302$$
$$z_3 = z_2 + hz_2' = 1.02 + (0.1)(0.4) = 1.06$$

Continuando de esta manera generamos la tabla 20–1.

Tabla 20-1

Método: MÉTODO DE EULER			
Problema: $y'' - y = x;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$			
x_n	$h = 0.1$		Solución verdadera $Y(x) = e^x - e^{-x} - x$
	y_n	z_n	
0.0	0.0000	1.0000	0.0000
0.1	0.1000	1.0000	0.1003
0.2	0.2000	1.0200	0.2027
0.3	0.3020	1.0600	0.3090
0.4	0.4080	1.1202	0.4215
0.5	0.5200	1.2010	0.5422
0.6	0.6401	1.3030	0.6733
0.7	0.7704	1.4270	0.8172
0.8	0.9131	1.5741	0.9762
0.9	1.0705	1.7454	1.1530
1.0	1.2451	1.9424	1.3504

20.6. Utilice el método de Euler para resolver $y'' - 3y' + 2y = 0;\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0$ en el intervalo $[0, 1]$ con $h = 0.1$.

Usando los resultados del problema 20.2 tenemos $f(x, y, z) = z$, $g(x, y, z) = 3z - 2y$, $zx_0 = 0$, $y_0 = -1$ y $z_0 = 0$.

Entonces, usando (*20.3*), calculamos

$n=0$: $y_0' = f(x_0, y_0, z_0) = z_0 = 0$
$z_0' = g(x_0, y_0, z_0) = 3z_0 - 2y_0 = 3(0) - 2(-1) = 2$
$y_1 = y_0 + hy_0' = -1 + (0.1)(0) = -1$
$z_1 = z_0 + hz_0' = 0 + (0.1)(2) = 0.2$

$n=1$: $y_1' = f(x_1, y_1, z_1) = z_1 = 0.2$
$z_1' = g(x_1, y_1, z_1) = 3z_1 - 2y_1 = 3(0.2) - 2(-1) = 2.6$
$y_2 = y_1 + hy_1' = -1 + (0.1)(0.2) = -0.98$
$z_2 = z_1 + hz_1' = 0.2 + (0.1)(2.6) = 0.46$

Continuando de esta manera generamos la tabla 20–2.

Tabla 20-2

Método: MÉTODO DE EULER			
Problema: $y'' - 3y' + 2y = 0$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$			
x_n	$h = 0.1$		Solución verdadera $Y(x) = e^{2x} - 2e^x$
	y_n	z_n	
0.0	−1.0000	0.0000	−1.0000
0.1	−1.0000	0.2000	−0.9889
0.2	−0.9800	0.4600	−0.9510
0.3	−0.9340	0.7940	−0.8776
0.4	−0.8546	1.2190	−0.7581
0.5	−0.7327	1.7556	−0.5792
0.6	−0.5571	2.4288	−0.3241
0.7	−0.3143	3.2689	0.0277
0.8	0.0216	4.3125	0.5020
0.9	0.4439	5.6037	1.1304
1.0	1.0043	7.1960	1.9525

20.7. Utilice el método de Runge-Kutta para resolver $y'' - y = x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ en el intervalo [0, 1] con $h = 0.1$.

Usando los resultados del problema 20.1, tenemos $f(x, y, z) = z$, $g(x, y, z) = y + x$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ y $z_0 = 1$. Entonces, utilizando (*20.4*) y redondeando los cálculos a tres cifras decimales, calculamos:

$n=0$: $k_1 = hf(x_0, y_0, z_0) = hf(0, 0, 1) = (0.1)(1) = 0.1$
$l_1 = hg(x_0, y_0, z_0) = hg(0, 0, 1) = (0.1)(0 + 0) = 0$
$k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1, z_0 + \frac{1}{2}l_1)$
$= hf\left[0 + \frac{1}{2}(0.1), 0 + \frac{1}{2}(0.1), 1 + \frac{1}{2}(0)\right]$
$= hf(0.05, 0.05, 1) = (0.1)(1) = 0.1$

$$l_2 = hg(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_1, z_0 + \tfrac{1}{2}l_1)$$
$$= hg(0.05, 0.05, 1) = (0.1)(0.05 + 0.05) = 0.01$$
$$k_3 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_2, z_0 + \tfrac{1}{2}l_2)$$
$$= hf\left[0 + \tfrac{1}{2}(0.1), 0 + \tfrac{1}{2}(0.1), 1 + \tfrac{1}{2}(0.01)\right]$$
$$= hf(0.05, 0.05, 1.005) = (0.1)(1.005) = 0.101$$
$$l_3 = hg(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_2, z_0 + \tfrac{1}{2}l_2)$$
$$= hg(0.05, 0.05, 1.005) = (0.1)(0.05 + 0.05) = 0.01$$
$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3)$$
$$= hf(0 + 0.1, 0 + 0.101, 1 + 0.01)$$
$$= hf(0.1, 0.101, 1.01) = (0.1)(1.01) = 0.101$$
$$l_4 = hg(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3)$$
$$= hg(0.1, 0.101, 1.01) = (0.1)(0.101 + 0.1) = 0.02$$
$$y_1 = y_0 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 0 + \tfrac{1}{6}\left[0.1 + 2(0.1) + 2(0.101) + (0.101)\right] = 0.101$$
$$z_1 = z_0 + \tfrac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$
$$= 1 + \tfrac{1}{6}\left[0 + 2(0.01) + 2(0.01) + (0.02)\right] = 1.01$$

$n = 1$:

$$k_1 = hf(x_1, y_1, z_1) = hf(0.1, 0.101, 1.01)$$
$$= (0.1)(1.01) = 0.101$$
$$l_1 = hg(x_1, y_1, z_1) = hg(0.1, 0.101, 1.01)$$
$$= (0.1)(0.101 + 0.1) = 0.02$$
$$k_2 = hf(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_1, z_1 + \tfrac{1}{2}l_1)$$
$$= hf\left[0.1 + \tfrac{1}{2}(0.1), 0.101 + \tfrac{1}{2}(0.101), 1.01 + \tfrac{1}{2}(0.02)\right]$$
$$= hf(0.15, 0.152, 1.02) = (0.1)(1.02) = 0.102$$
$$l_2 = hg(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_1, z_1 + \tfrac{1}{2}l_1)$$
$$= hg(0.15, 0.152, 1.02) = (0.1)(0.152 + 0.15) = 0.03$$
$$k_3 = hf(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_2, z_1 + \tfrac{1}{2}l_2)$$
$$= hf\left[0.1 + \tfrac{1}{2}(0.1), 0.101 + \tfrac{1}{2}(0.102), 1.01 + \tfrac{1}{2}(0.03)\right]$$
$$= hf(0.15, 0.152, 1.025) = (0.1)(1.025) = 0.103$$
$$l_3 = hg(x_1 + \tfrac{1}{2}h, y_1 + \tfrac{1}{2}k_2, z_1 + \tfrac{1}{2}l_2)$$
$$= hg(0.15, 0.152, 1.025) = (0.1)(0.152 + 0.15) = 0.03$$
$$k_4 = hf(x_1 + h, y_1 + k_3, z_1 + l_3)$$
$$= hf(0.1 + 0.1, 0.101 + 0.103, 1.01 + 0.03)$$
$$= hf(0.2, 0.204, 1.04) = (0.1)(1.04) = 0.104$$
$$l_4 = hg(x_1 + h, y_1 + k_3, z_1 + l_3)$$
$$= hg(0.2, 0.204, 1.04) = (0.1)(0.204 + 0.2) = 0.04$$
$$y_2 = y_1 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 0.101 + \tfrac{1}{6}\left[0.101 + 2(0.102) + 2(0.103) + (0.104)\right]$$
$$= 0.204$$
$$z_2 = z_1 + \tfrac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$
$$= 1.01 + \tfrac{1}{6}\left[0.02 + 2(0.03) + 2(0.03) + (0.04)\right] = 1.04$$

Continuando de esta manera, pero redondeando hasta siete cifras decimales, generamos la tabla 20-3.

Tabla 20-3

Método: MÉTODO DE RUNGE-KUTTA			
Problema: $y'' - y = x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$			
x_n	$h = 0.1$		Solución verdadera $Y(x) = e^x - e^{-x} - x$
	y_n	z_n	
0.0	0.0000000	1.0000000	0.0000000
0.1	0.1003333	1.0100083	0.1003335
0.2	0.2026717	1.0401335	0.2026720
0.3	0.3090401	1.0906769	0.3090406
0.4	0.4215040	1.1621445	0.4215047
0.5	0.5421897	1.2552516	0.5421906
0.6	0.6733060	1.3709300	0.6733072
0.7	0.8171660	1.5103373	0.8171674
0.8	0.9762103	1.6748689	0.9762120
0.9	1.1530314	1.8661714	1.1530335
1.0	1.3504000	2.0861595	1.3504024

20.8. Utilice el método de Runge-Kutta para resolver $y'' - 3y + 2y = 0$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$ en el intervalo $[0, 1]$ con $h = 0.1$.

Usando los resultados del problema 20.2, tenemos $f(x, y, z) = z$, $g(x, y, z) = 3z - 2y$, $x_0 = 0$, $y_0 = -1$ y $z_0 = 0$. Entonces, usando (*20.4*), calculamos:

$n = 0$:

$$k_1 = hf(x_0, y_0, z_0) = hf(0, -1, 0) = (0.1)(0) = 0$$

$$l_1 = hg(x_0, y_0, z_0) = hg(0, -1, 0) = (0.1)[3(0) - 2(-1)] = 0.2$$

$$\begin{aligned} k_2 &= hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}k_1,\ z_0 + \tfrac{1}{2}l_1) \\ &= hf[0 + \tfrac{1}{2}(0.1),\ -1 + \tfrac{1}{2}(0),\ 0 + \tfrac{1}{2}(0.2)] \\ &= hf(0.05, -1, 0.1) = (0.1)(0.1) = 0.01 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_2 &= hg(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_1, z_0 + \tfrac{1}{2}l_1) \\ &= hg(0.05, -1, 0.1) = (0.1)[3(0.1) - 2(-1)] = 0.23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}k_2,\ z_0 + \tfrac{1}{2}l_2) \\ &= hf[0 + \tfrac{1}{2}(0.1),\ -1 + \tfrac{1}{2}(0.01),\ 0 + \tfrac{1}{2}(0.23)] \\ &= hf(0.05, -0.995, 0.115) = (0.1)(0.115) = 0.012 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_3 &= hg(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_2, z_0 + \tfrac{1}{2}l_2) \\ &= hg(0.05, -0.995, 0.115) = (0.1)[3(0.115) - 2(-0.995)] \\ &= 0.234 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3) \\
&= hf(0 + 0.1, -1 + 0.012, 0 + 0.234) \\
&= hf(0.1, -0.988, 0.234) = (0.1)(0.234) = 0.023 \\
l_4 &= hg(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + l_3) \\
&= hg(0.1, -0.988, 0.234) = (0.1)[3(0.234) - 2(-0.988)] \\
&= 0.268 \\
y_1 &= y_0 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= -1 + \tfrac{1}{6}[0 + 2(0.01) + 2(0.012) + (0.023)] = -0.989 \\
z_1 &= z_0 + \tfrac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\
&= 0 + \tfrac{1}{6}[0.2 + 2(0.23) + 2(0.234) + (0.268)] = 0.233
\end{aligned}
$$

Continuando de esta manera, pero redondeando hasta siete cifras decimales, generamos la tabla 20-4.

Tabla 20-4

Método: MÉTODO DE RUNGE-KUTTA			
Problema: $y'' - 3y' + 2y = 0;\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0$			
x_n	$h = 0.1$		Solución verdadera $Y(x) = e^{2x} - 2e^{x}$
	y_n	z_n	
0.0	−1.0000000	0.0000000	−1.0000000
0.1	−0.9889417	0.2324583	−0.9889391
0.2	−0.9509872	0.5408308	−0.9509808
0.3	−0.8776105	0.9444959	−0.8775988
0.4	−0.7581277	1.4673932	−0.7581085
0.5	−0.5791901	2.1390610	−0.5791607
0.6	−0.3241640	2.9959080	−0.3241207
0.7	−0.0276326	4.0827685	−0.0276946
0.8	0.5018638	5.4548068	0.5019506
0.9	1.1303217	7.1798462	1.1304412
1.0	1.9523298	9.3412190	1.9524924

20.9. Utilice el método de Runge-Kutta para resolver $3x^2y'' - xy' + y = 0;\ y(1) = 4,\ y'(1) = 2$ en el intervalo $[1, 2]$ con $h = 0.2$.

Del problema 20.3 tenemos $f(x, y, z) = z$, $g(x, y, z) = (xz - y)/(3x^2)$, $x_0 = 1$, $y_0 = 4$ y $z_0 = 2$. Usando *(20.4)* calculamos:

$n = 0$: $\quad k_1 = hf(x_0, y_0, z_0) = hf(1, 4, 2) = 0.2(2) = 0.4$

$$l_1 = hg(x_0, y_0, z_0) = hg(1, 4, 2) = 0.2\left[\frac{1(2) - 4}{3(1)^2}\right] = -0.1333333$$

$$k_2 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}k_1,\ z_0 + \tfrac{1}{2}l_1)$$
$$= hf(1.1,\ 4.2,\ 1.9333333) = 0.2(1.9333333) = 0.3866666$$
$$l_2 = hg(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}k_1,\ z_0 + \tfrac{1}{2}l_1) = hg(1.1,\ 4.2,\ 1.9333333)$$
$$= 0.2\left[\frac{1.1(1.9333333) - 4.2}{3(1.1)^2}\right] = -0.1142332$$
$$k_3 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}k_2,\ z_0 + \tfrac{1}{2}l_2)$$
$$= hf(1.1,\ 4.1933333,\ 1.9428834) = 0.2(1.9428834) = 0.3885766$$
$$l_3 = hg(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_1 + \tfrac{1}{2}k_2,\ z_1 + \tfrac{1}{2}l_2) = hg(1.1,\ 4.1933333,\ 1.9428834)$$
$$= 0.2\left[\frac{1.1(1.9428834) - 4.1933333}{3(1.1)^2}\right] = -0.1132871$$
$$k_4 = hf(x_0 + h,\ y_0 + k_3,\ z_0 + l_3)$$
$$= hf(1.2,\ 4.3885766,\ 1.8867129) = 0.2(1.8867129) = 0.3773425$$
$$l_4 = hg(x_0 + h,\ y_0 + k_3,\ z_0 + l_3) = hg(1.2,\ 4.3885766,\ 1.8867129)$$
$$= 0.2\left[\frac{1.2(1.8867129) - 4.3885766}{3(1.2)^2}\right] = -0.0983574$$
$$y_1 = y_0 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$= 4 + \tfrac{1}{6}[0.4 + 2(0.3866666) + 2(0.3885766) + 0.3773425] = 4.3879715$$
$$z_1 = z_0 + \tfrac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$
$$= 2 + \tfrac{1}{6}[-0.1333333 + 2(-0.1142332) + 2(-0.1132871) + (-0.0983574)] = 1.8855447$$

Continuando de esta manera generamos la tabla 20-5.

Tabla 20-5

Método: MÉTODO DE RUNGE-KUTTA			
Problema: $3x^2y'' - xy' + y = 0;\ y(1) = 4,\ y'(1) = 2$			
x_n	$h = 0.2$		Solución verdadera $Y(x) = x + 3x^{1/3}$
	y_n	z_n	
1.0	4.0000000	2.0000000	4.0000000
1.2	4.3873715	1.8855447	4.3879757
1.4	4.7560600	1.7990579	4.7560668
1.6	5.1088123	1.7309980	5.1088213
1.8	5.4493105	1.6757935	5.4493212
2.0	5.7797507	1.6299535	5.7797632

20.10. Utilice el método de Adams-Bashforth-Moulton para resolver $3x^2y'' - xy' + y = 0;\ y(1) = 4,\ y'(1) = 2$ en el intervalo $[1, 2]$ con $h = 0.2$.

Del problema 20.3 tenemos $f(x, y, z) = z$, $g(x, y, z) = (xz - y)/(3x^2)$, $x_0 = 1$, $y_0 = 4$ y $z_0 = 2$. De la tabla 20-5,

tenemos

$$x_1 = 1.2 \qquad y_1 = 4.3879715 \qquad z_1 = 1.8855447$$
$$x_2 = 1.4 \qquad y_2 = 4.7560600 \qquad z_2 = 1.7990579$$
$$x_3 = 1.6 \qquad y_3 = 5.1088123 \qquad z_3 = 1.7309980$$

Usando *(20.6)* calculamos

$$y_0' = z_0 = 2 \qquad\qquad y_1' = z_1 = 1.8855447$$
$$y_2' = z_2 = 1.7990579 \qquad\qquad y_3' = z_3 = 1.7309980$$

$$z_0' = \frac{x_0 z_0 - y_0}{3x_0^2} = \frac{1(2)-4}{3(1)^2} = -0.6666667$$
$$z_1' = \frac{x_1 z_1 - y_1}{3x_1^2} = \frac{1.2(1.8855447)-4.3879715}{3(1.2)^2} = -0.4919717$$
$$z_2' = \frac{x_2 z_2 - y_2}{3x_2^2} = \frac{1.4(1.7990579)-4.7560600}{3(1.4)^2} = -0.3805066$$
$$z_3' = \frac{x_3 z_3 - y_3}{3x_3^2} = \frac{1.6(1.7309980)-5.1088123}{3(1.6)^2} = -0.3045854$$

Luego, usando *(20.5)*, calculamos

$n = 3$: $\quad x_4 = 1.8$

$$py_4 = y_3 + \frac{h}{24}(55y_3' - 59y_2' + 37y_1' - 9y_0')$$
$$= 5.1088123 + (0.2/24)[55(1.7309980) - 59(1.7990579) + 37(1.8855447) - 9(2)] = 5.4490260$$

$$pz_4 = z_3 + \frac{h}{24}(55z_3' - 59z_2' + 37z_1' - 9z_0')$$
$$= 1.7309980 + (0.2/24)[55(-0.3045854) - 59(-0.3805066) + 37(-0.4919717)$$
$$- 9(-0.6666667)] = 1.6767876$$

$$py_4' = pz_4 = 1.6767876$$

$$pz_4' = \frac{x_4 pz_4 - py_4}{3x_4^2} = \frac{1.8(1.6767876) - 5.4490260}{3(1.8^2)} = -0.2500832$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}(9py_4' + 19y_3' - 5y_2' + y_1')$$
$$= 5.1088123 + (0.2/24)[9(1.6767876) + 19(1.7309980) - 5(1.7990579) + 1.8855447]$$
$$= 5.4493982$$

$$z_4 = z_3 + \frac{h}{24}(9pz_4' + 19z_3' - 5z_2' + z_1')$$
$$= 1.7309980 + (0.2/24)[9(-0.2500832) + 19(-0.3045854) - 5(-0.3805066) + (-0.4919717)]$$
$$= 1.6757705$$

$$y_4' = z_4 = 1.6757705$$

$$z_4' = \frac{x_4 z_4 - y_4}{3x_4^2} = \frac{1.8(1.6757705) - 5.4493982}{3(1.8^2)} = -0.2503098$$

$n = 4$: $\quad x_5 = 2.0$

$$py_5 = y_4 + \frac{h}{24}(55y_4' - 59y_3' + 37y_2' - 9y_1')$$

$$= 5.4493982 + (0.2/24)[55(1.6757705) - 59(1.7309980) + 37(1.7990579) - 9(1.8855447)]$$

$$= 5.7796793$$

$$pz_5 = z_4 + \frac{h}{24}(55z_4' - 59z_3' + 37z_2' - 9z_1')$$

$$= 1.6757705 + (0.2/24)[55(-0.2503098) - 59(-0.3045854) + 37(-0.3805066) - 9(-0.4919717)]$$

$$= 1.6303746$$

$$py_5' = pz_5 = 1.6303746$$

$$pz_5' = \frac{x_5 pz_5 - py_5}{3x_5^2} = \frac{2.0(1.6303746) - 5.7796793}{3(2.0)^2} = -0.2099108$$

$$y_5 = y_4 + \frac{h}{24}(9py_5' + 19y_4' - 5y_3' + y_2')$$

$$= 5.4493982 + (0.2/24)[9(1.6303746) + 19(1.6757705) - 5(1.7309980) + 1.7990579]$$

$$= 5.7798739$$

$$z_5 = z_4 + \frac{h}{24}(9pz_5' + 19z_4' - 5z_3' + z_2')$$

$$= 1.6757705 + (0.2/24)[9(-0.2099108) + 19(-0.2503098) - 5(-0.3045854) + (-0.3805066)]$$

$$= 1.6299149$$

$$y_5' = z_5 = 1.6299149$$

$$z_5' = \frac{x_5 z_5 - y_5}{3x_5^2} = \frac{2.0(1.6299149) - 5.7798739}{3(2.0)^2} = -0.2100037$$

Véase la tabla 20-6.

Tabla 20-6

Método: MÉTODO DE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON					
Problema: $3x^2y'' - xy' + y = 0$; $y(1) = 4$, $y'(1) = 2$					
x_n	$h = 0.2$				Solución verdadera $Y(x) = x + 3x^{1/3}$
	py_n	pz_n	y_n	z_n	
1.0	—	—	4.0000000	2.0000000	4.0000000
1.2	—	—	4.3873715	1.8855447	4.3873757
1.4	—	—	4.7560600	1.7990579	4.7560668
1.6	—	—	5.1088123	1.7309980	5.1088213
1.8	5.4490260	1.6767876	5.4493982	1.6757705	5.4493212
2.0	5.7796793	1.6303746	5.7798739	1.6299149	5.7797632

20.11. Utilice el método de Adams-Bashforth-Moulton para resolver $y'' - y = x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$ con $h = 0.1$.

Del problema 20.1 tenemos $f(x, y, z) = z$ y $g(x, y, z) = y + x$ y de la tabla 20-3 que

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = 0 \qquad z_0 = 1$$
$$x_1 = 0.1 \qquad y_1 = 0.1003333 \qquad z_1 = 1.0100083$$
$$x_2 = 0.2 \qquad y_2 = 0.2026717 \qquad z_2 = 1.0401335$$
$$x_3 = 0.3 \qquad y_3 = 0.3090401 \qquad z_3 = 1.0906769$$

Usando (*20.6*) calculamos

$$y_0' = z_0 = 1 \quad y_1' = z_1 = 1.0100083$$
$$y_2' = z_2 = 1.0401335 \quad y_3' = z_3 = 1.0906769$$
$$z_0' = y_0 + x_0 = 0 + 0 = 0$$
$$z_1' = y_1 + x_1 = 0.1003333 + 0.1 = 0.2003333$$
$$z_2' = y_2 + x_2 = 0.2026717 + 0.2 = 0.4026717$$
$$z_3' = y_3 + x_3 = 0.3090401 + 0.3 = 0.6090401$$

Luego, utilizando (*20.5*), calculamos

$n = 3$: $x_4 = 0.4$

$$py_4 = y_3 + \frac{h}{24}(55y_3' - 59y_2' + 37y_1' - 9y_0')$$
$$= 0.3090401 + (0.1/24)[55(1.0906769) - 59(1.0401335) + 37(1.0100083) - 9(1)]$$
$$= 0.4214970$$

$$pz_4 = z_3 + \frac{h}{24}(55z_3' - 59z_2' + 37z_1' - 9z_0')$$
$$= 1.0906769 + (0.1/24)[55(0.6090401) - 59(0.4026717) + 37(0.2003333) - 9(0)]$$
$$= 1.1621432$$

$$py_4' = pz_4 = 1.1621432$$
$$pz_4' = py_4 + x_4 = 0.4214970 + 0.4 = 0.8214970$$

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}(9py_4' + 19y_3' - 5y_2' + y_1')$$
$$= 0.3090401 + (0.1/24)[9(1.1621432) + 19(1.0906769) - 5(1.0401335) + 1.0100083]$$
$$= 0.4215046$$

$$z_4 = z_3 + \frac{h}{24}(9pz_4' + 19z_3' - 5z_2' + z_1')$$
$$= 1.0906769 + (0.1/24)[9(0.8214970) + 19(0.6090401) - 5(0.4026717) + (0.2003333)]$$
$$= 1.1621445$$

$$y_4' = z_4 = 1.1621445$$
$$z_4' = y_4 + x_4 = 0.4215046 + 0.4 = 0.8215046$$

Continuando de esta manera generamos la tabla 20-7.

Tabla 20-7

Método: MÉTODO DE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON					
Problema: $y'' - y = x;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$					
x_n	$h = 0.1$				Solución verdadera $Y(x) = e^x - e^{-x} - x$
	py_n	pz_n	y_n	z_n	
0.0	—	—	0.0000000	1.0000000	0.0000000
0.1	—	—	0.1003333	1.0100083	0.1003335
0.2	—	—	0.2023717	1.0401335	0.2026720
0.3	—	—	0.3090401	1.0906769	0.3090406
0.4	0.4214970	1.1621432	0.4215046	1.1621445	0.4215047
0.5	0.5421832	1.2552496	0.5421910	1.2552516	0.5421906
0.6	0.6733000	1.3709273	0.6733080	1.3709301	0.6733072
0.7	0.8171604	1.5103342	0.8171687	1.5103378	0.8171674
0.8	0.9762050	1.6748654	0.9762138	1.6748699	0.9762120
0.9	1.1530265	1.8661677	1.1530358	1.8661731	1.1530335
1.0	1.3503954	2.0861557	1.3504053	2.0861620	1.3504024

20.12. Formule el método de Adams-Bashforth-Moulton para el sistema (*20.2*).

predictores:

$$py_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3})$$

$$pz_{n+1} = z_n + \frac{h}{24}(55z'_n - 59z'_{n-1} + 37z'_{n-2} - 9z'_{n-3})$$

$$pw_{n+1} = w_n + \frac{h}{24}(55w'_n - 59w'_{n-1} + 37w'_{n-2} - 9w'_{n-3})$$

correctores:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9py'_{n+1} + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2})$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{24}(9pz'_{n+1} + 19z'_n - 5z'_{n-1} + z'_{n-2})$$

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{24}(9pw'_{n+1} + 19w'_n - 5w'_{n-1} + w'_{n-2})$$

20.13. Formule el método de Milne para el sistema (*20.1*).

predictores:

$$py_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2})$$

$$pz_{n+1} = z_{n-3} + \frac{4h}{3}(2z'_n + z'_{n-1} + 2z'_{n-2})$$

correctores: $$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}(py'_{n+1} + 4y'_n + y'_{n-1})$$

$$z_{n+1} = z_{n-1} + \frac{h}{3}(pz'_{n+1} + 4z'_n + z'_{n-1})$$

20.14. Utilice el método de Milne para resolver $y'' - y = x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$ con $h = 0.1$.

Todos los valores de inicio y sus derivadas son idénticas a las dadas en el problema 20.11. Usando las fórmulas dadas en el problema 20.13, calculamos

$\boldsymbol{n = 3}$:
$$py_4 = y_0 + \frac{4h}{3}(2y'_3 - y'_2 + 2y'_1)$$
$$= 0 + \frac{4(0.1)}{3}[2(1.0906769) - 1.0401335 + 2(1.0100083)]$$
$$= 0.4214983$$

$$pz_4 = z_0 + \frac{4h}{3}(2z'_3 - z'_2 + 2z'_1)$$
$$= 1 + \frac{4(0.1)}{2}[2(0.6090401) - 0.4026717 + 2(0.2003333)]$$
$$= 1.1621433$$

$$py'_4 = pz_4 = 1.1621433$$

$$pz'_4 = py_4 + x_4 = 0.4214983 + 0.4 = 0.8214983$$

$$y_4 = y_2 + \frac{h}{3}(py'_4 + 4y'_3 + y'_2)$$
$$= 0.2026717 + \frac{0.1}{3}[1.1621433 + 4(1.0906767) + 1.0401335]$$
$$= 0.4215045$$

$$z_4 = z_2 + \frac{h}{3}(pz'_4 + 4z'_3 + z'_2)$$
$$= 1.0401335 + \frac{0.1}{3}[0.8214983 + 4(0.6090401) + 0.4026717]$$
$$= 1.1621445$$

$\boldsymbol{n = 4}$:
$$y'_4 = z_4 = 1.1621445$$
$$z'_4 = y_4 + x_4 = 0.4215045 + 0.4 = 0.8215045$$

$$py_5 = y_1 + \frac{4h}{3}(2y'_4 - y'_3 + 2y'_2)$$
$$= 0.1003333 + \frac{4(0.1)}{3}[2(1.1621445) - 1.0906769 + 2(1.0401335)]$$
$$= 0.5421838$$

$$pz_5 = z_1 + \frac{4h}{3}(2z'_4 - z'_3 + 2z'_2)$$
$$= 1.0100083 + \frac{4(0.1)}{3}[2(0.8215045) - 0.6090401 + 2(0.4026717)]$$
$$= 1.2552500$$

$$py'_5 = pz_5 = 1.2552500$$

$$pz'_5 = py_5 + x_5 = 0.5421838 + 0.5 = 1.0421838$$

$$y_5 = y_3 + \frac{h}{3}(py'_5 + 4y'_4 + y'_3)$$
$$= 0.3090401 + \frac{0.1}{3}[1.2552500 + 4(1.1621445) + 1.0906769]$$
$$= 0.5421903$$

$$z_5 = z_3 + \frac{h}{3}(pz'_5 + 4z'_4 + z'_3)$$
$$= 1.0906769 + \frac{0.1}{3}[1.0421838 + 4(0.8215045) + 0.6090401]$$
$$= 1.2552517$$

Continuando de esta manera generamos la tabla 20-8.

Tabla 20-8

Método: MÉTODO DE MILNE					
Problema: $y'' - y = x;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$					
x_n	$h = 0.1$				Solución verdadera $Y(x) = e^x - e^{-x} - x$
	py_n	pz_n	y_n	z_n	
0.0	—	—	0.0000000	1.0000000	0.0000000
0.1	—	—	0.1003333	1.0100083	0.1003335
0.2	—	—	0.2026717	1.0401335	0.2026720
0.3	—	—	0.3090401	1.0906769	0.3090406
0.4	0.4214983	1.1621433	0.4215045	1.1621445	0.4215047
0.5	0.5421838	1.2552500	0.5421903	1.2552517	0.5421906
0.6	0.6733000	1.3709276	0.6733071	1.3709300	0.6733072
0.7	0.8171597	1.5103347	0.8171671	1.5103376	0.8171674
0.8	0.9762043	1.6748655	0.9762120	1.6748693	0.9762120
0.9	1.1530250	1.8661678	1.1530332	1.8661723	1.1530335
1.0	1.3503938	2.0861552	1.3504024	2.0861606	1.3504024

PROBLEMAS ADICIONALES

20.15. Reduzca el problema de valor inicial $y'' + y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ al sistema *(20.1)*.

20.16. Reduzca el problema de valor inicial $y'' - y = x;\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1$ al sistema *(20.1)*.

20.17. Reduzca el problema de valor inicial $2yy'' - 4xy^2y' + 2(\text{sen}\, x)y^4 = 6;\ y(1) = 0,\ y'(1) = 15$ al sistema *(20.1)*.

20.18. Reduzca el problema de valor inicial $xy''' - x^2y'' + (y')^2y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3$ al sistema *(20.2)*.

20.19. Utilice el método de Euler con $h = 0.1$ para resolver el problema de valor inicial dado en el problema 20.15 en el intervalo [0, 1].

20.20. Utilice el método de Euler con $h = 0.1$ para resolver el problema de valor inicial dado en el problema 20.16 en el intervalo [0, 1].

20.21. Utilice el método de Runge-Kutta con $h = 0.1$ para resolver el problema de valor inicial dado en el problema 20.15 en el intervalo [0, 1].

20.22. Utilice el método de Runge-Kutta con $h = 0.1$ para resolver el problema de valor inicial dado en el problema 20.16 en el intervalo [0, 1].

20.23. Utilice el método de Adams-Bashforth-Moulton con $h = 0.1$ para resolver el problema de valor inicial dado en el problema 20.2 en el intervalo [0, 1]. Obtenga adecuados valores iniciales de la tabla 20-4.

20.24. Utilice el método de Adams-Bashforth-Moulton con $h = 0.1$ para resolver el problema de valor inicial dado en el problema 20.15 en el intervalo [0, 1].

20.25 Utilice el método de Adams-Bashforth-Moulton con $h = 0.1$ para resolver el problema de valor inicial dado en el problema 20.16 en el intervalo [0, 1].

20.26. Utilice el método de Milne con $h = 0.1$ para resolver el problema de valor inicial dado en el problema 20.2 en el intervalo [0, 1]. Obtenga adecuados valores iniciales de la tabla 20-4.

20.27. Utilice el método de Milne con $h = 0.1$ para resolver el problema de valor inicial dado en el problema 20.15 en el intervalo [0, 1].

20.28. Formule el método modificado de Euler para el sistema *(20.1)*.

20.29. Formule el método de Runge-Kutta para el sistema *(20.2)*.

20.30. Formule el método de Milne para el sistema *(20.2)*.

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

21

DEFINICIÓN

Establezcamos $f(x)$ para $0 \leq x < \infty$ y s denotando una variable real arbitraria. La *transformada de Laplace de f(x)*, designada o bien por $\mathcal{L}\{f(x)\}$ o bien $F(s)$, es

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx \tag{21.1}$$

para todos los valores de s para los cuales la integral impropia converja. La convergencia ocurre cuando el límite

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-sx} f(x)\,dx \tag{21.2}$$

existe. Si este límite no existe, la integral impropia diverge y $f(x)$ no tiene transformada de Laplace. Cuando se evalúa la integral en la ecuación (*21.1*), la variable s se trata como una constante porque la integración es con respecto a x.

Las transformadas de Laplace para un número de funciones elementales se calculan en los problemas del 21.4 al 21.8; y en el apéndice A se dan transformadas adicionales.

PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Propiedad 21.1 ***(Linealidad.)*** Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ y $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(s)$, entonces para cualquiera de las dos constantes c_1 y c_2

$$\mathcal{L}\{c_1 f(x) + c_2 g(x)\} = c_1\mathcal{L}\{f(x)\} + c_2\mathcal{L}\{g(x)\} = c_1F(s) + c_2G(s) \tag{21.3}$$

Propiedad 21.2. Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$, entonces para cualquier constante a

$$\mathcal{L}\left\{e^{ax} f(x)\right\} = F(s-a) \tag{21.4}$$

Propiedad 21.3. Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$, entonces para cualquier número entero positivo n

$$\mathcal{L}\left\{x^n f(x)\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}[F(s)] \tag{21.5}$$

Propiedad 21.4. Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ y si $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f(x)}{x}$ existe, entonces

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{x}f(x)\right\} = \int_s^{\infty} F(t)\,dt \tag{21.6}$$

Propiedad 21.5. Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\} = \frac{1}{s}F(s) \tag{21.7}$$

Propiedad 21.6. Si $f(x)$ es periódica con periodo ω, es decir, $f(x+\omega) = f(x)$, entonces

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{\int_0^{\omega} e^{-sx} f(x)\,dx}{1 - e^{-\omega s}} \tag{21.8}$$

FUNCIONES DE OTRAS VARIABLES INDEPENDIENTES

Para consistencia solamente, la definición de la transformada de Laplace y sus propiedades, las ecuaciones (*21.1*) y (*21.8*) se presentan para funciones de x. Ellas son igualmente aplicables para funciones de cualquier variable independiente y se generan reemplazando la variable x en las ecuaciones anteriores por cualquier variable de interés. En particular, la contraparte de la ecuación (*21.1*) para la transformada de Laplace de una función t es

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

PROBLEMAS RESUELTOS

21.1. Determine si la integral impropia $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge.

Dado que

$$\lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_2^R = \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

la integral impropia converge al valor de $\frac{1}{2}$.

21.2. Determine si la integral impropia $\int_9^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ converge.

Dado que

$$\lim_{R\to\infty} \int_9^R \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \ln|x|\Big|_9^R = \lim_{R\to\infty} (\ln R - \ln 9) = \infty$$

la integral impropia diverge.

21.3. Determine aquellos valores de s para los cuales la integral $\int_0^{\infty} e^{-sx}\,dx$ converge.

Para $s = 0$,

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-(0)(x)}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R (1)\,dx = \lim_{R\to\infty} x\Big|_0^R = \lim_{R\to\infty} R = \infty$$

de aquí que la integral diverge. Para $s \neq 0$,

$$\int_0^\infty e^{-sx}dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^\infty e^{-sx}dx = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\right]_{x=0}^{x=R}$$
$$= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{-1}{s}e^{-sR} + \frac{1}{s}\right)$$

cuando $s < 0$, $-sR > 0$; de aquí el límite es ∞ y la integral diverge. Cuando $s > 0$, $-sR < 0$; de aquí, el límite es $1/s$ y la integral converge.

21.4. Encuentre la transformada de Laplace de $f(x) = 1$.

Usando la ecuación (*21.1*) y los resultados del problema 21.3, tenemos

$$F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-sx}(1)dx = \frac{1}{s} \quad (\text{para } s > 0)$$

(Véase también la entrada 1 en el apéndice A.)

21.5. Encuentre la transformada de Laplace de $f(x) = x^2$.

Usando la ecuación (*21.1*) y dos veces la integración por partes, encontramos

$$F(s) = \mathcal{L}\{x^2\} = \int_0^\infty e^{-sx}x^2dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R x^2e^{-sx}dx$$
$$= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{x^2}{s}e^{-sx} - \frac{2x}{s^2}e^{-sx} - \frac{2}{s^3}e^{-sx}\right]_{x=0}^{x=R}$$
$$= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{R^2}{s}e^{-sR} - \frac{2R}{s^2}e^{-sR} - \frac{2}{s^3}e^{-sR} + \frac{2}{s^3}\right)$$

Para $s < 0$, $\lim_{R\to\infty}\left[-(R^2/s)e^{-sR}\right] = \infty$, y la integral impropia diverge. Para $s > 0$, del repetido uso de la regla de L'Hôpital, tenemos que

$$\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{R^2}{s}e^{-sR}\right) = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{-R^2}{se^{sR}}\right) = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{-2R}{s^2e^{sR}}\right)$$
$$= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{-2}{s^3e^{sR}}\right) = 0$$
$$\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{2R}{s}e^{-sR}\right) = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{-2R}{se^{sR}}\right) = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{-2}{s^2e^{sR}}\right) = 0$$

También, $\lim_{R\to\infty}\left[-(2/s^3)e^{-sR}\right] = 0$ directamente; por esto, la integral converge, y $F(s) = 2/s^3$. Para los casos especiales de $s = 0$, tenemos

$$\int_0^\infty e^{-sx}x^2dx = \int_0^\infty e^{-s(0)}x^2dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R x^2dx = \lim_{R\to\infty}\frac{R^3}{3} = \infty$$

Finalmente, combinando todos los casos, obtenemos $\mathcal{L}\{x^2\} = 2/s^3$, $s > 0$. (Véase también la entrada 3 del apéndice A.)

21.6. Encuentre $\mathcal{L}\{e^{ax}\}$.

Usando la ecuación (*21.1*) obtenemos

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{ax}\} = \int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{(a-s)x}dx$$
$$= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{(a-s)x}}{a-s}\right]_{x=0}^{x=R} = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{(a-s)R}-1}{a-s}\right]$$
$$= \frac{1}{s-a} \quad (\text{para } s > a)$$

Obsérvese que cuando $s \leq a$, la integral impropia diverge. (Véase también la entrada 7 del apéndice A.)

21.7. Encuentre $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} ax\}$.

Usando la ecuación (*21.1*) y dos veces la integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\operatorname{sen} ax\} &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \operatorname{sen} ax\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} e^{-sx} \operatorname{sen} ax\,dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{-se^{-sx} \operatorname{sen} ax}{s^2+a^2} - \frac{ae^{-sx} \cos ax}{s^2+a^2} \right]_{x=0}^{x=R} \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{-se^{-sR} \operatorname{sen} aR}{s^2+a^2} - \frac{ae^{-sR} \cos aR}{s^2+a^2} + \frac{a}{s^2+a^2} \right] \\
&= \frac{a}{x^2+a^2} \quad (\text{para } s>0)
\end{aligned}$$

(Véase también la entrada 8 del apéndice A.)

21.8. Encuentre la transformada de Laplace de $f(x) = \begin{cases} e^x & x \le 2 \\ 3 & x > 2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(x)\} &= \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\,dx = \int_0^{2} e^{-sx} e^{x}\,dx + \int_2^{\infty} e^{-sx}(3)\,dx \\
&= \int_0^{2} e^{(1-s)x}\,dx + 3\lim_{R\to\infty} \int_2^{R} e^{-sx}\,dx = \left.\frac{e^{(1-s)x}}{1-s}\right|_{x=0}^{x=2} - \frac{3}{s} \lim_{R\to\infty} \left. e^{-sx} \right|_{x=2}^{x=R} \\
&= \frac{e^{2(1-s)}}{1-s} - \frac{1}{1-s} - \frac{3}{s} \lim_{R\to\infty} \left[e^{-Rs} - e^{-2s} \right] = \frac{1-e^{-2(s-1)}}{s-1} + \frac{3}{s} e^{-2x} \quad (\text{para } s>0)
\end{aligned}$$

21.9. Encuentre la transformada de Laplace de la función graficada en la figura 21-1.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \le 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

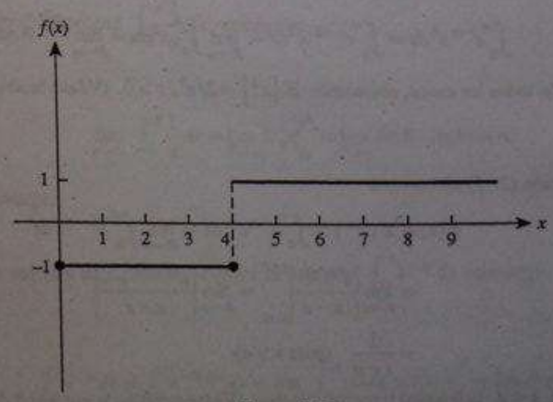


Figura 21-1

$$\mathscr{L}\{f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = \int_0^4 e^{-sx}(-1)\,dx + \int_4^\infty e^{-sx}(1)\,dx$$
$$= \frac{e^{-sx}}{s}\bigg|_{x=0}^{x=4} + \lim_{R\to\infty}\int_4^R e^{-sx}\,dx$$
$$= \frac{e^{-4s}}{s} - \frac{1}{s} + \lim_{R\to\infty}\left(\frac{-1}{s}e^{-Rs} + \frac{1}{s}e^{-4s}\right)$$
$$= \frac{2e^{-4s}}{s} - \frac{1}{s} \quad (\text{para } s > 0)$$

21.10. Encuentre la transformada de Laplace de $f(x) = 3 + 2x^2$.

Usando la propiedad 21.1 con los resultados de los problemas 21.4 y 21.5, o de manera alternativa, las entradas 1 y 3 ($n = 3$) del apéndice A, tenemos

$$F(s) = \mathscr{L}\{3 + 2x^2\} = 3\mathscr{L}\{1\} + 2\mathscr{L}\{x^2\}$$
$$= 3\left(\frac{1}{s}\right) + 2\left(\frac{2}{s^3}\right) = \frac{3}{s} + \frac{4}{s^3}$$

21.11. Encuentre la transformada de Laplace de $f(x) = 5\,\text{sen}\,3x - 17e^{-2x}$.

Usando la propiedad 21.1 con los resultados de los problemas 21.6 ($a = -2$) y 21.7 ($a = 3$), o de manera alternativa, las entradas 7 y 8 del apéndice A, tenemos

$$F(s) = \mathscr{L}\{5\,\text{sen}\,3x - 17e^{-2x}\} = 5\,\mathscr{L}\{\text{sen}\,3x\} - 17\,\mathscr{L}\{e^{-2x}\}$$
$$= 5\left(\frac{3}{s^2 + (3)^2}\right) - 17\left(\frac{1}{s - (-2)}\right) = \frac{15}{s^2 + 9} - \frac{17}{s + 2}$$

21.12. Encuentre la transformada de Laplace de $f(x) = 2\,\text{sen}\,x + 3\cos 2x$.

Usando la propiedad 21.1 con las entradas 8 ($a = 1$) y 9 ($a = 2$) del apéndice A, tenemos

$$F(s) = \mathscr{L}\{2\,\text{sen}\,x + 3\cos 2x\} = 2\mathscr{L}\{\text{sen}\,x\} + 3\mathscr{L}\{\cos 2x\}$$
$$= 2\frac{1}{s^2 + 1} + 3\frac{s}{s^2 + 4} = \frac{2}{s^2 + 1} + \frac{3s}{s^2 + 4}$$

21.13. Encuentre la transformada de Laplace de $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$.

Usando la propiedad 21.1 repetidamente con las entradas 1, 2 y 3 ($n = 3$) del apéndice A, tenemos

$$F(s) = \mathscr{L}\{2x^2 - 3x + 4\} = 2\mathscr{L}\{x^2\} - 3\mathscr{L}\{x\} + 4\mathscr{L}\{1\}$$
$$= 2\left(\frac{2}{s^3}\right) - 3\left(\frac{1}{s^2}\right) + 4\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{4}{s^3} - \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s}$$

21.14. Encuentre $\mathscr{L}\{xe^{4x}\}$.

Este problema se puede hacer de tres maneras.

a) Usando la entrada 14 del apéndice A con $n = 2$ y $a = 4$, directamente tenemos que

$$\mathcal{L}\left\{xe^{4x}\right\} = \frac{1}{(s-4)^2}$$

b) Establecemos $f(x) = x$. Usando la propiedad 21.2 con $a = 4$ y la entrada 2 del apéndice A, tenemos

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{x\}\frac{1}{s^2}$$

y

$$\mathcal{L}\left\{e^{4x}x\right\} = F(s-4) = \frac{1}{(s-4)^2}$$

c) Establecemos $f(x) = e^{4x}$. Usando la propiedad 21.3 con $n = 1$ y los resultados del problema 21.6, o de manera alternativa, la entrada 7 del apéndice A con $a = 4$, encontramos que

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\left\{e^{4x}\right\} = \frac{1}{s-4}$$

y

$$\mathcal{L}\left\{xe^{4x}\right\} = -F'(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-4}\right) = \frac{1}{(s-4)^2}$$

21.15. Encuentre $\mathcal{L}\left\{e^{-2x}\operatorname{sen}5x\right\}$.

Este problema se puede hacer de dos maneras.

a) Usando la entrada 15 del apéndice A con $b = -2$ y $a = 5$, directamente tenemos que

$$\mathcal{L}\left\{e^{-2x}\operatorname{sen}5x\right\} = \frac{5}{\left[s-(-2)\right]^2 + (5)^2} = \frac{5}{(s+2)^2 + 25}$$

b) Establecemos $f(x) = \operatorname{sen}5x$. Usando la propiedad 21.2 con $a = -2$ y los resultados del problema 21.7, o de manera alternativa, la entrada 8 del apéndice A con $a = 5$, tenemos

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen}5x\} = \frac{5}{s^2 + 25}$$

y

$$\mathcal{L}\left\{e^{-2x}\operatorname{sen}5x\right\} = F(s-(-2)) = F(s+2) = \frac{5}{(s+2)^2 + 25}$$

21.16. Encuentre $\mathcal{L}\left\{x\cos\sqrt{7}x\right\}$.

Este problema se puede hacer de dos maneras.

a) Usando la entrada 13 del apéndice A con $a = \sqrt{7}$, directamente tenemos que

$$\mathcal{L}\left\{x\cos\sqrt{7}x\right\} = \frac{s^2 - (\sqrt{7})^2}{\left[s^2 + (\sqrt{7})^2\right]^2} = \frac{s^2 - 7}{(s^2+7)^2}$$

b) Establecemos $f(x) = \cos\sqrt{7}x$. Usando la propiedad 21.3 con $n = 1$ y la entrada 9 del apéndice A con $a = \sqrt{7}$, tenemos

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{\cos\sqrt{7}x\right\} = \frac{s}{s^2 + (\sqrt{7})^2} = \frac{s}{s^2 + 7}$$

y $$\mathscr{L}\left\{x\cos\sqrt{7}x\right\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+7}\right) = \frac{s^2-7}{(s^2+7)^2}$$

21.17. Encuentre $\mathscr{L}\left\{e^{-x}\cos 2x\right\}$.

Tomamos $f(x) = x\cos 2x$. De la entrada 13 del apéndice A con $a = 2$, obtenemos

$$F(s) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

Luego, de la propiedad 21.2 con $a = -1$,

$$\mathscr{L}\left\{e^{-x}x\cos 2x\right\} = F(s+1) = \frac{(s+1)^2-4}{\left[(s+1)^2+4\right]^2}$$

21.18. Encuentre $\mathscr{L}\left\{x^{7/2}\right\}$.

Definimos $f(x) = \sqrt{x}$. Entonces $x^{7/2} = x^3\sqrt{x} = x^3 f(x)$ y de la entrada 4 del apéndice A, obtenemos

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(x)\} = \mathscr{L}\left\{\sqrt{x}\right\} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-3/2}$$

Luego, de la propiedad 21.3 con $n = 3$, tenemos que

$$\mathscr{L}\left\{x^3\sqrt{x}\right\} = (-1)^3\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-3/2}\right) = \frac{105}{16}\sqrt{\pi}s^{-9/2}$$

que concuerda con la entrada 6 del apéndice A para $n = 4$.

21.19. Encuentre $\mathscr{L}\left\{\frac{\text{sen}\,3x}{x}\right\}$.

Tomando $f(x) = \text{sen}\,3x$, encontramos, de la entrada 8 del apéndice A con $a = 3$, que

$$F(s) = \frac{3}{s^2+9} \qquad \text{o bien} \qquad F(t) = \frac{3}{t^2+9}$$

Entonces, usando la propiedad 21.4, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left\{\frac{\text{sen}\,3x}{x}\right\} &= \int_s^\infty \frac{3}{t^2+9}\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_s^R \frac{3}{t^2+9}\,dt \\
&= \lim_{R\to\infty} \arctan\frac{t}{3}\bigg|_s^R \\
&= \lim_{R\to\infty}\left(\arctan\frac{R}{3} - \arctan\frac{s}{3}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{s}{3}
\end{aligned}$$

21.20. Encuentre $\mathscr{L}\left\{\int_0^x \text{sen}\,2t\,dt\right\}$.

Tomando $f(t) = \text{senh}\,2t$, tenemos $f(x) = \text{senh}\,2x$. De aquí se desprende, de la entrada 10 del apéndice A con $a = 2$ que $F(s) = 2/(s^2-4)$, y luego, de la propiedad 21.5 que

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^x \operatorname{senh} 2t\, dt\right\} = \frac{1}{s}\left(\frac{2}{s^2-4}\right) = \frac{2}{s(s^2-4)}$$

21.21. Demuestre que si $f(x+\omega) = -f(x)$, entonces

$$\mathscr{L}\{f(x)\} = \frac{\int_0^{\omega} e^{-sx} f(x)dx}{1+e^{-\omega s}} \tag{1}$$

Dado que

$$f(x+2\omega) = f[(x+\omega)+\omega] = -f(x+\omega) = -[-f(x)] = f(x)$$

$f(x)$ es periódica con periodo 2ω. Luego, usando la propiedad 21.6 con ω reemplazada por 2ω, tenemos

$$\mathscr{L}\{f(x)\} = \frac{\int_0^{2\omega} e^{-sx} f(x)dx}{1-e^{-2\omega s}} = \frac{\int_0^{\omega} e^{-sx} f(x)dx + \int_{\omega}^{2\omega} e^{-sx} f(x)dx}{1-e^{-2\omega s}}$$

Sustituyendo $y = x - \omega$ en la segunda integral, encontramos que

$$\int_{\omega}^{2\omega} e^{-sx} f(x)dx = \int_0^{\omega} e^{-s(y+\omega)} f(y+\omega)dy = e^{-\omega s}\int_0^{\omega} e^{-sy}[-f(y)]dy$$
$$= -e^{-\omega s}\int_0^{\omega} e^{-sy} f(y)dy$$

La última integral, al cambiar la variable muda de integración para regresar a x, se iguala a

$$-e^{-\omega s}\int_0^{\omega} e^{-sx} f(x)dx$$

De este modo,

$$\mathscr{L}\{f(x)\} = \frac{(1-e^{-\omega s})\int_0^{\omega} e^{-sx} f(x)dx}{1-e^{-2\omega s}}$$
$$= \frac{(1-e^{-\omega s})\int_0^{\omega} e^{-sx} f(x)dx}{(1-e^{-\omega s})(1+e^{-\omega s})} = \frac{\int_0^{\omega} e^{-sx} f(x)dx}{1+e^{-\omega s}}$$

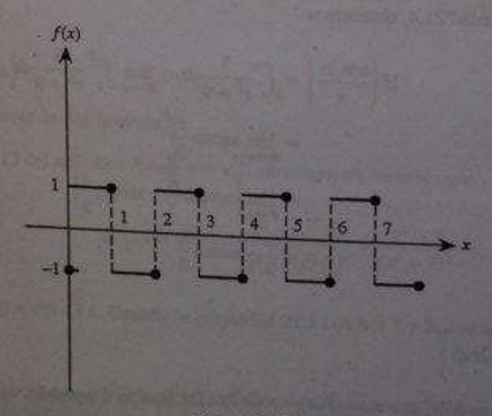


Figura 21-2

21.22. Encuentre $\mathscr{L}\{f(x)\}$ para la onda cuadrada mostrada en la figura 21-2.

Este problema se puede hacer de dos maneras.

a) Obsérvese que $f(x)$ es periódica con periodo $\omega = 2$ y en el intervalo $0 < x \leq 2$ se puede definir analíticamente por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq 1 \\ -1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

De la ecuación (*21.8*) tenemos

$$\mathscr{L}\{f(x)\} = \frac{\int_0^2 e^{-sx} f(x)dx}{1 - e^{-2s}}$$

Puesto que

$$\int_0^2 e^{-sx} f(x)dx = \int_0^1 e^{-sx}(1)dx + \int_1^2 e^{-sx}(-1)dx$$
$$= \frac{1}{s}(e^{-2s} - 2e^{-s} + 1) = \frac{1}{s}(e^{-s} - 1)^2$$

se desprende que

$$F(s) = \frac{(e^{-s} - 1)^2}{s(1 - e^{-2s})} = \frac{(1 - e^{-s})^2}{s(1 - e^{-s})(1 + e^{-s})} = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 + e^{-s})}$$
$$= \left[\frac{e^{s/2}}{e^{s/2}}\right]\left[\frac{1 - e^{-s}}{s(1 + e^{-s})}\right] = \frac{e^{s/2} - e^{-s/2}}{s(e^{s/2} + e^{-s/2})} = \frac{1}{s}\tanh\frac{s}{2}$$

b) La onda cuadrada $f(x)$ también satisface la ecuación $f(x + 1) = -f(x)$. De este modo, usando (*1*) del problema 21.21, con $\omega = 1$, obtenemos

$$\mathscr{L}\{f(x)\} = \frac{\int_0^1 e^{-sx} f(x)dx}{1 + e^{-s}} = \frac{\int_0^1 e^{-sx}(1)dx}{1 + e^{-s}}$$
$$= \frac{(1/s)(1 - e^{-s})}{1 + e^{-s}} = \frac{1}{s}\tanh\frac{s}{2}$$

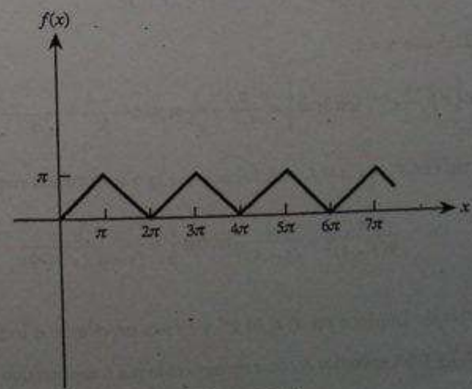


Figura 21-3

21.23. Encuentre la transformada de Laplace de la función graficada en la figura 21-3.

Obsérvese que $f(x)$ es periódica con periodo $\omega = 2\pi$, y en el intervalo $0 \le x < 2\pi$ se puede definir analíticamente por

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \pi \\ 2\pi - x & \pi \le x < 2\pi \end{cases}$$

De la ecuación (*21.8*) tenemos

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{\int_0^{2\pi} e^{-sx} f(x)\,dx}{1 - e^{-2\pi s}}$$

Dado que

$$\int_0^{2\pi} e^{-sx} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} e^{-sx} x\,dx + \int_0^{2\pi} e^{-sx}(2\pi - x)\,dx$$
$$= \frac{1}{s^2}(e^{-2\pi s} - 2e^{-\pi s} + 1) = \frac{1}{s^2}(e^{-\pi s} - 1)^2$$

se desprende que

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{(1/s^2)(e^{-\pi s} - 1)^2}{1 - e^{-2\pi s}} = \frac{(1/s^2)(e^{-\pi s} - 1)^2}{(1 - e^{-\pi s})(1 + e^{-\pi s})}$$
$$= \frac{1}{s^2}\left(\frac{1 - e^{-\pi s}}{1 + e^{-\pi s}}\right) = \frac{1}{s^2}\tanh\frac{\pi s}{2}$$

21.24. Encuentre $\mathcal{L}\left\{e^{4x} x \int_0^x \frac{1}{t} e^{-4t} \operatorname{sen} 3t\,dt\right\}$.

Usando la ecuación (*21.4*) con $a = -4$ en los resultados del problema 21.19, obtenemos

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{x} e^{-4x} \operatorname{sen} 3x\right\} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{s+4}{3}$$

De la ecuación (*21.7*) ahora se desprende que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x \frac{1}{t} e^{-4t} \operatorname{sen} 3t\,dt\right\} = \frac{\pi}{2s} - \frac{1}{s}\arctan\frac{s+4}{3}$$

y entonces por la propiedad 21.3 con $n = 1$,

$$\mathcal{L}\left\{x\int_0^x \frac{1}{t} e^{-4t} \operatorname{sen} 3t\,dt\right\} = \frac{\pi}{2s^2} - \frac{1}{s^2}\arctan\frac{s+4}{3} + \frac{3}{s\left[9 + (s+4)^2\right]}$$

Finalmente, usando la ecuación (*21.4*) con $a = 4$, concluimos que la transformada requerida es

$$\frac{\pi}{2(s-4)^2} - \frac{1}{(s-4)^2}\arctan\frac{s}{3} + \frac{3}{(s-4)(s^2+9)}$$

21.25. Encuentre las transformadas de Laplace en *a*) t, *b*) e^{at} y *c*) sen at, donde a indica una constante.

Usando las entradas 2, 7 y 8 del apéndice A con x reemplazada por t, encontramos que las transformadas de Laplace son, respectivamente,

a) $\mathcal{L}\{t\}=\frac{1}{s^2}$ *b)* $\mathcal{L}\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$ *c)* $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\}=\frac{a}{s^2+a^2}$

21.26. Encuentre las transformadas de Laplace de *a)* θ^2, *b)* $\cos a\theta$, *c)* $e^{b\theta}\operatorname{sen} a\theta$, donde a y b indican constantes.

Usando las entradas 3 (con $n = 3$) 9 y 15 del apéndice A con x reemplazada por θ, encontramos que las transformadas de Laplace son, respectivamente

a) $\mathcal{L}\{\theta^2\}=\frac{2}{s^3}$ *b)* $\mathcal{L}\{\cos a\theta\}=\frac{s}{s^2+a^2}$ *c)* $\mathcal{L}\{e^{b\theta}\operatorname{sen} a\theta\}=\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$

PROBLEMAS ADICIONALES

En los problemas del 21.27 al 21.42 encuentre las transformadas de Laplace de la función dada utilizando la ecuación (*21.1*).

21.27. $f(x)=3$

21.28. $f(x)=\sqrt{5}$

21.29. $f(x)=e^{2x}$

21.30. $f(x)=e^{-6x}$

21.31. $f(x)=x$

21.32. $f(x)=-8x$

21.33. $f(x)=\cos 3x$

21.34. $f(x)=\cos 4x$

21.35. $f(x)=\cos bx$, donde b denota una constante

21.36. $f(x)=xe^{-8x}$

21.37. $f(x)=xe^{bx}$, donde b denota una constante

21.38. $f(x)=x^3$

21.39. $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 2 \\ 2 & x>2 \end{cases}$

21.40. $f(x)=\begin{cases} 1 & 0\le x\le 1 \\ e^x & 1<x\le 4 \\ 0 & x>4 \end{cases}$

21.41. $f(x)$ en la figura 21-4

21.42. $f(x)$ en la figura 21-5

En los problemas del 21.43 al 21.76, use el apéndice A y las propiedades 21.1 a 21.6, cuando sea adecuado, para encontrar las transformadas de Laplace de las funciones dadas.

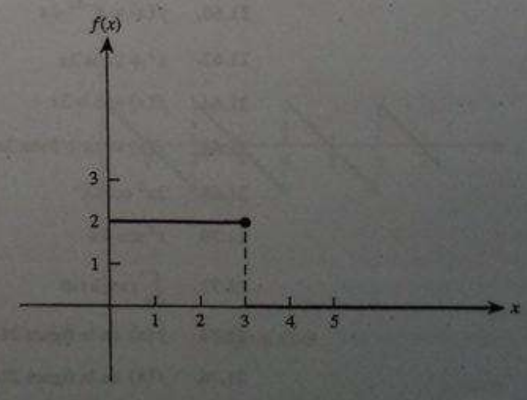


Figura 21-4

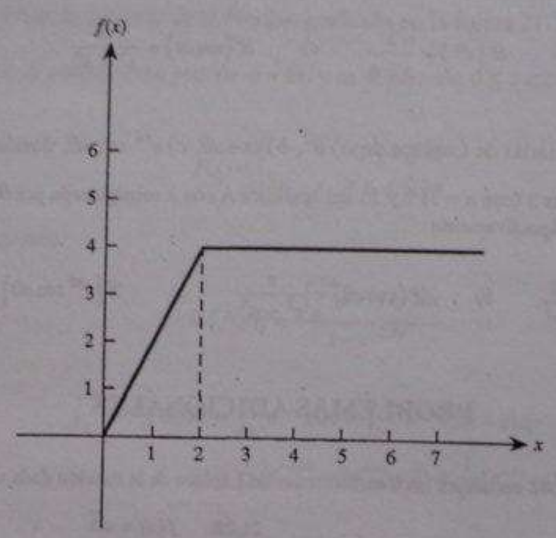


Figura 21-5

21.43. $f(x)=x^7$

21.44. $f(x)=x\cos 3x$

21.45. $f(x)=x^5e^{-x}$

21.46. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

21.47. $f(x)=\dfrac{1}{3}e^{-x/3}$

21.48. $f(x)=5e^{-x/3}$

21.49. $f(x)=2\,\text{sen}^2\sqrt{3}x$

21.50. $f(x)=8e^{-5x}$

21.51. $f(x)=3\,\text{sen}\dfrac{x}{2}$

21.52. $f(x)=-\cos\sqrt{19}x$

21.53. $f(x)=-1$

21.54. $f(x)=e^{-x}\,\text{sen}\,2x$

21.55. $f(x)=e^{x}\,\text{sen}\,2x$

21.56. $f(x)=e^{-x}\cos 2x$

21.57. $f(x)=e^{3x}\cos 2x$

21.58. $f(x)=e^{3x}\cos 5x$

21.59. $f(x)=e^{5x}\sqrt{x}$

21.60. $f(x)=e^{-5x}\sqrt{x}$

21.61. $f(x)=e^{-2x}\,\text{sen}^2\,x$

21.62. $x^3+3\cos 2x$

21.63. $5e^{2x}+7e^{-x}$

21.64. $f(x)=2+3x$

21.65. $f(x)=3-4x^2$

21.66. $f(x)=2x+5\,\text{sen}\,3x$

21.67. $f(x)=2\cos 3x-\text{sen}\,3x$

21.68. $2x^2\cosh x$

21.69. $2x^2e^{-x}\cosh x$

21.70. $x^2\,\text{sen}\,4x$

21.71. $\sqrt{x}\,e^{2x}$

21.72. $\int_0^x t\,\text{senh}\,t\,dt$

21.73. $\int_0^x e^{3t}\cos t\,dt$

21.74. $f(x)$ en la figura 21-6

21.75. $f(x)$ en la figura 21-7

21.76. $f(x)$ en la figura 21-8

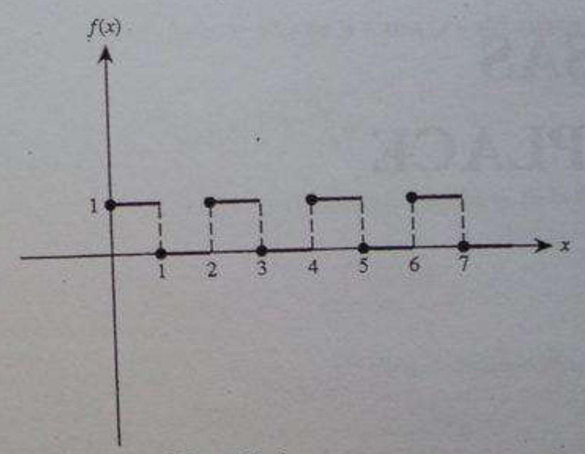


Figura 21-6

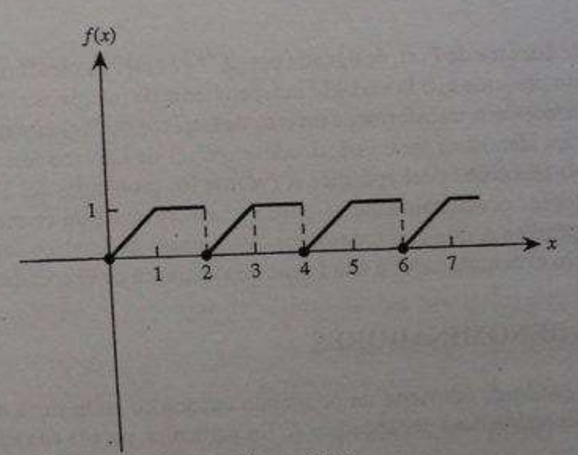


Figura 21-7

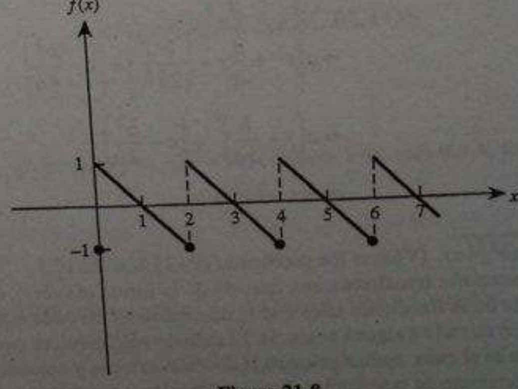


Figura 21-8

TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE

22

DEFINICIÓN

Una *transformada inversa de Laplace* de $F(s)$, designada por $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$, es otra función $f(x)$ que tiene la propiedad de que $\mathscr{L}\{f(x)\} = F(s)$. Esto presume que la variable independiente de interés es x. Si, en cambio, la variable independiente de interés es t, entonces una transformada inversa de Laplace de $F(s)$ es $f(t)$ donde $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$.

La técnica más simple para identificar las transformadas inversas de Laplace consiste en reconocerlas, ya sea de memoria o bien con una tabla tal como la del apéndice A (véanse los problemas del 22.1 al 22.3). Si $F(s)$ no está en una forma reconocible, entonces ocasionalmente se puede transformar en tal forma mediante una manipulación algebraica. Obsérvese del apéndice A que casi todas las transformadas de Laplace son cocientes. El procedimiento adecuado es convertir primero el denominador a una forma que aparezca en el apéndice A y luego el numerador.

MANIPULACIÓN DE DENOMINADORES

El método de *completar el cuadrado* convierte un polinomio cuadrático en la suma de cuadrados, una forma que aparece en muchos de los denominadores del apéndice A. En particular, para la cuadrática $as^2 + bs + c$, donde a, b y c denotan constantes,

$$\begin{aligned} as^2+bs+c &= a\left(s^2+\frac{b}{a}s\right)+c \\ &= a\left[s^2+\frac{b}{a}s+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+\left[c-\frac{b^2}{4a}\right] \\ &= a\left(s+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right) \\ &= a(s+k)^2+h^2 \end{aligned}$$

donde $k = b/2a$ y $h = \sqrt{c-(b^2/4a)}$. (Véanse los problemas del 22.8 al 22.10.)

El método de *fracciones parciales* transforma una función de la forma $a(s)/b(s)$, donde tanto $a(s)$ como $b(s)$ son polinomios en s, en la suma de otras fracciones tales que el denominador de cada nueva fracción es o un polinomio de primer grado o un cuadrático elevado a alguna potencia. El método sólo requiere que (1) el grado de $a(s)$ sea menor que el grado de $b(s)$ (si éste no es el caso, realice primero la división extensa y considere el término remanente) y (2) $b(s)$ sea factorizado como el producto de polinomios distintos lineales y cuadráticos elevados a varias potencias.

El método se lleva a cabo como sigue. Para cada factor de $b(s)$ de la forma $(s-a)^m$ asignamos una suma de m fracciones, de la forma

$$\frac{A_1}{s-a}+\frac{A_2}{(s-a)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(s-a)^m}$$

Para cada factor de $b(s)$ de la forma $(s^2+bs+c)^p$ asignamos una suma de p fracciones, de la forma

$$\frac{B_1s+C_1}{s^2+bs+c}+\frac{B_2s+C_2}{(s^2+bs+c)^2}+\cdots+\frac{B_ps+C_p}{(s^2+bs+c)^p}$$

Aquí A_i, B_j y C_k $(i=1, 2, \ldots, m; j, k=1, 2, \ldots, p)$ son constantes que se deben determinar aún.

Establezca la fracción original $a(s)/b(s)$ igual a la suma de las nuevas fracciones recién construidas. Elimine denominadores de la ecuación de fracciones resultante y luego iguale los coeficientes de las mismas potencias de s, obteniendo de este modo un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas en las constantes desconocidas A_i, B_j y C_k. Finalmente, resuelva estas ecuaciones para A_i, B_j y C_k. (Véanse los problemas del 22.11 al 22.14.)

MANIPULACIÓN DE NUMERADORES

Un factor $s-a$ en los numeradores se puede escribir en términos del factor $s-b$, donde ambos a y b son constantes, a través de la identidad $s-a=(s-b)+(b-a)$. La constante multiplicativa a en el numerador se puede escribir explícitamente en términos de la constante multiplicativa b por medio de la identidad.

$$a=\frac{a}{b}(b)$$

Ambas identidades generan transformadas inversas de Laplace que son reconocibles cuando se combinan con:

Propiedad 22.1. ***(Linealidad.)*** Si las transformadas inversas de Laplace de dos funciones $F(s)$ y $G(s)$ existen, entonces para cualesquiera constantes c_1 y c_2,

$$\mathscr{L}^{-1}\{c_1F(s)+c_2G(s)\}=c_1\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}+c_2\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}$$

(Véanse los problemas del 22.4 al 22.7.)

PROBLEMAS RESUELTOS

22.1. Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$.

Aquí $F(s)=1/s$. Ya sea del problema 21.4 o de la entrada 1 del apéndice A, tenemos $\mathscr{L}\{1\}=1/s$. Por lo tanto, $\mathscr{L}^{-1}\{1/s\}=1$.

22.2. Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-8}\right\}$.

Ya sea del problema 21.6 o de la entrada 7 del apéndice A con $a=8$, tenemos

$$\mathscr{L}\{e^{8x}\}=\frac{1}{s-8}$$

Por lo tanto,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-8}\right\}=e^{8x}$$

22.3 Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6}\right\}$.

De la entrada 9 del apéndice A con $a=\sqrt{6}$, tenemos

$$\mathscr{L}\{\cos\sqrt{6}x\}=\frac{s}{s^2+(\sqrt{6})^2}=\frac{s}{s^2+6}$$

Por lo tanto,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6}\right\}=\cos\sqrt{6}x$$

22.4. Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5s}{(s^2+1)^2}\right\}$.

La función dada es similar en forma a la entrada 12 del apéndice A. Los denominadores se vuelven idénticos si tomamos $a=1$. Manipulando el numerador de la función dada y usando la propiedad 22.1, obtenemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5s}{(s^2+1)^2}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{5}{2}(2s)}{(s^2+1)^2}\right\}=\frac{5}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right\}=\frac{5}{2}x\operatorname{sen}x$$

22.5. Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\}$.

La función dada es similar en forma a la entrada 5 del apéndice A. Sus denominadores son idénticos; manipulando el numerador de la función dada y usando la propiedad 22.1, obtenemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

22.6. Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-9}\right\}$.

El denominador de esta función es idéntico al denominador de las entradas 10 y 11 del apéndice A con $a=3$. Usando la propiedad 22.1 seguida por una simple manipulación algebraica, obtenemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-9}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-9}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-9}\right\}=\cosh 3x+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{s^2-(3)^2}\right)\right\}$$
$$=\cosh 3x+\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2-(3)^2}\right\}=\cosh 3x+\frac{1}{3}\operatorname{senh}3x$$

22.7. Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)^2+9}\right\}$.

El denominador de esta función es idéntico a los denominadores de las entradas 15 y 16 del apéndice A con $a=3$ y $b=2$. Tanto la función dada como la entrada 16 tienen la *variable s* en sus numeradores, de modo que están más cercanamente aparejadas. Manipulando el numerador de la función dada y usando la propiedad 22.1, obtenemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)^2+9}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s-2)+2}{(s-2)^2+9}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+9}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)^2+9}\right\}$$
$$=e^{2x}\cos 3x+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)^2+9}\right\}=e^{2x}\cos 3x+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{3}\left(\frac{3}{(s-2)^2+9}\right)\right\}$$
$$=e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)^2+9}\right\}=e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{3}e^{2x}\operatorname{sen}3x$$

22.8. Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+9}\right\}$.

Ninguna función de esta forma aparece en el apéndice A. Pero, completando el cuadrado, obtenemos

$$s^2-2s+9=(s^2-2s+1)+(9-1)=(s-1)^2+(\sqrt{8})^2$$

De aquí,

$$\frac{1}{s^2-2s+9}=\frac{1}{(s-1)^2+(\sqrt{8})^2}=\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)\frac{\sqrt{8}}{(s-1)^2+(\sqrt{8})^2}$$

Luego, usando la propiedad 22.1 y la entrada 15 del apéndice A con $a=\sqrt{8}$ y $b=1$ y $b=1$, encontramos que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+9}\right\}=\frac{1}{\sqrt{8}}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{8}}{(s-1)^2+(\sqrt{8})^2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{8}}e^x\operatorname{sen}\sqrt{8}x$$

22.9. Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+4s+8}\right\}$.

Ninguna función de esta forma aparece en el apéndice A. Completando el cuadrado en el denominador tenemos

$$s^2+4s+8=(s^2+4s+4)+(8-4)=(s+2)^2+(2)^2$$

De aquí,

$$\frac{s+4}{s^2+4s+8}=\frac{s+4}{(s+2)^2+(2)^2}$$

Esta expresión tampoco se encuentra en el apéndice A. Sin embargo, si volvemos a escribir el numerador como $s+4=(s+2)+2$ y luego descomponemos la fracción, tenemos

$$\frac{s+4}{s^2+4s+8}=\frac{s+2}{(s+2)^2+(2)^2}+\frac{2}{(s+2)^2+(2)^2}$$

Entonces, de las entradas 15 y 16 del apéndice A,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+4}{s^2+4s+8}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+(2)^2}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^2+(2)^2}\right\}$$
$$=e^{-2x}\cos 2x+e^{-2x}\operatorname{sen}2x$$

22.10. Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2+3s+4}\right\}$.

Ninguna función de esta forma aparece en el apéndice A. Completando el cuadrado en el denominador, tenemos

$$s^2-3s+4=\left(s^2-3s+\frac{9}{4}\right)+\left(4-\frac{9}{4}\right)=\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$$

de modo que

$$\frac{s+2}{s^2-3s+4}=\frac{s+2}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

Ahora volvemos a escribir el numerador como

$$s+2=s-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=\left(s-\frac{3}{2}\right)+\sqrt{7}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$$

así que

$$\frac{s+2}{s^2-3s+4}=\frac{s-\frac{3}{2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}+\sqrt{7}\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

Entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2+3s+4}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-\frac{3}{2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}\right\}+\sqrt{7}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}\right\}$$

$$=e^{(3/2)x}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x+\sqrt{7}e^{(3/2)x}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{7}}{2}x$$

22.11. Use la función parcial para descomponer $\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}$.

Para el factor lineal $s + 1$ asociamos la fracción $A/(s + 1)$; mientras tanto, para el factor cuadrático $s^2 + 1$ asociamos la fracción $(Bs+C)/(s^2+1)$. Luego establecemos

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\equiv\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+1} \qquad (1)$$

Eliminando denominadores obtenemos

$$1\equiv A(s^2+1)+(Bs+C)(s+1) \qquad (2)$$

o bien

$$s^2(0)+s(0)+1\equiv s^2(A+B)+s(B+C)+(A+C)$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de s, concluimos que $A + B = 0$, $B + C = 0$ y $A + C = 1$. La solución de este conjunto de ecuaciones es $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$ y $C=\frac{1}{2}$. Sustituyendo estos valores en (*1*) obtenemos la descomposición de las fracciones parciales

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\equiv\frac{\frac{1}{2}}{s+1}+\frac{-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}{s^2+1}$$

El siguiente es un procedimiento alternativo para hallar las constantes A, B y C en (*1*). Dado que (*2*) debe cumplirse para toda s, lo debe hacer en particular para $s = -1$. Sustituyendo este valor en (*2*), inmediatamente encontramos $A = \frac{1}{2}$. La ecuación (*2*) también debe cumplirse para $s = 0$. Sustituyendo este valor junto con $A = \frac{1}{2}$ en (*2*), obtenemos $C = \frac{1}{2}$. Finalmente, sustituyendo cualquier otro valor de s en (2), encontramos que $B = -\frac{1}{2}$.

22.12. Use fracciones parciales para descomponer $\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+8)}$.

Para los factores cuadráticos $s^2 + 1$ y s^2+4s+8, asociamos las fracciones $(As+B)/(s^2+1)$ y $(Cs+D)/(s^2+4s+8)$. Establecemos

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+8)}\equiv\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{s^2+4s+8} \qquad (1)$$

y eliminamos denominadores para obtener

$$1\equiv(As+B)(s^2+4s+8)+(Cs+D)(s^2+1)$$

o bien

$$s^3(0)+s^2(0)+s(0)+1\equiv s^3(A+C)+s^2(4A+B+D)+s(8A+4B+C)+(8B+D)$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de s obtenemos $A+C=0$, $4A+B+D=0$, $8A+4B+C=0$ y $8B+D=1$. La solución de este conjunto de ecuaciones es

$$A=-\frac{4}{65}\quad B=\frac{7}{65}\quad C=\frac{4}{65}\quad D=\frac{9}{65}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+8)} \equiv \frac{-\frac{4}{65}s+\frac{7}{65}}{s^2+1}+\frac{\frac{4}{65}s+\frac{9}{65}}{s^2+4s+8}$$

22.13. Use fracciones parciales para descomponer $\dfrac{s+3}{(s-2)(s+1)}$.

Para los factores lineales $s-2$ y $s+1$ asociamos, respectivamente, las fracciones $A/(s-2)$ y $B/(s+1)$. Establecemos

$$\frac{s+3}{(s-2)(s+1)} \equiv \frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+1}$$

y, eliminando denominadores, obtenemos

$$s+3 \equiv A(s-1)+B(s-2) \tag{1}$$

Para encontrar A y B usamos el procedimiento alternativo sugerido en el problema 22.11. Sustituyendo $s=-1$ y luego $s=2$ en (*1*), inmediatamente obtenemos $A=5/3$ y $B=-2/3$. De este modo,

$$\frac{s+3}{(s-2)(s+1)} \equiv \frac{5/3}{s-2}-\frac{2/3}{s+1}$$

22.14. Use fracciones parciales para descomponer $\dfrac{8}{s^3(s^2-s-2)}$.

Obsérvese que s^2-s-2 se factoriza así $(s-2)(s+1)$. Para el factor $s^3=(s-0)^3$, que es un polinomio lineal elevado a la tercera potencia, asociamos la suma $A_1/s+A_2/s^2+A_3/s^3$. Para los factores lineales $(s-2)$ y $(s+1)$, asociamos las fracciones $B/(s-2)$ y $C/(s+1)$. Entonces

$$\frac{8}{s^3(s^2-s-2)} \equiv \frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s^2}+\frac{A_3}{s^3}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+1}$$

o bien, eliminando denominadores,

$$8 \equiv A_1s^2(s-2)(s+1)+A_2s(s-2)(s+1)+A_3(s-2)(s+1)+Bs^3(s+1)+Cs^3(s-2)$$

Tomando $s=-1$, 2 y 0, consecutivamente, obtenemos, respectivamente, $C=8/3$, $B=1/3$ y $A_3=-4$. Luego, eligiendo $s=1$ y $s=-2$, y simplificando, obtenemos las ecuaciones $A_1+A_2=-1$ y $2A_1-A_2=-8$, que tienen como soluciones $A_1=-3$ y $A_2=2$. Obsérvese que cualesquiera otros dos valores para s (no -1, 2 o 0) también servirían; las ecuaciones resultantes pueden ser diferentes, pero la solución será idéntica. Finalmente

$$\frac{2}{s^3(s^2-s-2)} \equiv -\frac{3}{s}+\frac{2}{s^2}-\frac{4}{s^3}+\frac{1/3}{s-2}+\frac{8/3}{s+1}$$

22.15. Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+3}{(s-2)(s+1)}\right\}$.

Ninguna función de esta forma aparece en el apéndice A. Usando los resultados del problema 22.13 y la propiedad 22.1, obtenemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s-2)(s+1)}\right\} = \frac{5}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-\frac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= \frac{5}{3}e^{2x}-\frac{2}{3}e^{-x}$$

22.16. Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{8}{s^3(s^2-s-2)}\right\}$.

Ninguna función de esta forma aparece en el apéndice A. Usando los resultados del problema 22.14 y la propiedad 22.1, obtenemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{8}{s^3(s^2-s-2)}\right\} = -3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$$

$$-2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} + \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{8}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$= -3 + 2x - 2x^2 + \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{8}{3}e^{-x}$$

22.17. Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$.

Usando el resultado del problema 22.11, y observando que

$$\frac{-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}{s^2+1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

encontramos que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\} = \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$$

22.18. Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+8)}\right\}$.

Del problema 22.12 tenemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+8)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{4}{65}s+\frac{7}{65}}{s^2+1}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{4}{65}s+\frac{9}{65}}{(s^2+4s+8)}\right\}$$

El primer término se puede evaluar fácilmente si observamos que

$$\frac{-\frac{4}{65}s+\frac{7}{65}}{s^2+1} = \left(-\frac{4}{65}\right)\frac{s}{s^2+1} + \left(\frac{7}{65}\right)\frac{1}{s^2+1}$$

Para evaluar las segundas transformadas inversas, primero debemos completar el cuadrado del denominador, $s^2+4s+8=(s+2)^2+(2)^2$, y luego notar que

$$\frac{\frac{4}{65}s+\frac{9}{65}}{s^2+4s+8} = \frac{4}{65}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+(2)^2}\right] + \frac{1}{130}\left[\frac{2}{(s+2)^2+(2)^2}\right]$$

Por lo tanto,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+8)}\right\} = -\frac{4}{65}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{7}{65}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$+\frac{4}{65}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)^2+(2)^2}\right\} + \frac{1}{130}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^2+(2)^2}\right\}$$

$$= -\frac{4}{65}\cos x + \frac{7}{65}\operatorname{sen} x + \frac{4}{65}e^{-2x}\cos 2x + \frac{1}{130}e^{-2x}\operatorname{sen} 2x$$

22.19. Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}$.

Por el método de las fracciones parciales obtenemos

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1/4}{s} + \frac{(-1/4)s}{s^2+4}$$

De este modo,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2x$$

PROBLEMAS ADICIONALES

Encuentre las transformadas inversas de Laplace, como una función de x, de las siguientes funciones:

22.20. $\frac{1}{s^2}$

22.21. $\frac{2}{s^2}$

22.22. $\frac{2}{s^3}$

22.23. $\frac{1}{s^3}$

22.24. $\frac{1}{s^4}$

22.25. $\frac{1}{s+2}$

22.26. $\frac{-2}{s-2}$

22.27. $\frac{12}{3s+9}$

22.28. $\frac{1}{2s-3}$

22.29. $\frac{1}{(s-2)^3}$

22.30. $\frac{12}{(s+5)^4}$

22.31. $\frac{3s^2}{(s^2+1)^2}$

22.32. $\frac{s^2}{(s^2+3)^2}$

22.33. $\frac{1}{s^2+4}$

22.34. $\frac{2}{(s-2)^2+9}$

22.35. $\frac{s}{(s+1)^2+5}$

22.36. $\frac{2s+1}{(s-1)^2+7}$

22.37. $\frac{1}{2s^2+1}$

22.38. $\frac{1}{s^2-2s+2}$

22.39. $\frac{s+3}{s^2+2s+5}$

22.40. $\frac{s}{s^2-s+17/4}$

22.41. $\frac{s+1}{s^2+3s+5}$

22.42. $\frac{2s^2}{(s-1)(s^2+1)}$

22.43. $\frac{1}{s^2-1}$

22.44. $\frac{2}{(s^2+1)(s-1)^2}$

22.45. $\frac{s+2}{s^3}$

22.46. $\frac{-s+6}{s^3}$

22.47. $\frac{s^3+3s}{s^6}$

22.48. $\frac{12+15\sqrt{s}}{s^4}$

22.49. $\frac{2s-13}{s(s^2-4s+13)}$

22.50. $\frac{2(s-1)}{s^2-s+1}$

22.51. $\frac{s}{(s^2+9)^2}$

22.52. $\frac{1}{2(s-1)(s^2-s-1)}=\frac{1/2}{(s-1)(s^2-s-1)}$

22.53. $\frac{s}{2s^2+4s+5/2}=\frac{(1/2)s}{s^2+2s+5/4}$

CONVOLUCIONES Y FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO

23

CONVOLUCIONES

La *convolución* de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ es

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)\,dt \tag{23.1}$$

Teorema 23.1. $f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$.

Teorema 23.2. ***(Teorema de la convolución.)*** Si $\mathscr{L}\{f(x)\} = F(s)$ y $\mathscr{L}\{g(x)\} = G(s)$, entonces

$$\mathscr{L}\{f(x) * g(x)\} = \mathscr{L}\{f(x)\}\mathscr{L}\{g(x)\} = F(s)G(s)$$

De lo que se desprende, de estos dos teoremas, que

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(x) * g(x) = g(x) * f(x) \tag{23.2}$$

Si una de las dos convoluciones en la ecuación (*23.2*) es más simple de calcular, entonces se elige esa convolución cuando se determina la transformada inversa de Laplace de un producto.

FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO

La *función escalón unitario* $u(x)$ se define como

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Como consecuencia inmediata de la definición, tenemos que para cualquier número c,

$$u(x-c) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$

La gráfica de $u(x-c)$ está dada en la figura 23-1.

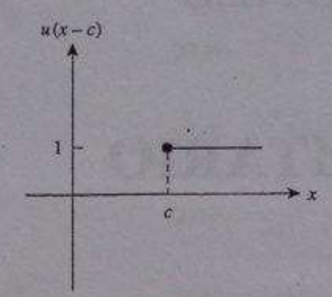


Figura 23-1

Teorema 23.3. $\mathcal{L}\{u(x-c)\} = \frac{1}{s}e^{-cs}$.

TRANSLACIONES

Dada una función $f(x)$ definida por $x \geq 0$, la función

$$u(x-c)f(x-c) = \begin{cases} 0 & x < c \\ f(x-c) & x \geq c \end{cases}$$

representa un desplazamiento, o translación, de la función $f(x)$ por c unidades en la dirección x positiva. Por ejemplo, si $f(x)$ se da gráficamente por medio de la figura 23-2, entonces $u(x-c)f(x-c)$ está dada gráficamente por la figura 23-3.

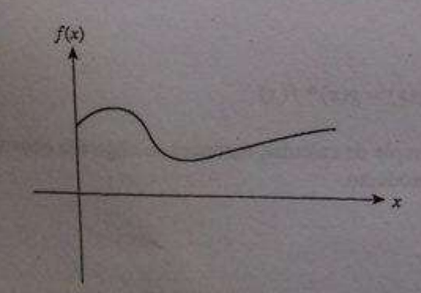


Figura 23-2

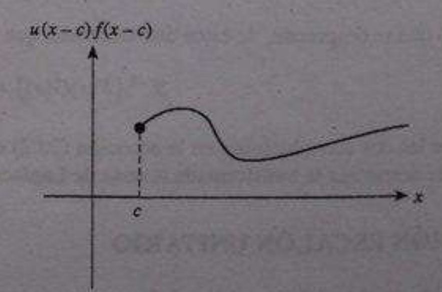


Figura 23-3

Teorema 23.4. Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$, entonces

$$\mathcal{L}\{u(x-c)f(x-c)\} = e^{-cs}F(s)$$

En forma inversa,

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\} = u(x-c)f(x-c) = \begin{cases} 0 & x < c \\ f(x-c) & x \geq c \end{cases}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

23.1. Encuentre $f(x)*g(x)$ cuando $f(x)=e^{3x}$ y $g(x)=e^{2x}$.

Aquí $f(t)=e^{3t}$, $g(x-t)=e^{2(x-t)}$, y

$$f(x)*g(x)=\int_0^x e^{3t}e^{2(x-t)}dt=\int_0^x e^{3t}e^{2x}e^{-2t}dt$$
$$=e^{2x}\int_0^x e^t dt=e^{2x}\left[e^t\right]_{t=0}^{t=x}=e^{2x}(e^x-1)=e^{3x}-e^{2x}$$

23.2 Encuentre $g(x)*f(x)$ para las dos funciones del problema 23.1 y verifique el teorema 23.1.

Con $f(x-t)=e^{3(x-t)}$ y $g(t)=e^{2t}$,

$$g(x)*f(x)=\int_0^x g(t)f(x-t)dt=\int_0^x e^{2t}e^{3(x-t)}dt$$
$$=e^{3x}\int_0^x e^{-t}dt=e^{3x}\left[-e^{-t}\right]_{t=0}^{t=x}$$
$$=e^{3x}(-e^{-x}+1)=e^{3x}-e^{2x}$$

que, del problema 23.1 se iguala con $f(x)*g(x)$.

23.3. Encuentre $f(x)*g(x)$ cuando $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$.

Aquí $f(t)=t$ y $g(x-t)=(x-t)^2=x^2-2xt+t^2$. De este modo,

$$f(x)*g(x)=\int_0^x t(x^2-2xt+t^2)dt$$
$$=x^2\int_0^x t\,dt-2x\int_0^x t^2dt+\int_0^x t^3dt$$
$$=x^2\frac{x^2}{2}-2x\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}=\frac{1}{12}x^4$$

23.4. Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-5s+6}\right\}$ por convoluciones.

Obsérvese que

$$\frac{1}{s^2-5s+6}=\frac{1}{(s-3)(s-2)}=\frac{1}{s-3}\frac{1}{s-2}$$

Definiendo $F(s)=1/(s-3)$ y $G(s)=1/(s-2)$, del apéndice A tenemos que $f(x)=e^{3x}$ y $g(x)=e^{2x}$. De la ecuación (*23.2*) y los resultados del problema 23.1, se desprende que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-5s+6}\right\}=f(x)*g(x)=e^{3x}*e^{2x}=e^{3x}-e^{2x}$$

23.5. Encuentre $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2-1}\right\}$ por convoluciones.

Obsérvese que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2-1}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6}{(s-1)(s+1)}\right\}=6\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\frac{1}{(s+1)}\right\}$$

Definiendo $F(s)=1/(s-1)$ y $G(s)=1/(s+1)$, del apéndice A tenemos que $f(x)=e^x$ y $g(x)=e^{-x}$. De la ecuación (*23.2*) se desprende que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2-1}\right\}&=6\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=6e^x*e^{-x}\\&=6\int_0^x e^t e^{-(x-t)}dt=6e^{-x}\int_0^x e^{2t}dt\\&=6e^{-x}\left[\frac{e^{2x}-1}{2}\right]=3e^x-3e^{-x}\end{aligned}$$

23.6. Encuentre $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}$ por circunvoluciones.

Obsérvese que

$$\frac{1}{s(s^2+4)}=\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+4}$$

Definiendo $F(s)=1/s$ y $G(s)=1/(s^2+4)$, del apéndice A tenemos que $f(x)=1$ y $g(x)=\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x$. De la ecuación (*23.2*) se desprende que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}&=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=g(x)*f(x)\\&=\int_0^x g(t)f(x-t)dt=\int_0^x\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}2t\right)(1)dt\\&=\frac{1}{4}(1-\cos 2x)\end{aligned}$$

Véase también el problema 22.19.

23.7. Encuentre $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$ por convoluciones.

Si definimos $F(s)=G(s)=1/(s-1)$, entonces $f(x)=g(x)=e^x$ y

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}&=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}=f(x)*g(x)\\&=\int_0^x f(t)g(x-t)dt=\int_0^x e^t e^{x-t}dt\\&=e^x\int_0^x(1)dt=xe^x\end{aligned}$$

23.8. Use la definición de la transformada de Laplace para encontrar $\mathcal{L}\{u(x-c)\}$ y de allí demuestre el teorema 23.3.

De la ecuación (*21.1*) tenemos directamente que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u(x-c)\}&=\int_0^\infty e^{-sx}(u(x-c)dx=\int_0^c e^{-sx}(0)dx+\int_c^\infty e^{-sx}(1)dx\\&=\int_c^\infty e^{-sx}dx=\lim_{R\to\infty}\int_c^R e^{-sx}dx=\lim_{R\to\infty}\frac{e^{-sR}-e^{-sc}}{-s}\\&=\frac{1}{s}e^{-sc}\quad(\text{si } s>0)\end{aligned}$$

23.9. Grafique la función $f(x) = u(x-2) - u(x-3)$.

Obsérvese que

$$u(x-2) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad u(x-3) = \begin{cases} 0 & x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

De este modo,

$$f(x) = u(x-2) - u(x-3) = \begin{cases} 0 - 0 = 0 & x < 2 \\ 1 - 0 = 1 & 2 \leq x < 3 \\ 1 - 1 = 0 & x \geq 3 \end{cases}$$

cuya gráfica está dada en la figura 23-4.

23.10. Grafique la función $f(x) = 5 - 5u(x-8)$ para $x \geq 0$.

Obsérvese que

$$5u(x-8) = \begin{cases} 0 & x < 8 \\ 5 & x \geq 8 \end{cases}$$

De este modo,

$$f(x) = 5 - 5u(x-8) = \begin{cases} 5 & x < 8 \\ 0 & x \geq 8 \end{cases}$$

La gráfica de esta función, cuando $x \geq 0$, está dada en la figura 23-5.

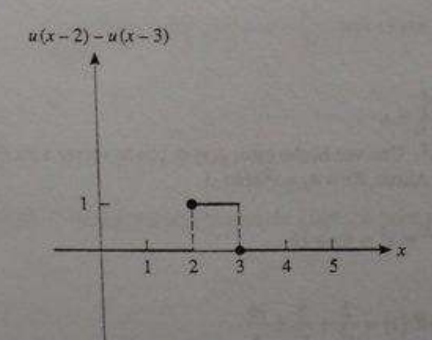


Figura 23-4

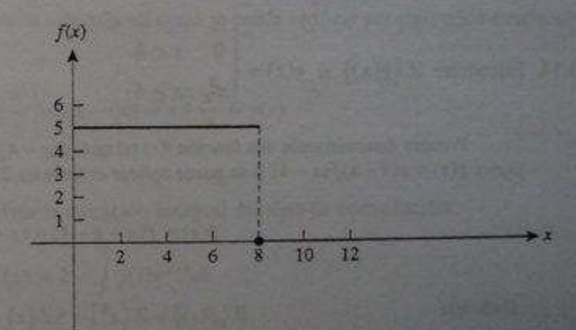


Figura 23-5

23.11. Use la función escalón unitario para dar una representación analítica de la función $f(x)$ graficada en la figura 23-6.

Obsérvese que $f(x)$ es la función $g(x) = x$, $x \geq 0$, trasladada en cuatro unidades en la dirección x positiva. De este modo, $f(x) = u(x-4)g(x-4) = (x-4)u(x-4)$.

23.12. Use la función escalón unitario para dar una descripción analítica de la función $g(x)$ graficada en el intervalo $(0, \infty)$ en la figura 23-7. Si en el subintervalo $(0, a)$ la gráfica es idéntica a la figura 23-2.

Tomando $f(x)$ como la representación de la función graficada en la figura 23-2. Entonces, $g(x) = f(x)[1 - u(x-a)]$.

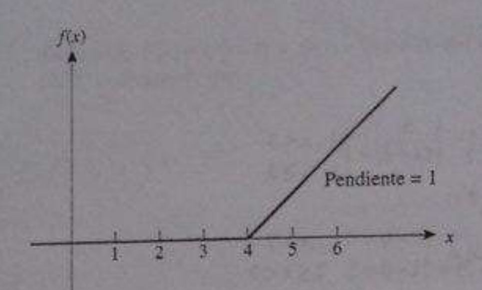


Figura 23-2

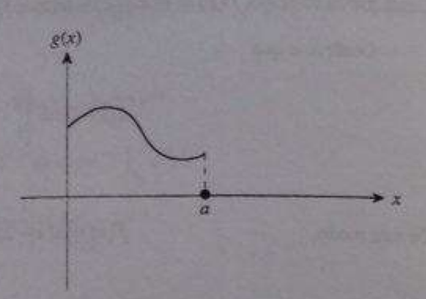


Figura 23-3

23.13. Encuentre $\mathscr{L}\{g(x)\}$ si $g(x)=\begin{cases}0 & x<4\\(x-4)^2 & x\geq 4\end{cases}$.

Si definimos $f(x)=x^2$, entonces $g(x)$ se puede dar en forma compacta como $g(x)=u(x-4)f(x-4)=u(x-4)(x-4)^2$. Entonces, observando que $\mathscr{L}\{f(x)\}=F(s)=2/s^3$ y usando el teorema 23.4, concluimos que

$$\mathscr{L}\{g(x)\}=\mathscr{L}\{u(x-4)(x-4)^2\}=e^{-4s}\frac{2}{s^3}$$

23.14. Encuentre $\mathscr{L}\{g(x)\}$ si $g(x)=\begin{cases}0 & x<4\\x^2 & x\geq 4\end{cases}$.

Primero determinamos una función $f(x)$ tal que $f(x-4)=x^2$. Una vez hecho esto, $g(x)$ se puede volver a escribir como $g(x)=u(x-4)f(x-4)$ y se puede aplicar el teorema 23.4. Ahora, $f(x-4)=x^2$ sólo si

$$f(x)=f(x+4-4)=(x+4)^2=x^2+8x+16$$

Dado que

$$\mathscr{L}\{f(x)\}=\mathscr{L}\{x^2\}+8\mathscr{L}\{x\}+16\mathscr{L}\{1\}=\frac{2}{s^3}+\frac{8}{s^2}+\frac{16}{s}$$

se desprende que

$$\mathscr{L}\{g(x)\}=\mathscr{L}\{u(x-4)f(x-4)\}=e^{-4s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{8}{s^2}+\frac{16}{s}\right)$$

23.15. Demuestre el teorema 23.1.

Haciendo la sustitución $\tau=x-t$ en el lado derecho de la ecuación (*23.1*) tenemos

$$\begin{aligned}f(x)*g(x)&=\int_0^x f(t)g(x-t)\,dt=\int_x^0 f(x-\tau)g(\tau)(-d\tau)\\&=-\int_x^0 g(\tau)f(x-\tau)\,d\tau=\int_0^x g(\tau)f(x-\tau)\,d\tau\\&=g(x)*f(x)\end{aligned}$$

23.16. Demuestre que $f(x)*[g(x)+h(x)] = f(x)*g(x)+f(x)*h(x)$.

$$\begin{aligned} f(x)*[g(x)+h(x)] &= \int_0^x f(t)[g(x-t)+h(x-t)]\,dt \\ &= \int_0^x [f(t)g(x-t)+f(t)h(x-t)]\,dt \\ &= \int_0^x f(t)g(x-t)\,dt + \int_0^x f(t)h(x-t)\,dt \\ &= f(x)*g(x)+f(x)*h(x) \end{aligned}$$

23.17. La siguiente ecuación se llama *ecuación integral del tipo de convolución*.

Asumiendo que la transformada de Laplace para $y(x)$ existe, resolvemos esta ecuación y los siguientes dos ejemplos, para $y(x)$

$$y(x) = x + \int_0^x y(t)\operatorname{sen}(x-t)\,dt$$

Vemos que esta ecuación integral se puede escribir como $y(x) = x + y(x) * \operatorname{sen} x$. Tomando la transformada de Laplace $\mathcal{L}$ de ambos lados y aplicando el teorema 23.2, tenemos

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{y\}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} x\} = \frac{1}{s^2} + \mathcal{L}\{y\}\frac{1}{s^2+1}.$$

Resolviendo $\mathcal{L}\{y\}$ tenemos

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{s^2+1}{s^4}.$$

Esto implica que $y(x) = x + \dfrac{x^3}{6}$, que es por cierto la solución, tal como se puede verificar por sustitución directa, como sigue:

$$x + \int_0^x \left(t + \frac{t^3}{6}\right)\operatorname{sen}(x-t)\,dt = x + \frac{x^3}{6} = y(x)$$

23.18. Use las transformadas de Laplace para resolver la ecuación integral del tipo de convolución:

$$y(x) = 2 - \int_0^x y(t)e^{x-t}\,dt$$

Aquí tenemos $y(x) = 2 - y(x)*e^x$. Continuando como en el problema 23.17 encontramos que

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{2s-2}{s^2}$$

que da $y(x) = 2 - 2x$ como la solución buscada.

23.19. Use las transformadas de Laplace para resolver la ecuación integral del tipo de convolución:

$$y(x) = x^3 + \int_0^x 4\,y(t)\,dt$$

Observando que $y(x) = x^3 + 4 * y(x)$ encontramos que $\mathcal{L}\{y\} = \dfrac{6}{s^3(s-4)}$ que da $y(x) = \dfrac{3}{32}(-1 + e^{4x} - 4x - 8x^2)$ como la solución buscada.

PROBLEMAS ADICIONALES

23.20. Encuentre $x * x$.

23.21. Encuentre $2 * x$.

23.22. Encuentre $4x * e^{2x}$.

23.23. Encuentre $e^{4x} * e^{-2x}$.

23.24. Encuentre $x * e^{x}$.

23.25. Encuentre $x * xe^{-x}$.

23.26. Encuentre $3 * \operatorname{sen} 2x$.

23.27. Encuentre $x * \cos x$.

En los problemas del 23.28 al 23.35 use convoluciones para encontrar las transformadas inversas de Laplace de las funciones dadas.

23.28. $\dfrac{1}{(s-1)(s-2)}$

23.29. $\dfrac{1}{(s)(s)}$

23.30. $\dfrac{2}{s(s+1)}$

23.31. $\dfrac{1}{s^2+3s-40}$

23.32. $\dfrac{3}{s^2(s^2+3)}$

23.33. $\dfrac{1}{s(s^2+4)}$ con $F(s)=1/s^2$ y $G(s)=s/(s^2+4)$. Compare con el problema 23.6.

23.34. $\dfrac{9}{s(s^2+9)}$

23.35. $\dfrac{9}{s^2(s^2+9)}$

23.36. Grafique $f(x)=2u(x-2)-u(x-4)$.

23.37. Grafique $f(x)=u(x-2)-2u(x-3)+u(x-4)$.

23.38. Use la función escalón unitario para dar una representación analítica para la función graficada en la figura 23-8.

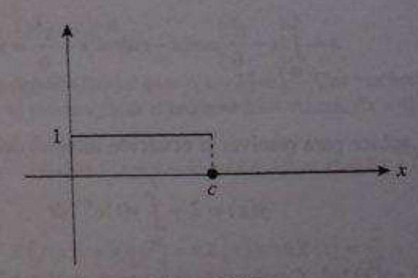


Figura 23-8

23.39. Grafique $f(x)=u(x-\pi)\cos 2(x-\pi)$.

23.40. Grafique $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2u(x-1)$.

En los problemas del 23.41 al 23.48, encuentre $\mathscr{L}\{g(x)\}$ para las funciones dadas.

23.41. $g(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ \operatorname{sen}(x-1) & x\geq 1 \end{cases}$

23.42. $g(x)=\begin{cases} 0 & x<3 \\ x-3 & x\geq 3 \end{cases}$

23.43. $g(x)=\begin{cases} 0 & x<3 \\ x & x\geq 3 \end{cases}$

23.44. $g(x)=\begin{cases} 0 & x<3 \\ x+1 & x\geq 3 \end{cases}$

23.45. $g(x)=\begin{cases} 0 & x<5 \\ e^{x-5} & x\geq 5 \end{cases}$

23.46. $g(x)=\begin{cases} 0 & x<5 \\ e^{x} & x\geq 5 \end{cases}$

23.47. $g(x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ e^{x-5} & x\geq 2 \end{cases}$

23.48. $g(x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ x^3+1 & x\geq 2 \end{cases}$

En los problemas del 23.49 al 23.55 determine las transformadas inversas de Laplace de las funciones dadas.

23.49. $\dfrac{s}{s^2+4}e^{-3s}$

23.50. $\dfrac{1}{s^2+4}e^{-5s}$

23.51. $\dfrac{1}{s^2+4}e^{-\pi s}$

23.52. $\dfrac{2}{s-3}e^{-2s}$

23.53. $\dfrac{8}{s+3}e^{-s}$

23.54. $\dfrac{1}{s^3}e^{-2s}$

23.55. $\dfrac{1}{s^2}e^{-\pi s}$

23. 56. Demuestre que para cualquier constante k, $[k\,f(x)]*g(x)=k[f(x)*g(x)]$.

En los problemas del 23.57 al 23.60 asuma que la transformada de Laplace para $y(x)$ existe. Resuelva para $y(x)$.

23.57. $y(x)=x^3+\int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt$

23.58. $y(x)=e^x+\int_0^x y(t)\,dt$

23.59. $y(x)=1+\int_0^x (t-x)\,y(t)\,dt$

23.60. $y(x)=\int_0^x (t-x)\,y(t)\,dt$

SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES POR MEDIO DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE

24

TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE DERIVADAS

Indique $\mathscr{L}\{y(x)\}$ por $Y(s)$. Entonces bajo amplias condiciones, la transformada de Laplace de la n-ésima derivada ($n = 1, 2, 3, \ldots$) de $y(x)$ es

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^n y}{dx^n}\right\} = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \cdots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0) \tag{24.1}$$

Si las condiciones iniciales sobre $y(x)$ en $x = 0$ están dadas por

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \tag{24.2}$$

entonces (*24.1*) se puede volver a escribir como

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^n y}{dx^n}\right\} = s^n Y(s) - c_0 s^{n-1} - c_1 s^{n-2} - \cdots - c_{n-2}s - c_{n-1} \tag{24.3}$$

Para los casos especiales de $n = 1$ y $n = 2$, la ecuación (*24.3*) se simplifica a

$$\mathscr{L}\{y'(x)\} = sY(s) - c_0 \tag{24.4}$$

$$\mathscr{L}\{y''(x)\} = s^2 Y(s) - c_0 s - c_1 \tag{24.5}$$

SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Las transformadas de Laplace se usan para resolver problemas de valor inicial dados por la ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden con coeficientes constantes

$$b_n \frac{d^n y}{dx^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{dy}{dx} + b_0 y = g(x) \tag{24.6}$$

junto con las condiciones iniciales especificadas en la ecuación (*24.2*). Primero, se toma la transformada de Laplace de ambos lados de la ecuación (*24.6*), para de allí obtener una ecuación algebraica para $Y(s)$. Luego se resuelve para $Y(s)$ *algebraicamente*, y por último se toman las transformadas inversas de Laplace para obtener $y(x) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

A diferencia de los métodos anteriores, donde primero se resuelve la ecuación diferencial y luego se aplican las condiciones iniciales para evaluar las constantes arbitrarias, el método de la transformada de Laplace resuelve todo el problema de valor inicial en un paso. Hay dos excepciones: cuando no se especifican condiciones iniciales y cuando las condiciones iniciales no están en $x = 0$. En estas situaciones, c_0 hasta c_n en las ecuaciones (*24.2*) y (*24.3*) siguen siendo arbitrarias y la solución a la ecuación diferencial (*24.6*) se halla en términos de estas constantes. Éstas se evalúan luego separadamente cuando se proporcionan condiciones subsidiarias adecuadas. (Véanse los problemas del 24.11 al 24.13.)

PROBLEMAS RESUELTOS

24.1. Resuelva $y' - 5y = 0$; $y(0) = 2$.

Tomando la transformada de Laplace de ambos lados de esta ecuación diferencial y usando la propiedad 24.4, obtenemos $\mathscr{L}\{y'\} - 5\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{0\}$. Luego, usando la ecuación (*24.4*) con $c_0 = 2$, encontramos

$$[sY(s) - 2] - 5Y(s) = 0 \quad \text{de lo cual} \quad Y(s) = \frac{2}{s-5}$$

Finalmente, tomando la transformada inversa de Laplace de $Y(s)$, obtenemos

$$y(x) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-5}\right\} = 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} = 2e^{5x}$$

24.2. Resuelva $y' - 5y = e^{5x}$; $y(0) = 0$.

Tomando la transformada inversa de Laplace de ambos lados de esta ecuación diferencial y usando la propiedad 24.4, encontramos que $\mathscr{L}\{y'\} - 5\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{e^{5x}\}$. Luego, usando el apéndice A y la ecuación (*24.4*) con $c_0 = 0$, obtenemos

$$[sY(s) - 0] - 5Y(s) = \frac{1}{s-5} \quad \text{de lo cual} \quad Y(s) = \frac{1}{(s-5)^2}$$

Finalmente, tomando la transformada inversa de $Y(s)$, obtenemos

$$y(x) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-5)^2}\right\} = xe^{5x}$$

(véase apéndice A, entrada 14).

24.3. Resuelva $y' + y = \operatorname{sen} x$; $y(0) = 1$.

Tomando la transformada de Laplace de ambos lados de esta ecuación diferencial obtenemos

$$\mathscr{L}\{y'\} + \mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{\operatorname{sen} x\} \quad \text{o bien} \quad [sY(s) - 1] + Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Resolviendo $Y(s)$ encontramos

$$Y(s)=\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}+\frac{1}{s+1}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace, y usando el resultado del problema 22.17, obtenemos

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$
$$=\left(\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\right)+e^{-x}=\frac{3}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$$

Resuelva $y''+4y=0$; $y(0)=2$, $y'(0)=2$.

Tomando las transformadas de Laplace, tenemos $\mathcal{L}\{y''\}+4\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{0\}$. Luego, usando la ecuación (*24.5*) con $c_0=2$ y $c_1=2$, obtenemos

$$\left[s^2Y(s)-2s-2\right]+4Y(s)=0$$

o bien
$$Y(s)=\frac{2s+2}{s^2+4}=\frac{2s}{s^2+4}+\frac{2}{s^2+4}$$

Finalmente, tomando la transformada inversa de Laplace, obtenemos

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}=2\cos 2x+\operatorname{sen} 2x$$

Resuelva $y''-3y'+4y=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=5$.

Tomando las transformadas de Laplace, tenemos $\mathcal{L}\{y''\}-3\mathcal{L}\{y'\}+4\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{0\}$. Luego, usando *ambas* ecuaciones (*24.4*) y (*24.5*) con $c_0=1$ y $c_1=5$, tenemos

$$\left[s^2Y(s)-s-5\right]-3\left[sY(s)-1\right]+4Y(s)=0$$

o bien
$$Y(s)=\frac{s+2}{s^2-3s+4}$$

Finalmente, tomando la transformada inversa de Laplace y usando el resultado del problema 22.10, obtenemos

$$y(x)=e^{(3/2)x}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x+\sqrt{7}e^{(3/2)x}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{7}}{2}x$$

Resuelva $y''-y'-2y=4x^2$; $y(0)=1$, $y'(0)=4$.

Tomando las transformadas de Laplace, tenemos $\mathcal{L}\{y''\}-\mathcal{L}\{y'\}-2\mathcal{L}\{y\}=4\mathcal{L}\{x^2\}$. Luego, usando *ambas* ecuaciones (*24.4*) y (*24.5*) con $c_0=1$ y $c_1=4$, tenemos

$$\left[s^2Y(s)-s-4\right]-\left[sY(s)-1\right]-2Y(s)=\frac{8}{s^3}$$

o, resolviendo para $Y(s)$,
$$Y(s)=\frac{s+3}{s^2-s-2}+\frac{8}{s^3(s^2-s-2)}$$

Finalmente, tomando la transformada inversa de Laplace y con los resultados de los problemas 22.15 y 22.16, obtenemos

$$y(x)=\left(\frac{5}{3}e^{2x}-\frac{2}{3}e^{-x}\right)+\left(-3+2x-2x^2+\frac{1}{3}e^{2x}+\frac{8}{3}e^{-x}\right)$$
$$=2e^{2x}+2e^{-x}-2x^2+2x-3$$

(Véase el problema 13.1.)

24.7. Resuelva $y'' + 4y' + 8y = \operatorname{sen} x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Tomando las transformadas de Laplace, obtenemos $\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y'\} + 8\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} x\}$. Dado que $c_0 = 1$ y $c_1 = 0$, esto se convierte en

$$\left[s^2Y(s) - s - 0\right] + 4\left[sY(s) - 1\right] + 8Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

De este modo,

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+8} + \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+8)}$$

Finalmente, tomando la transformada inversa de Laplace y usando los resultados de los problemas 22.9 y 22.18, obtenemos

$$\begin{aligned} y(x) &= (e^{-2x}\cos 2x + e^{-2x}\operatorname{sen} 2x) \\ &\quad + \left(-\frac{4}{65}\cos x + \frac{7}{65}\operatorname{sen} x + \frac{4}{65}e^{-2x}\cos 2x + \frac{1}{130}e^{-2x}\operatorname{sen} 2x\right) \\ &= e^{-2x}\left(\frac{69}{65}\cos 2x + \frac{131}{130}\operatorname{sen} 2x\right) + \frac{7}{65}\operatorname{sen} x - \frac{4}{65}\cos x \end{aligned}$$

(Véase el problema 13.3.)

24.8. Resuelva $y'' - 2y' + y = f(x)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

En esta ecuación $f(x)$ no está especificada. Tomando las transformadas de Laplace y designando $\mathcal{L}\{f(x)\}$ por $F(s)$, obtenemos

$$\left[s^2Y(s) - (0)s - 0\right] - 2\left[sY(s) - 0\right] + Y(s) = F(s) \quad \text{o bien} \quad Y(s) = \frac{F(s)}{(s-1)^2}$$

Del apéndice A, entrada 14, $\mathcal{L}^{-1}\left\{1/(s-1)^2\right\} = xe^x$. De este modo, tomando la transformada inversa de $Y(s)$ y usando convoluciones, concluimos que

$$y(x) = xe^x * f(x) = \int_0^x te^t f(x-t)\,dt$$

24.9. Resuelva $y'' + y = f(x)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ si $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases}$

Obsérvese que $f(x) = 2u(x-1)$. Tomando las transformadas de Laplace obtenemos

$$\left[s^2Y(s) - (0)s - 0\right] + Y(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} = 2\mathcal{L}\{u(x-1)\} = 2e^{-s}/s$$

o bien

$$Y(s) = e^{-s}\frac{2}{s(s^2+1)}$$

Dado que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s(s^2+1)}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = 2 - 2\cos x$$

del teorema 23.4, se desprende que

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-x}\frac{2}{s(s^2+1)}\right\} = [2 - 2\cos(x-1)]u(x-1)$$

24.10. Resuelva $y''' + y' = e^x$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Tomando las transformadas de Laplace, obtenemos $\mathcal{L}\{y'''\} + \mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{e^x\}$. Luego, usando la ecuación (*24.3*) con $n = 3$ y la ecuación (*24.4*), tenemos

$$\left[s^3Y(s) - (0)s^2 - (0)s - 0\right] + \left[sY(s) - 0\right] = \frac{1}{s-1} \quad \text{o bien} \quad Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^3+s)}$$

Finalmente, usando el método de fracciones parciales y tomando la transformada inversa, obtenemos

$$y(x)=\mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s}+\frac{\frac{1}{2}}{s-1}+\frac{\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}{s^2+1}\right\}=-1+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$$

24.11. Resuelva $y'-5y=0$.

No se especifican condiciones iniciales. Tomando la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación diferencial, obtenemos

$$\mathscr{L}\{y'\}-5\mathscr{L}\{y\}=\mathscr{L}\{0\}$$

Luego, usando la ecuación (*24.4*) con $c_0=y(0)$ mantenida como arbitraria, tenemos

$$[sY(s)-c_0]-5Y(s)=0 \quad \text{o bien} \quad Y(s)=\frac{c_0}{s-5}$$

Tomando la transformada inversa de Laplace encontramos que

$$y(x)=\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}=c_0\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\}=c_0e^{5x}$$

24.12. Resuelva $y''-3y'+2y=e^{-x}$.

No existen condiciones iniciales. Al tomar transformadas de Laplace, tenemos $\mathscr{L}\{y''\}-3\mathscr{L}\{y'\}+2\mathscr{L}\{y\}=\mathscr{L}\{e^{-x}\}$, o bien

$$[s^2Y(s)-sc_0-c_1]-3[sY(s)-c_0]+2[Y(s)]=1/(s+1)$$

Aquí c_0 y c_1 deben seguir siendo arbitrarias, dado que representan $y(0)$ y $y'(0)$, respectivamente, las cuales son desconocidas. De este modo,

$$Y(s)=c_0\frac{s-3}{s^2-3s+2}+c_1\frac{1}{s^2-3s+2}+\frac{1}{(s+1)(s^2-3s+2)}$$

Usando el método de fracciones parciales y observando que $s^2-3s+2=(s-1)(s-2)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
y(x)&=c_0\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}+\frac{-1}{s-2}\right\}+c_1\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s-1}+\frac{1}{s-2}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1/6}{s+1}+\frac{-1/2}{s-1}+\frac{1/3}{s-2}\right\}\\
&=c_0(2e^x-e^{2x})+c_1(-e^x+e^{2x})+\left(\frac{1}{6}e^{-x}-\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{3}e^{2x}\right)\\
&=\left(2c_0-c_1-\frac{1}{2}\right)e^x+\left(-c_0+c_1+\frac{1}{3}\right)e^{2x}+\frac{1}{6}e^{-x}\\
&=d_0e^x+d_1e^{2x}+\frac{1}{6}e^{-x}
\end{aligned}$$

donde $d_0=2c_0-c_1-\frac{1}{2}$ y $d_1=-c_0+c_1+\frac{1}{3}$.

24.13. Resuelva $y''-3y'+2y=e^{-x}$; $y(1)=0$, $y'(1)=0$.

Las condiciones iniciales están dadas en $x=1$, no en $x=0$. Usando los resultados del problema 24.12 tenemos la solución para la ecuación diferencial

$$y=d_0e^x+d_1e^{2x}+\frac{1}{6}e^{-x}$$

Aplicando las condiciones iniciales a esta última ecuación, encontramos que $d_0=-\frac{1}{2}e^{-2}$ y $d_1=\frac{1}{3}e^{-3}$; de aquí,

$$y(x)=-\frac{1}{2}e^{x-2}+\frac{1}{3}e^{2x-3}+\frac{1}{6}e^{-x}$$

24.14. Resuelva $\dfrac{dN}{dt} = 0.05N;\ N(0) = 20\,000.$

Ésta es una ecuación diferencial para la función desconocida $N(t)$ en la variable independiente t. Establecemos $N(s) = \mathcal{L}\{N(t)\}$. Tomando las transformadas de Laplace de la ecuación diferencial dada y usando (*24.4*) con N reemplazando a y, tenemos

$$[sN(s) - N(0)] = 0.05N(s)$$
$$[sN(s) - 20\,000] = 0.05N(s)$$

o, resolviendo para $N(s)$,

$$N(s) = \frac{20\,000}{s - 0.05}$$

Luego, del apéndice A, entrada 7 con $a = 0.05$ y t reemplazando a x, obtenemos

$$N(t) = \mathcal{L}^{-1}\{N(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{20\,000}{s - 0.05}\right\} = 20\,000\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - 0.05}\right\} = 20\,000e^{0.05t}$$

Compare con (*2*) del problema 7.1.

24.15. Resuelva $\dfrac{dI}{dt} + 50I = 5;\ I(0) = 0.$

Ésta es una ecuación diferencial para la función desconocida $I(t)$ en la variable independiente t. Establecemos $I(s) = \mathcal{L}\{I(t)\}$. Tomando las transformadas de Laplace de la ecuación diferencial dada y usando la ecuación (*24.4*) con I reemplazando a y, tenemos

$$[sI(s) - I(0)] + 50I(s) = 5\left(\frac{1}{s}\right)$$
$$[sI(s) - 0] + 50I(s) = 5\left(\frac{1}{s}\right)$$

o, resolviendo $I(s)$,

$$I(s) = \frac{5}{s(s + 50)}$$

Luego, usando el método de fracciones parciales y el apéndice A, con t reemplazando a x, obtenemos

$$I(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s(s + 50)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/10}{s} - \frac{1/10}{s + 50}\right\}$$
$$= \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 50}\right\} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-50t}$$

Compare con (*1*) del problema 7.19.

24.16 Resuelva $\ddot{x} + 16x = 2\,\text{sen}\,4t;\ x(0) = -\frac{1}{2},\ \dot{x}(0) = 0.$

Ésta es una ecuación diferencial para la función desconocida $x(t)$ en la variable independiente t. Establecemos $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. Tomando las transformadas de Laplace de la ecuación diferencial dada y usando la ecuación (*24.5*) con x reemplazando a y, tenemos

$$[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + 16X(s) = 2\left(\frac{4}{s^2 + 16}\right)$$
$$\left[s^2X(s) - s\left(-\frac{1}{2}\right) - 0\right] + 16X(s) = \frac{8}{s^2 + 16}$$
$$(s^2 + 16)X(s) = \frac{8}{s^2 + 16} - \frac{s}{2}$$

o bien
$$X(s)=\frac{8}{(s^2+16)^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+16}\right)$$

Luego, usando el apéndice A, entradas 17 y 9 con $a = 4$ y t reemplazando a x, obtenemos

$$\begin{aligned}x(t)&=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{8}{(s^2+16)^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+16}\right)\right\}\\&=\frac{1}{16}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{128}{(s^2+16)^2}\right\}-\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\}\\&=\frac{1}{16}(\operatorname{sen}4t-4t\cos 4t)-\frac{1}{2}\cos 4t\end{aligned}$$

Compare con los resultados del problema 14.10.

PROBLEMAS ADICIONALES

Use las transformadas de Laplace para resolver los siguientes problemas.

24.17. $y'+2y=0;\ y(0)=1$

24.18. $y'+2y=2;\ y(0)=1$

24.19. $y'+2y=e^x;\ y(0)=1$

24.20. $y'+2y=0;\ y(1)=1$

24.21. $y'+5y=0;\ y(1)=0$

24.22. $y'-5y=e^{5x};\ y(0)=2$

24.23. $y'+y=xe^{-x};\ y(0)=-2$

24.24. $y'+y=\operatorname{sen}x$

24.25. $y'+20y=6\operatorname{sen}2x;\ y(0)=6$

24.26. $y''-y=0;\ y(0)=1,\ y'(0)=1$

24.27. $y''-y=\operatorname{sen}x;\ y(0)=0,\ y'(0)=1$

24.28. $y''-y=e^x;\ y(0)=1,\ y'(0)=0$

24.29. $y''+2y'-3y=\operatorname{sen}2x;\ y(0)=0,\ y'(0)=0$

24.30. $y''+y=\operatorname{sen}x;\ y(0)=0,\ y'(0)=2$

24.31. $y''+y'+y=0;\ y(0)=4,\ y'(0)=-3$

24.32. $y''+2y'+5y=3e^{-2x};\ y(0)=1,\ y'(0)=1$

24.33. $y''+5y'-3y=u(x-4);\ y(0)=0,\ y'(0)=0$

24.34. $y''+y=0;\ y(\pi)=0,\ y'(\pi)=-1$

24.35. $y'''-y=5;\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0$

24.36. $y^{(4)}-y=0;\ y(0)=1,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0,\ y'''(0)=0$

24.37. $\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}-y=x^2e^x;\ y(0)=1,\ y'(0)=2,\ y''(0)=3$

24.38. $\frac{dN}{dt}-0.085N=0;\ N(0)=5\,000$

24.39. $\frac{dT}{dt}=3T;\ T(0)=100$

24.40. $\frac{dT}{dt}+3T=90;\ T(0)=100$

24.41. $\frac{dv}{dt}+2v=32$

24.42. $\frac{dq}{dt}+q=4\cos 2t;\ q(0)=0$

24.43. $\ddot{x}+9\dot{x}+14x=0;\ x(0)=0,\ \dot{x}(0)=-1$

24.44. $\ddot{x}+4\dot{x}+4x=0;\ x(0)=2,\ \dot{x}(0)=-2$

24.45. $\frac{d^2x}{dt^2}+8\frac{dx}{dt}+25x=0;\ x(\pi)=0,\ \dot{x}(\pi)=6$

24.46. $\frac{d^2q}{dt^2}+9\frac{dq}{dt}+14q=\frac{1}{2}\operatorname{sen}t;\ q(0)=0,\ \dot{q}(0)=1$

SOLUCIONES DE SISTEMAS LINEALES POR MEDIO DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE 25

EL MÉTODO

Las transformadas de Laplace son útiles para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales; es decir, conjuntos de dos o más ecuaciones diferenciales con un número igual de funciones desconocidas. Si todos los coeficientes son constantes, entonces el método de solución es la generalización directa del que se dio en el capítulo 24. Las transformadas de Laplace se toman de cada ecuación diferencial en el sistema; las transformadas de las funciones desconocidas se determinan algebraicamente a partir del conjunto resultante de ecuaciones simultáneas; las transformadas inversas para las funciones desconocidas se calculan con la ayuda del apéndice A.

PROBLEMAS RESUELTOS

25.1. Resuelva el siguiente sistema para las funciones desconocidas $u(x)$ y $v(x)$:

$$u' + u - v = 0$$
$$v' - u + v = 2;$$
$$u(0) = 1, \quad v(0) = 2$$

Indique $\mathcal{L}\{u(x)\}$ y $\mathcal{L}\{v(x)\}$ por $U(s)$ y $V(s)$, respectivamente. Tomando las transformadas de Laplace en ambas ecuaciones diferenciales, obtenemos

$$[sU(s) - 1] + U(s) - V(s) = 0$$
$$[sV(s) - 2] - U(s) + V(s) = \frac{2}{s}$$
$$(s+1)U(s) - V(s) = 1$$

o bien
$$-U(s) + (s+1)V(s) = \frac{2(s+1)}{s}$$

La solución de este último conjunto de ecuaciones lineales simultáneas es

$$U(s)=\frac{s+1}{s^2} \quad V(s)\frac{2s+1}{s^2}$$

Tomando las transformadas inversas, obtenemos

$$u(x)=\mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right\}=1+x$$
$$v(x)=\mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s^2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}\right\}=2+x$$

25.2. Resuelva el sistema

$$y'+z=x$$
$$z'+4y=0;$$
$$y(0)=1, \quad z(0)=-1$$

Indique $\mathcal{L}\{y(x)\}$ y $\mathcal{L}\{z(x)\}$ por $Y(s)$ y $Z(s)$, respectivamente. Luego, tomando las transformadas de Laplace en ambas ecuaciones diferenciales, obtenemos

$$[sY(s)-1]+Z(s)=\frac{1}{s^2} \qquad sY(s)+Z(s)=\frac{s^2+1}{s^2}$$
$$[sZ(s)+1]+4Y(s)=0 \qquad \text{o bien} \qquad 4Y(s)+sZ(s)=-1$$

La solución para este último conjunto de ecuaciones lineales simultáneas es

$$Y(s)=\frac{s^2+s+1}{s(s^2-4)} \quad Z(s)=-\frac{s^3+4s^2+4}{s^2(s^2-4)}$$

Finalmente, usando el método de fracciones parciales y tomando transformadas inversas, obtenemos

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1/4}{s}+\frac{7/8}{s-2}+\frac{3/8}{s+2}\right\}$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{7}{8}e^{2x}+\frac{3}{8}e^{-2x}$$
$$z(x)=\mathcal{L}^{-1}\{Z(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{7/4}{s-2}+\frac{3/4}{s+2}\right\}$$
$$=x-\frac{7}{4}e^{2x}+\frac{3}{4}e^{-2x}$$

25.3. Resuelva el sistema

$$w'+y=\operatorname{sen} x$$
$$y'-z=e^x$$
$$z'+w+y=1;$$
$$w(0)=0, \quad y(0)=1, \quad z(0)=1$$

Indique $\mathcal{L}\{w(x)\}$, $\mathcal{L}\{y(x)\}$ y $\mathcal{L}\{z(x)\}$ por $W(s)$, $Y(s)$ y $Z(s)$, respectivamente. Luego, tomando las transformadas de Laplace de las tres ecuaciones diferenciales, obtenemos

$$[sW(s)-0]+Y(s)=\frac{1}{s^2+1} \qquad sW(s)+Y(s)=\frac{1}{s^2+1}$$
$$[sY(s)-1]-Z(s)=\frac{1}{s-1} \quad \text{o bien} \quad sY(s)-Z(s)=\frac{s}{s-1}$$
$$[sZ(s)-1]+W(s)+Y(s)=\frac{1}{s} \qquad W(s)+Y(s)+sZ(s)=\frac{s+1}{s}$$

La solución para este último sistema de ecuaciones lineales simultáneas es

$$W(s)=\frac{-1}{s(s-1)} \quad Y(s)=\frac{s^2+s}{(s-1)(s^2+1)} \quad Z(x)=\frac{s}{s^2+1}$$

Usando el método de fracciones parciales y luego tomando transformadas inversas, obtenemos

$$w(x)=\mathscr{L}^{-1}\{W(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}\right\}=1-e^x$$
$$y(x)=\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s^2+1}\right\}=e^x+\operatorname{sen}x$$
$$z(x)=\mathscr{L}^{-1}\{Z(s)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}=\cos x$$

25.4. Resuelva el sistema

$$y''+z+y=0$$
$$z'+y'=0;$$
$$y(0)=0, \quad y'(0)=0, \quad z(0)=1$$

Tomando las transformadas de Laplace de ambas ecuaciones diferenciales, obtenemos

$$[s^2Y(s)-(0)s-(0)]+Z(s)+Y(s)=0 \qquad (s^2+1)Y(s)+Z(s)=0$$
$$[sZ(s)-1]+[sY(s)-0]=0 \quad \text{o bien} \quad Y(s)+Z(s)=\frac{1}{s}$$

Resolviendo este último sistema para $Y(s)$ y $Z(s)$, encontramos que

$$Y(s)=-\frac{1}{s^3} \quad Z(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^3}$$

De de este modo, tomando las transformadas inversas, concluimos que

$$y(x)=-\frac{1}{2}x^2 \quad z(x)=1+\frac{1}{2}x^2$$

25.5. Resuelva el sistema

$$z''+y'=\cos x$$
$$y''-z=\operatorname{sen}x;$$
$$z(0)=-1, \quad z'(0)=-1, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0$$

Tomando las transformadas de Laplace en ambas ecuaciones diferenciales, obtenemos

$$[s^2Z(s)+s+1]+[sY(s)-1]=\frac{s}{s^2+1} \qquad s^2Z(s)+sY(s)=-\frac{s^3}{s^2+1}$$
$$[s^2Y(s)-s-0]-Z(s)=\frac{1}{s^2+1} \quad \text{o bien} \quad -Z(s)+s^2Y(s)=\frac{s^3+s+1}{s^2+1}$$

Resolviendo este último sistema para $Z(s)$ y $Y(s)$ encontramos que

$$Z(s) = -\frac{s+1}{s^2+1} \quad Y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

Finalmente, tomando las transformadas inversas, obtenemos

$$z(x) = -\cos x - \operatorname{sen} x \quad y(x) = \cos x$$

25.6. Resuelva el sistema

$$w'' - y + 2z = 3e^{-x}$$
$$-2w' + 2y' + z = 0$$
$$2w' - 2y + z' + 2z'' = 0;$$
$$w(0) = 1, \quad w'(0) = 1, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 2, \quad z'(0) = -2$$

Tomando las transformadas de Laplace de las tres ecuaciones diferenciales obtenemos

$$[s^2W(s) - s - 1] - Y(s) + 2Z(s) = \frac{3}{s+1}$$
$$-2[sW(s) - 1] + 2[sY(s) - 2] + Z(s) = 0$$
$$2[sW(s) - 1] - 2Y(s) + [sZ(s) - 2] + 2[s^2Z(s) - 2s + 2] = 0$$

o bien

$$s^2W(s) - Y(s) + 2Z(s) = \frac{s^2+2s+4}{s+1}$$
$$-2sW(s) + 2sY(s) + Z(s) = 2$$
$$2sW(s) - 2Y(s) + (2s^2+s)Z(s) = 4s$$

La solución para este sistema es

$$W(s) = \frac{1}{s-1} \quad Y(s) = \frac{2s}{(s-1)(s+1)} \quad Z(s) = \frac{2}{s+1}$$

De aquí,

$$w(x) = e^x \quad y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right\} = e^x + e^{-x} \quad z(x) = 2e^{-x}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

Use transformadas de Laplace para resolver los siguientes sistemas. Todas las funciones desconocidas son funciones de x.

25.7. $u' - 2v = 3$
$v' + v - u = -x^2;$
$u(0) = 0, \; v(0) = -1$

25.8. $u' + 4u - 6v = 0$
$v' + 3u - 5v = 0;$
$u(0) = 3, \; v(0) = 2$

25.9. $u' + 5u - 12v = 0$
$v' + 2u - 5v = 0;$
$u(0) = 8, \; v(0) = 3$

25.10. $y' + z = x$
$z' - y = 0;$
$y(0) = 1, \; z(0) = 0$

25.11. $y' - z = 0$
$y - z' = 0;$
$y(0) = 1,\ z(0) = 1$

25.12. $w' - w - 2y = 1$
$y' - 4w - 3y = -1;$
$w(0) = 1,\ y(0) = 2$

25.13. $w' - y = 0$
$w + y' + z = 1$
$w - y + z' = 2 \operatorname{sen} x;$
$w(0) = 1,\ y(0) = 1,\ z(0) = 1$

25.14. $u'' + v = 0$
$u'' - v' = 2e^x;$
$u(0) = 0,\ u'(0) = -2,\ v(0) = 0,\ v'(0) = 2$

25.15. $u'' - 2v = 2$
$u + v' = 5e^{2x} + 1;$
$u(0) = 2,\ u'(0) = 2,\ v(0) = 1$

25.16. $w'' - 2z = 0$
$w' + y' - z = 2x$
$w' - 2y + z'' = 0;$
$w(0) = 0,\ w'(0) = 0,\ y(0) = 0,$
$z(0) = 1,\ z'(0) = 0$

25.17. $w'' + y + z = -1$
$w + y'' - z = 0$
$-w' - y' + z'' = 0;$
$w(0) = 0,\ w'(0) = 1,\ y(0) = 0,$
$y'(0) = 0,\ z(0) = -1,\ z'(0) = 1$

SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES POR MEDIO DE MÉTODOS DE MATRICES

26

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE VALOR INICIAL

Por medio del procedimiento del capítulo 17, cualquier problema de valor inicial en el cual todas las ecuaciones diferenciales sean lineales *con coeficientes constantes*, se puede reducir al sistema de matrices

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c} \tag{26.1}$$

donde **A** es una matriz de *constantes*. La solución para la ecuación (*26.1*) es

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{c} + e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{f}(s)\,ds \tag{26.2}$$

o, de manera equivalente,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{c} + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s)\,ds \tag{26.3}$$

En particular, si el problema de valor inicial es *homogéneo* [es decir, $\mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$], entonces ambas ecuaciones (*26.2*) y (*26.3*) se reducen a

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{c} \tag{26.4}$$

En las soluciones anteriores, las matrices $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$, $e^{-\mathbf{A}s}$ y $e^{\mathbf{A}(t-s)}$ se calculan fácilmente a partir de $e^{\mathbf{A}t}$ reemplazando la variable t por $t - t_0$ y $t - s$, respectivamente. Generalmente, $\mathbf{x}(t)$ se obtiene más rápido a partir de (*26.3*) que

de (*26.2*), dado que la ecuación anterior implica una multiplicación de matrices menos. Sin embargo, las integrales que surgen de (*26.3*) son generalmente más difíciles de evaluar que las de (*26.2*).

SOLUCIÓN SIN CONDICIONES INICIALES

Si no hay condiciones iniciales prescritas, la solución de $\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{f}(t)$ es

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k}+e^{\mathbf{A}t}\int e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t)\,dt \tag{26.5}$$

o, cuando $\mathbf{f}(t)=\mathbf{0}$,

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k} \tag{26.6}$$

donde **k** es un vector constante arbitrario. Todas las constantes de integración se pueden pasar por alto al calcular la integral en la ecuación (*26.5*), dado que ellas ya están incluidas en **k**.

PROBLEMAS RESUELTOS

26.1. Resuelva $\ddot{x}+2\dot{x}-8x=0$; $x(1)=2$, $\dot{x}(1)=3$.

Del problema 17.2, este problema de valor inicial es equivalente a la ecuación (*26.1*) con

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1\\8&-2\end{bmatrix}\quad \mathbf{f}(t)=\mathbf{0}\quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\quad t_0=1$$

La solución para este sistema está dada por la ecuación (*26.4*). Para esta A, $e^{\mathbf{A}t}$ está dada en el problema 16.2; de aquí,

$$e^{\mathbf{A}(t-t_0)}=e^{\mathbf{A}(t-1)}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4e^{2(t-1)}+2e^{-4(t-1)} & e^{2(t-1)}-e^{-4(t-1)}\\ 8e^{2(t-1)}-8e^{-4(t-1)} & 2e^{2(t-1)}+4e^{-4(t-1)}\end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t)&=e^{\mathbf{A}(t-1)}\mathbf{c}\\ &=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4e^{2(t-1)}+2e^{-4(t-1)} & e^{2(t-1)}-e^{-4(t-1)}\\ 8e^{2(t-1)}-8e^{-4(t-1)} & 2e^{2(t-1)}+4e^{-4(t-1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\\ &=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2(4e^{2(t-1)}+2e^{-4(t-1)})+3(e^{2(t-1)}-e^{-4(t-1)})\\ 2(8e^{2(t-1)}-8e^{-4(t-1)})+3(2e^{2(t-1)}+4e^{-4(t-1)})\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\frac{11}{6}e^{2(t-1)}+\frac{1}{6}e^{-4(t-1)}\\ \frac{22}{6}e^{2(t-1)}-\frac{4}{6}e^{-4(t-1)}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

y la solución al problema de valor inicial original es

$$x(t)=x_1(t)=\frac{11}{6}e^{2(t-1)}+\frac{1}{6}e^{-4(t-1)}$$

26.2. Resuelva $\ddot{x}+2\dot{x}-8x=e^t$; $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=-4$.

Del problema 17.1, este problema de valor inicial es equivalente a la ecuación (*26.1*) con

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\8 & -2\end{bmatrix}\quad \mathbf{f}(t)=\begin{bmatrix}0\\e^t\end{bmatrix}\quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}$$

y $t_0=0$. La solución está dada por la ecuación (*26.2*) o la (*26.3*). Aquí, usamos (*26.2*); la solución usando (*26.3*) se encuentra en el problema 26.3. Para esta **A**, $e^{\mathbf{A}t}$ ya ha sido calculada en el problema 16.2. Por lo tanto,

$$e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{c}=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4e^{2t}+2e^{-4t} & e^{2t}-e^{-4t}\\8e^{2t}-8e^{-4t} & 2e^{2t}+4e^{-4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-4t}\\-4e^{-4t}\end{bmatrix}$$

$$e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{f}(s)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4e^{-2s}+2e^{4s} & e^{-2s}-e^{4s}\\8e^{-2s}-8e^{4s} & 2e^{-2s}+4e^{4s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\e^s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}e^{-s}-\frac{1}{6}e^{5s}\\\frac{2}{6}e^{-s}+\frac{4}{6}e^{5s}\end{bmatrix}$$

$$\int_{t_0}^{t}e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{f}(s)\,ds=\begin{bmatrix}\int_0^t\left(\frac{1}{6}e^{-s}-\frac{1}{6}e^{5s}\right)ds\\\int_0^t\left(\frac{1}{3}e^{-s}+\frac{2}{3}e^{5s}\right)ds\end{bmatrix}=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}-5e^{-t}-e^{5t}+6\\-10e^{-t}+4e^{5t}+6\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t}e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{f}(s)\,ds&=\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{30}\right)\begin{bmatrix}4e^{2t}+2e^{-4t} & e^{2t}-e^{-4t}\\8e^{2t}-8e^{-4t} & 2e^{2t}+4e^{-4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5e^{-t}-e^{5t}+6\\-10e^{-t}+4e^{5t}+6\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{180}\begin{bmatrix}(4e^{2t}+2e^{-4t})(-5e^{-t}-e^{5t}+6)+(e^{2t}-e^{-4t})(-10e^{-t}+4e^{5t}+6)\\(8e^{2t}-8e^{-4t})(-5e^{-t}-e^{5t}+6)+(2e^{2t}+4e^{-4t})(-10e^{-t}+4e^{5t}+6)\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}-6e^{t}+5e^{2t}+e^{-4t}\\-6e^{t}+10e^{2t}-4e^{-4t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t)&=e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{c}+e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t}e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{f}(s)\,ds\\&=\begin{bmatrix}e^{-4t}\\-4e^{-4t}\end{bmatrix}+\frac{1}{30}\begin{bmatrix}-6e^{t}+5e^{2t}+e^{-4t}\\-6e^{t}+10e^{2t}-4e^{-4t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{31}{30}e^{-4t}+\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{t}\\-\frac{62}{15}e^{-4t}+\frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

y

$$x(t)=x_1(t)=\frac{31}{30}e^{-4t}+\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{t}$$

26.3. Use la ecuación (*26.3*) para resolver el problema de valor inicial del problema 26.2.

El vector $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{c}$ sigue siendo $\begin{bmatrix}e^{-4t}\\-4e^{-4t}\end{bmatrix}$. Además,

$$\begin{aligned}e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s)&=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4e^{2(t-s)}+2e^{-4(t-s)} & e^{2(t-s)}-e^{-4(t-s)}\\8e^{2(t-s)}-8e^{-4(t-s)} & 2e^{2(t-s)}+4e^{-4(t-s)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\e^s\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}e^{(2t-s)}-e^{(-4t+5s)}\\2e^{(2t-s)}+4e^{(-4t+5s)}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s)\,ds = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \int_0^t [e^{(2t-s)} - e^{(-4t+5s)}]\,ds \\ \int_0^t [2e^{(2t-s)} + 4e^{(-4t+5s)}]\,ds \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \left[-e^{(2t-s)} - \frac{1}{5}e^{(-4t+5s)}\right]_{s=0}^{s=t} \\ \left[-2e^{(2t-s)} + \frac{4}{5}e^{(-4t+5s)}\right]_{s=0}^{s=t} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -\frac{6}{5}e^{t} + e^{2t} + \frac{1}{5}e^{-4t} \\ -\frac{6}{5}e^{t} + 2e^{2t} - \frac{4}{5}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

De este modo,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{c} + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s)\,ds$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-4t} \\ -4e^{-4t} \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -\frac{6}{5}e^{t} + e^{2t} + \frac{1}{5}e^{-4t} \\ -\frac{6}{5}e^{t} + 2e^{2t} - \frac{4}{5}e^{-4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{31}{30}e^{-4t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{t} \\ -\frac{62}{15}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{t} \end{bmatrix}$$

tal como antes.

26.4. Resuelva $\ddot{x} + x = 3$; $x(\pi) = 1$, $\dot{x}(\pi) = 2$.

Del problema 17.3, este problema del valor inicial es equivalente a la ecuación (*26.1*) con

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y $t_0 = \pi$. Entonces, usando la ecuación (*26.3*) y los resultados del problema 16.3, encontramos que

$$e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \cos(t-\pi) & \operatorname{sen}(t-\pi) \\ -\operatorname{sen}(t-\pi) & \cos(t-\pi) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t-\pi) + 2\operatorname{sen}(t-\pi) \\ -\operatorname{sen}(t-\pi) + 2\cos(t-\pi) \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s) = \begin{bmatrix} \cos(t-s) & \operatorname{sen}(t-s) \\ -\operatorname{sen}(t-s) & \cos(t-s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\operatorname{sen}(t-s) \\ 3\cos(t-s) \end{bmatrix}$$

$$\int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s)\,ds = \begin{bmatrix} \int_{\pi}^{t} 3\operatorname{sen}(t-s)\,ds \\ \int_{\pi}^{t} 3\cos(t-s)\,ds \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\cos(t-s)\Big|_{s=\pi}^{s=t} \\ -3\operatorname{sen}(t-s)\Big|_{s=\pi}^{s=t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 3\cos(t-\pi) \\ 3\operatorname{sen}(t-\pi) \end{bmatrix}$$

De este modo,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{c} + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s)\,ds$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(t-\pi) + 2\operatorname{sen}(t-\pi) \\ -\operatorname{sen}(t-\pi) + 2\cos(t-\pi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 - 3\cos(t-\pi) \\ 3\operatorname{sen}(t-\pi) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 - 2\cos(t-\pi) + 2\operatorname{sen}(t-\pi) \\ 2\cos(t-\pi) + 2\operatorname{sen}(t-\pi) \end{bmatrix}$$

y $x(t) = x_1(t) = 3 - 2\cos(t-\pi) + 2\operatorname{sen}(t-\pi)$.

Observando que $\cos(t-\pi) = -\cos t$ y $\operatorname{sen}(t-\pi) = -\operatorname{sen} t$ también obtenemos

$$x(t) = 3 + 2\cos t - 2\operatorname{sen} t$$

26.5. Resuelva la ecuación diferencial $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = t$.

Esta ecuación diferencial es equivalente a la ecuación diferencial de matriz estándar con

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}$$

(Véase el problema 17.4.) Del problema 16.4 se desprende que

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} (1-3t)e^{3t} & te^{3t} \\ -9te^{3t} & (1+3t)e^{3t} \end{bmatrix} \quad \text{de modo que} \quad e^{-\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} (1+3t)e^{-3t} & -te^{-3t} \\ 9te^{-3t} & (1-3t)e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Luego, usando la ecuación (*26.5*), obtenemos

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} (1-3t)e^{3t} & te^{3t} \\ -9te^{3t} & (1+3t)e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [(-3k_1+k_2)t+k_1]e^{3t} \\ [(-9k_1+3k_2)t+k_2]e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} (1+3t)e^{-3t} & -te^{-3t} \\ 9te^{-3t} & (1-3t)e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t^2e^{-3t} \\ (t-3t^2)e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\int e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t)\,dt = \begin{bmatrix} -\int t^2e^{-3t}dt \\ \int (t-3t^2)e^{-3t}dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t + \frac{2}{27}\right)e^{-3t} \\ \left(t^2 + \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}\right)e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t}\int e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t)\,dt = \begin{bmatrix} (1-3t)\,e^{3t} & te^{3t} \\ -9t\,e^{3t} & (1+3t)e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t + \frac{2}{27}\right)e^{-3t} \\ \left(t^2 + \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}\right)e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9}t + \frac{2}{27} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k} + e^{\mathbf{A}t}\int e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t)\,dt$$

$$= \begin{bmatrix} [(-3k_1+k_2)t+k_1]e^{3t} + \frac{1}{9}t + \frac{2}{27} \\ [(-9k_1+3k_2)t+k_2]e^{3t} + \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

De este modo,

$$x(t) = x_1(t) = [(-3k_1+k_2)t+k_1]e^{3t} + \frac{1}{9}t + \frac{2}{27} = (k_1+k_3t)e^{3t} + \frac{1}{9}t + \frac{2}{27}$$

donde $k_3 = -3k_1 + k_2$.

26.6. Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{d^3x}{dt^3} - 2\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} = 0$.

Usando los resultados del problema 17.5, reducimos esta ecuación diferencial homogénea a la ecuación matricial $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ con

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Del problema 16.6, tenemos que

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix}1 & -te^t+2e^t-2 & te^t-e^t+1\\ 0 & -te^t+e^t & te^t\\ 0 & -te^t & te^t+e^t\end{bmatrix}$$

Entonces, usando la ecuación (*26.6*), calculamos

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k}=\begin{bmatrix}1 & -te^t+2e^t-2 & te^t-e^t+1\\ 0 & -te^t+e^t & te^t\\ 0 & -te^t & te^t+e^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}k_1+k_2(-te^t+2e^t-2)+k_3(te^t-e^t+1)\\ k_2(-te^t+e^t)+k_3(te^t)\\ k_2(-te^t)+k_3(te^t+e^t)\end{bmatrix}$$

De este modo,

$$\begin{aligned}x(t)=x_1(t)&=k_1+k_2(-te^t+2e^t-2)+k_3(te^t-e^t+1)\\ &=(k_1-2k_2+k_3)+(2k_2-k_3)e^t+(-k_2+k_3)te^t\\ &=k_4+k_5e^t+k_6te^t\end{aligned}$$

donde $k_4=k_1-2k_2+k_3$, $k_5=2k_2-k_3$ y $k_6=-k_2+k_3$.

26.7. Resuelva el sistema

$$\begin{aligned}&\ddot{x}=-2\dot{x}-5y+3\\ &\dot{y}=\dot{x}+2y;\\ &x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=0,\quad y(0)=1\end{aligned}$$

Este problema de valor inicial es equivalente a la ecuación (*26.1*) con

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ y_1(t)\end{bmatrix}\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -5\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\quad \mathbf{f}(t)=\begin{bmatrix}0\\ 3\\ 0\end{bmatrix}\quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

y $t_0=0$. (Véase el problema 17.8.) Para esta **A**, del problema 16.7, tenemos que

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix}1 & -2+2\cos t+\operatorname{sen} t & -5+5\cos t\\ 0 & \cos t-2\operatorname{sen} t & -5\operatorname{sen} t\\ 0 & \operatorname{sen} t & \cos t+2\operatorname{sen} t\end{bmatrix}$$

Luego, usando la ecuación (*26.3*), calculamos

$$e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{c}=\begin{bmatrix}1 & -2+2\cos t+\operatorname{sen} t & -5+5\cos t\\ 0 & \cos t-2\operatorname{sen} t & -5\operatorname{sen} t\\ 0 & \operatorname{sen} t & \cos t+2\operatorname{sen} t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5+5\cos t\\ -5\operatorname{sen} t\\ \cos t+2\operatorname{sen} t\end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s)=\begin{bmatrix}1 & -2+2\cos(t-s)+\operatorname{sen}(t-s) & -5+5\cos(t-s)\\ 0 & \cos(t-s)-2\operatorname{sen}(t-s) & -5\operatorname{sen}(t-s)\\ 0 & \operatorname{sen}(t-s) & \cos(t-s)+2\operatorname{sen}(t-s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 3\\ 0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-6+6\cos(t-s)+3\operatorname{sen}(t-s)\\ -3\cos(t-s)-6\operatorname{sen}(t-s)\\ 3\operatorname{sen}(t-s)\end{bmatrix}$$

y

$$\int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s)\,ds = \begin{bmatrix} \int_0^t [-6+6\cos(t-s)+3\,\text{sen}(t-s)]\,ds \\ \int_0^t [3\cos(t-s)-6\,\text{sen}(t-s)]\,ds \\ \int_0^t 3\,\text{sen}(t-s)\,ds \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [-6s-6\,\text{sen}(t-s)+3\cos(t-s)]_{s=0}^{s=t} \\ [-3\,\text{sen}(t-s)-6\cos(t-s)]_{s=0}^{s=t} \\ 3\cos(t-s)]_{s=0}^{s=t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6t+3+6\,\text{sen}\,t-3\cos t \\ -6+3\,\text{sen}\,t+6\cos t \\ 3-3\cos t \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{c} + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s)\,ds$$

$$= \begin{bmatrix} -5+5\cos t \\ -5\,\text{sen}\,t \\ \cos t+2\,\text{sen}\,t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6t+3+6\,\text{sen}\,t-3\cos t \\ -6+3\,\text{sen}\,t+6\cos t \\ 3-3\cos t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2-6t+2\cos t+6\,\text{sen}\,t \\ -6+6\cos t-2\,\text{sen}\,t \\ 3-2\cos t+2\,\text{sen}\,t \end{bmatrix}$$

Finalmente,

$$x(t) = x_1(t) = 2\cos t+6\,\text{sen}\,t-2-6t$$
$$y(t) = y_1(t) = -2\cos t+2\,\text{sen}\,t+3$$

26.8. Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = x+y$$
$$\dot{y} = 9x+y$$

Este conjunto de ecuaciones es equivalente al sistema matricial $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ con

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

(Véase el problema 17.9.) La solución está dada por la ecuación *(26.6)*. Para esta **A**, del problema 16.1, tenemos que

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3e^{4t}+3e^{-2t} & e^{4t}-e^{-2t} \\ 9e^{4t}-9e^{-2t} & 3e^{4t}+3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

de aquí,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{k} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3e^{4t}+3e^{-2t} & e^{4t}-e^{-2t} \\ 9e^{4t}-9e^{-2t} & 3e^{4t}+3e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(3k_1+k_2)e^{4t}+\frac{1}{6}(3k_1-k_2)e^{-2t} \\ \frac{3}{6}(3k_1+k_2)e^{4t}-\frac{3}{6}(3k_1-k_2)e^{-2t} \end{bmatrix}$$

De este modo,

$$x(t) = x_1(t) = \frac{1}{6}(3k_1 + k_2)e^{4t} + \frac{1}{6}(3k_1 - k_2)e^{-2t}$$

$$y(t) = y_1(t) = \frac{3}{6}(3k_1 + k_2)e^{4t} - \frac{3}{6}(3k_1 - k_2)e^{-2t}$$

Si definimos dos nuevas constantes arbitrarias $k_3 = (3k_1 + k_2)/6$ y $k_4 = (3k_1 - k_2)/6$, entonces

$$x(t) = k_3 e^{4t} + k_4 e^{-2t} \quad \text{y} \quad y(t) = 3k_3 e^{4t} - 3k_4 e^{-2t}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

Resuelva cada uno de los siguientes sistemas por los métodos de matrices. Obsérvese que $e^{\mathbf{A}t}$ para los primeros cinco problemas se encuentra en el problema 16.2, en tanto que $e^{\mathbf{A}t}$ para los problemas 26.15 al 26.17 está dada en el problema 16.3.

26.9. $\ddot{x} + 2\dot{x} - 8x = 0;\ x(1) = 1,\ \dot{x}(1) = 0$

26.10. $\ddot{x} + 2\dot{x} - 8x = 4;\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0$

26.11. $\ddot{x} + 2\dot{x} - 8x = 4;\ x(1) = 0,\ \dot{x}(1) = 0$

26.12. $\ddot{x} + 2\dot{x} - 8x = 4;\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 2$

26.13. $\ddot{x} + 2\dot{x} - 8x = 9e^{-t};\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0$

26.14. El sistema del problema 26.4, usando la ecuación *(26.2)*

26.15. $\ddot{x} + x = 0$

26.16. $\ddot{x} + x = 0;\ x(2) = 0,\ \dot{x}(2) = 0$

26.17. $\ddot{x} + x = t;\ x(1) = 0,\ \dot{x}(1) = 1$

26.18. $\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 0$

26.19. $\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 0;\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$

26.20. $\ddot{y} - \dot{y} - 2y = e^{3t};\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$

26.21. $\ddot{y} - \dot{y} - 2y = e^{3t};\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

26.22. $\ddot{z} + 9\dot{z} + 14z = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t;\ z(0) = 0,\ \dot{z}(0) = -1$

26.23. $\dot{x} = -4x + 6y$
$\dot{y} = -3x + 5y;$
$x(0) = 3,\ y(0) = 2$

26.24. $\dot{x} + 5x - 12y = 0$
$\dot{y} + 2x - 5y = 0;$
$x(0) = 8,\ y(0) = 3$

26.25. $\dot{x} - 2y = 3$
$\dot{y} + y - x = -t^2;$
$x(0) = 0,\ y(0) = -1$

26.26. $\dot{x} = x + 2y$
$\dot{y} = 4x + 3y$

26.27. $\dddot{x} = 6t;\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0,\ \ddot{x}(0) = 12$

26.28. $\ddot{x} + y = 0$
$\dot{y} + x = 2e^{-t};$
$x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = -2,\ y(0) = 0$

26.29. $\ddot{x} = 2\dot{x} + 5y + 3,$
$\dot{y} = -\dot{x} - 2y;$
$x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0,\ y(0) = 1$

SOLUCIONES EN SERIES DE POTENCIAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES VARIABLES

27

ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN

Una ecuación diferencial lineal de *segundo orden*

$$b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x) \tag{27.1}$$

tiene coeficientes variables cuando $b_2(x)$, $b_1(x)$ y $b_0(x)$ *no* son todos constantes o constantes múltiples uno del otro. Si $b_2(x)$ no es cero en un intervalo dado, entonces podemos dividir por él y volver a escribir la ecuación (*27.1*) como

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = \phi(x) \tag{27.2}$$

donde $P(x) = b_1(x)/b_2(x)$, $Q(x) = b_0(x)/b_2(x)$ y $\phi(x) = g(x)/b_2(x)$. En este capítulo y en el siguiente, describimos procedimientos para resolver muchas ecuaciones en la forma de (*27.1*) o bien de (*27.2*). Estos procedimientos se pueden generalizar de una manera directa para resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden mayor con coeficientes variables.

FUNCIONES ANALÍTICAS Y PUNTOS ORDINARIOS

Una función $f(x)$ es *analítica* en x_0 si su serie de Taylor alrededor de x_0,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

converge a $f(x)$ en alguna vecindad de x_0.

Los polinomios, sen x, cos x y e^x son analíticos en cualquier lugar; así que también lo son las sumas, las diferencias y los productos de estas funciones. Los cocientes de cualesquiera de estas dos funciones son analíticos en todos los puntos donde el denominador no es cero.

El punto x_0 es un *punto ordinario* de la ecuación diferencial (*27.2*) si tanto $P(x)$ como $Q(x)$ son analíticas en x_0. Si cualesquiera de estas funciones no es analítica en x_0, entonces x_0 es un *punto singular* de (*27.2*).

SOLUCIONES ALREDEDOR DEL ORIGEN DE ECUACIONES HOMOGÉNEAS

La ecuación (*27.1*) es *homogénea* cuando $g(x) \equiv 0$, en cuyo caso la ecuación (27.2) se especializa así

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{27.3}$$

Teorema 27.1. Si $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación (*27.3*), entonces la solución general en un intervalo que contiene este punto tiene la forma de

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \tag{27.4}$$

donde a_0 y a_1 son constantes arbitrarias y $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son funciones analíticas linealmente independientes en $x = 0$.

Para evaluar los coeficientes a_n en la solución proporcionada por el teorema 27.1, usamos el siguiente procedimiento de cinco pasos, conocido como *método de las series de potencias*.

Paso 1. Sustituya la serie de potencias en el lado izquierdo de la ecuación diferencial homogénea

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \cdots \tag{27.5}$$

junto con las serie de potencias para

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + na_n x^{n-1} + (n+1)a_{n+1} x^n + (n+2)a_{n+2} x^{n+1} + \cdots \tag{27.6}$$

y

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + (n+1)(n)a_{n+1} x^{n-1} + (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \cdots \tag{27.7}$$

Paso 2. Agrupe las potencias similares de x e iguales a cero el coeficiente de cada potencia de x.

Paso 3. La ecuación obtenida estableciendo el coeficiente de x^n igual a cero en el paso 2 contendrá a_j términos para un número finito de j valores. Resuelva esta ecuación para el término a_j que tenga el subíndice mayor. La ecuación resultante se conoce como la *fórmula de recurrencia* para la ecuación diferencial dada.

Paso 4. Use la fórmula de recurrencia para determinar secuencialmente a_j ($j = 2, 3, 4, \ldots$) en términos de a_0 y a_1.

Paso 5. Sustituya los coeficientes determinados en el paso 4 en la ecuación (*27.5*) y vuelva a escribir la solución en la forma de la ecuación (27.4).

El método de las series de potencias sólo se aplica cuando $x = 0$ es un punto ordinario. Aunque una ecuación diferencial debe estar en la forma de la ecuación (27.2) para determinar si $x = 0$ es un punto ordinario, una vez que esta condición se verifica, el método de las series de potencias se puede usar en cualquiera de las formas (*27.1*) o (27.2). Si $P(x)$ o bien $Q(x)$ en (27.2) son cocientes de polinomios, a menudo es más simple multiplicar primero todo por el mínimo denominador común, y de allí quitar denominadores y luego aplicar el método de las series de potencias a la ecuación resultante en la forma de la ecuación (*27.1*).

SOLUCIONES ALREDEDOR DEL ORIGEN DE ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS

Si $\phi(x)$ en la ecuación (27.2) es analítica en $x = 0$, tiene una expansión en serie de Taylor alrededor de ese punto y el método de las series de potencias dado antes se puede modificar para resolver la ecuación (*27.1*) o bien la (27.2). En el paso 1, las ecuaciones de la (*27.5*) a la (*27.7*) se sustituyen en el lado izquierdo de la ecuación homogénea; el

lado derecho se escribe como una serie de Taylor alrededor del origen. Los pasos 2 y 3 cambian de modo tal que los coeficientes de cada potencia de x sobre el lado izquierdo de la ecuación resultante del paso 1 se establecen iguales a sus contrapartes sobre el lado derecho de esa ecuación. La forma de la solución en el paso 5 se convierte en

$$y + a_0y_1(x) + a_1y_2(x) + y_3(x)$$

que tiene la forma especificada en el teorema 8.4. Los dos primeros términos comprenden la solución general para la ecuación diferencial homogénea asociada, mientras que la última función es una solución particular para la ecuación no homogénea.

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Las soluciones a los problemas de valor inicial se obtienen resolviendo primero la ecuación diferencial dada y aplicando luego las condiciones iniciales especificadas. En el problema 27.23 se describe una técnica alternativa que genera rápidamente los primeros pocos términos de la solución de las series de potencias para un problema de valor inicial.

SOLUCIONES ALREDEDOR DE OTROS PUNTOS

Cuando las soluciones se requieren alrededor del punto ordinario $x_0 \neq 0$, el álgebra generalmente se simplifica si x_0 se traslada al origen por medio del cambio de variables $t = x - x_0$. La solución de la nueva ecuación diferencial resultante se puede obtener por el método de las series de potencias alrededor de $t = 0$. Entonces la solución de la ecuación original se obtiene fácilmente regresando a la variable original sustituyendo la ecuación de transformación del cambio de variables $t = x - x_0$.

PROBLEMAS RESUELTOS

27.1. Determine si $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial

$$y'' - xy' + 2y = 0$$

Aquí, tanto $P(x) = -x$ como $Q(x) = 2$ son funciones polinomiales; de aquí que sean analíticas en todo lugar. Por lo tanto, todo valor de x, en particular $x = 0$, es un punto ordinario.

27.2. Encuentre una fórmula de recurrencia para la solución en series de potencias alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial dada en el problema 27.1.

Del problema 27.1 tenemos que $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación dada, de modo que el teorema 27.1 se cumple. Sustituyendo las ecuaciones de la (*27.5*) a la (*27.7*) en el lado izquierdo de la ecuación diferencial, encontramos que

$$\begin{aligned}&\left[2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + (n+1)(n)a_{n+1}x^{n-1} + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \cdots\right]\\ &-x\left[a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1} + (n+1)a_{n+1}x^n + (n+2)a_{n+2}x^{n+1} + \cdots\right]\\ &+2\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots\right] = 0\end{aligned}$$

Combinando los términos que contienen potencias similares de x, tenemos

$$\begin{aligned}&(2a_2 + 2a_0) + x(6a_3 + a_1) + x^2(12a_4) + x^3(20a_5 - a_3)\\ &\quad + \cdots + x^n\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n + 2a_n\right] + \cdots\\ &= 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots + 0x^n + \cdots\end{aligned}$$

La última ecuación se cumple si y sólo si cada coeficiente del lado izquierdo es cero. De este modo,

$$2a_2 + 2a_0 = 0, \quad 6a_3 + a_1 = 0, \quad 12a_4 = 0, \quad 20a_5 - a_3 = 0, \quad \cdots$$

En general, $$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-2)a_n = 0, \text{ o bien,}$$

$$a_{n+2} = \frac{(n-2)}{(n+2)(n+1)} a_n$$

que es la fórmula de recurrencia para este problema.

27.3. Encuentre la solución general cercana a $x = 0$ de $y'' - xy' + 2y = 0$.

Evaluando exitosamente la fórmula de recurrencia obtenida en el problema 27.2, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, calculamos

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_0 \\ a_3 &= -\frac{1}{6} a_1 \\ a_4 &= 0 \\ a_5 &= \frac{1}{20} a_3 = \frac{1}{20}\left(-\frac{1}{6} a_1\right) = -\frac{1}{120} a_1 \\ a_6 &= \frac{2}{30} a_4 = \frac{1}{15}(0) = 0 \\ a_7 &= \frac{3}{42} a_5 = \frac{1}{14}\left(-\frac{1}{120}\right) a_1 = -\frac{1}{1\,680} a_1 \\ a_8 &= \frac{4}{56} a_6 = \frac{1}{14}(0) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{1}$$

Obsérvese que dado que $a_4 = 0$, de la fórmula de recurrencia se desprende que todos los coeficientes pares más allá de a_4 son también cero. Sustituyendo (*1*) en la ecuación (*27.5*) tenemos

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x - a_0 x^2 - \frac{1}{6} a_1 x^3 + 0x^4 - \frac{1}{120} a_1 x^5 + 0x^6 - \frac{1}{1\,680} a_1 x^7 - \cdots \\ &= a_0(1 - x^2) + a_1\left(x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{1\,680}x^7 - \cdots\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Si definimos

$$y_1(x) \equiv 1 - x^2 \quad \text{y} \quad y_2(x) \equiv x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{1\,680}x^7 - \cdots$$

entonces la solución general (2) se puede reescribir como $y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$.

27.4. Determine si $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial

$$y'' + y = 0$$

Aquí, tanto $P(x) = 0$ como $Q(x) = 1$ son constantes; de aquí que sean analíticas en todo lugar. Por lo tanto, todo valor de x, en particular $x = 0$, es un punto ordinario.

27.5. Encuentre una fórmula de recurrencia para la solución de las series de potencias alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial dada en el problema 27.4.

Del problema 27.4 tenemos que $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación dada, de modo que el teorema 27.1 se cumple. Sustituyendo las ecuaciones de la (*27.5*) a la (*27.7*) en el lado izquierdo de la ecuación diferencial, encontramos que

$$\left[2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + (n+1)na_{n+1}x^{n-1} + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \cdots\right]$$

$$+\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots\right] = 0$$

o bien

$$\begin{aligned}(2a_2 + a_0) + x(6a_3 + a_1) + x^2(12a_4 + a_2) + x^3(20a_5 + a_3)\\ + \cdots + n^n\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n\right] + \cdots\\ = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n + \cdots\end{aligned}$$

Igualando cada coeficiente a cero, tenemos

$$2a_2 + a_0 = 0, \quad 6a_3 + a_1 = 0, \quad 12a_4 + a_2 = 0, \quad 20a_5 + a_3 = 0, \quad \ldots$$

En general

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0,$$

que es equivalente a

$$a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)}a_n$$

Esta ecuación es la fórmula de recurrencia para este problema.

27.6. Use las series de potencias para encontrar la solución general cercana a $x = 0$ de $y'' + y = 0$.

Dado que esta ecuación tiene coeficientes constantes, su solución se obtiene fácilmente ya sea por el método de la ecuación característica, por las transformadas de Laplace, o bien por los métodos matriciales, así $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$.

Resolviendo por el método de las series de potencias, evaluamos exitosamente la fórmula de recurrencia hallada en el problema 27.5 para $n = 0, 1, 2, \ldots$, obteniendo

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2!}a_0\\
a_3 &= -\frac{1}{6}a_1 = \frac{1}{3!}a_1\\
a_4 &= -\frac{1}{(4)(3)}a_2 = -\frac{1}{(4)(3)}\left(-\frac{1}{2!}a_0\right) = \frac{1}{4!}a_0\\
a_5 &= -\frac{1}{(5)(4)}a_3 = -\frac{1}{(5)(4)}\left(-\frac{1}{3!}a_1\right) = \frac{1}{5!}a_1\\
a_6 &= -\frac{1}{(6)(5)}a_4 = -\frac{1}{(6)(5)}\left(\frac{1}{4!}a_0\right) = -\frac{1}{6!}a_0\\
a_7 &= -\frac{1}{(7)(6)}a_5 = -\frac{1}{(7)(6)}\left(\frac{1}{5!}a_1\right) = -\frac{1}{7!}a_1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Recuerde que para todo número entero positivo n, el factorial n, que se indica como $n!$, está definido por

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$$

y $0!$ está definido como uno. De este modo, $4! = (4)(3)(2)(1) = 24$ y $5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 5(4!) = 120$. En general, $n! = n(n-1)!$

Ahora, sustituyendo los valores de antes por $a_2, a_3, a_4, \ldots$ en la ecuación (27.5), tenemos

$$\begin{aligned}
y &= a_0 + a_1x - \frac{1}{2!}a_0x^2 - \frac{1}{3!}a_1x^3 + \frac{1}{4!}a_0x^4 + \frac{1}{5!}a_1x^5 - \frac{1}{6!}a_0x^6 - \frac{1}{7!}a_1x^7 + \cdots \qquad (1)\\
&= a_0\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right)
\end{aligned}$$

Pero

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

Sustituyendo estos dos resultados en (*1*) y escribiendo $c_1 = a_0$ y $c_2 = a_1$, obtenemos, como antes,

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

27.7. Determine si $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial

$$2x^2y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0$$

Dividiendo por $2x^2$ tenemos

$$P(x) = \frac{7(x+1)}{2x} \quad Q(x) = \frac{-3}{2x^2}$$

Como ninguna de las dos funciones es analítica en $x = 0$ (ambos denominadores son cero allí), $x = 0$ no es un punto ordinario sino, más bien, un punto singular.

27.8. Determine si $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial

$$x^2y'' + 2y' + xy = 0$$

Aquí $P(x) = 2/x^2$ y $Q(x) = 1/x$. Ninguna de estas funciones es analítica en $x = 0$, así $x = 0$ no es un punto ordinario sino, más bien, un punto singular.

27.9. Encuentre una fórmula de recurrencia para la solución en series de potencias alrededor de $t = 0$ para la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (t-1)\frac{dy}{dt} + (2t-3)y = 0$$

Tanto $P(t) = t - 1$ como $Q(t) = 2t - 3$ son polinomios; por esto, cada punto, en particular $t = 0$, es un punto ordinario. Sustituyendo las ecuaciones de la (*27.5*) a la (*27.7*) en el lado izquierdo de la ecuación diferencial, con t reemplazando a x, tenemos que

$$\begin{aligned}&\left[2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + \cdots + n(n-1)a_nt^{n-2} + (n+1)na_{n+1}t^{n-1} + (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + \cdots\right]\\ &+(t-1)\left[a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + \cdots + na_nt^{n-1} + (n+1)a_{n+1}t^n + (n+2)a_{n+2}t^{n+1} + \cdots\right]\\ &+(2t-3)\left[a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + \cdots + a_nt^n + a_{n+1}t^{n+1} + a_{n+2}t^{n+2} + \cdots\right] = 0\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}&(2a_2 - a_1 - 3a_0) + t(6a_3 + a_1 - 2a_2 + 2a_0 - 3a_1) + t^2(12a_4 + 2a_2 - 3a_3 + 2a_1 - 3a_2) + \cdots\\ &\quad + t^n\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n - (n+1)a_{n+1} + 2a_{n-1} - 3a_n\right] + \cdots\\ &\quad = 0 + 0t + 0t^2 + \cdots + 0t^n + \cdots\end{aligned}$$

Igualando cada coeficiente a cero, obtenemos

$$2a_2 - a_1 - 3a_0 = 0, \quad 6a_3 - 2a_2 - 2a_1 + 2a_0 = 0, \quad 12a_4 - 3a_3 - a_2 + 2a_1 = 0, \quad \ldots \tag{1}$$

En general,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_{n+1} + (n-3)a_n + 2a_{n-1} = 0$$

que es equivalente a

$$a_{n+2} = \frac{1}{n+2}a_{n+1} - \frac{(n-3)}{(n+2)(n+1)}a_n - \frac{2}{(n+2)(n+1)}a_{n-1} \tag{2}$$

La ecuación (*2*) es la fórmula de recurrencia para este problema. Obsérvese, sin embargo, que no es válida para $n = 0$, porque a_{-1} es una cantidad indefinida. Para obtener una ecuación para $n = 0$, usamos la primera ecuación en (*1*), que da $a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0$.

27.10. Encuentre la solución general cercana a $t = 0$ para la ecuación diferencial dada en el problema 27.9.

Del problema 27.9 tenemos que

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0$$

Entonces, evaluando la fórmula de recurrencia *(2)* del problema 27.9 para sucesivos valores de números enteros de n comenzando con $n = 1$, encontramos que

$$a_3 = \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right) + \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{3}a_0 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0$$

$$a_4 = \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{12}a_2 - \frac{1}{6}a_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right) - \frac{1}{6}a_1 = \frac{1}{6}a_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación *(27.5)* con x reemplazada por t, obtenemos como la solución general para la ecuación diferencial dada

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 t + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{2}a_0\right)t^2 + \left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{6}a_0\right)t^3 + \left(\frac{1}{6}a_0\right)t^4 + \cdots \\ &= a_0\left(1 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \cdots\right) + a_1\left(t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3 + 0t^4 + \cdots\right) \end{aligned}$$

27.11. Determine si $x = 0$ o bien $x = 1$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

para cualquier número entero positivo n.

Primero transformamos la ecuación diferencial en la forma de la ecuación *(27.2)* dividiendo por $x^2 - 1$. Entonces,

$$P(x) = \frac{-2x}{x^2 - 1} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{n(n+1)}{x^2 - 1}$$

Estas dos ecuaciones tienen expansiones de la serie de Taylor alrededor de $x = 0$, de modo que ambas son analíticas allí y $x = 0$ es un punto ordinario. En contraste, los denominadores de ambas funciones son cero en $x = 1$, de modo que ninguna de las dos funciones está definida allí y, por lo tanto, ninguna es analítica allí. En consecuencia, $x = 1$ es un punto singular.

27.12. Encuentre una fórmula de recurrencia para la solución en series de potencias alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial dada en el problema 27.11.

Para evitar fracciones, trabajamos con la ecuación diferencial en su forma presente. Sustituyendo las ecuaciones *(27.5)* a la *(27.7)*, con el índice mudo n reemplazado por k, en el lado izquierdo de esta ecuación, tenemos que

$$\begin{aligned} &(1 - x^2)\left[2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \cdots + k(k-1)a_k x^{k-2} + (k+1)(k)a_{k+1}x^{k-1}\right. \\ &\left. + (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + \cdots\right] - 2x\left[a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + ka_kx^{k-1} + (k+1)a_{k+1}x^k\right. \\ &\left. + (k+2)a_{k+2}x^{k+1} + \cdots\right] + k(k+1)\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_kx^k\right. \\ &\left. + a_{k+1}x^{k+1} + a_{k+2}x^{k+2} + \cdots\right] = 0 \end{aligned}$$

Combinando los términos que contienen potencias similares de x, obtenemos

$$\begin{aligned} &\left[2a_2 + (n^2 + n)a_0\right] + x\left[6a_3 + (n^2 + n - 2)a_1\right] + \cdots \\ &+ x^k\left[(k+2)(k+1)a_{k+2} + (n^2 + n - k^2 - k)a_k\right] + \cdots = 0 \end{aligned}$$

Observando que $n^2+n-k^2-k=(n-k)(n+k+1)$, obtenemos la fórmula de recurrencia

$$a_{k+2}=-\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)}a_k \qquad (1)$$

27.13. Demuestre que siempre que n sea un número entero positivo, una solución cercana a $x=0$ de la *ecuación de Legendre*

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

es un polinomio de grado n. (Véase el capítulo 29.)

La fórmula de recurrencia para esta ecuación está dada por (*1*) en el problema 27.12. Debido al factor $n-k$, encontramos, dejando $k=n$, que $a_{n+2}=0$. Seguimos al mismo tiempo que $0=a_{n+4}=a_{n+6}=a_{n+8}=\cdots$. De este modo, si n es impar, todos los coeficientes impares a_k $(k>n)$ son cero, en tanto que si n es par, todos los otros coeficientes pares a_k $(k>n)$ son cero; en tanto que si n es par, todos los coeficientes pares a_k $(k>n)$ son cero. Por lo tanto, o $y_1(x)$ o bien $y_2(x)$ en la ecuación (*27.4*) (dependiendo de si n es par o impar, respectivamente) contendrán sólo un número finito de términos distintos de cero hasta un término en x^n e incluyéndolo; de aquí, éste es un polinomio de grado n.

Como a_0 y a_1 son arbitrarias, es costumbre elegirlas de modo que $y_1(x)$ o bien $y_2(x)$, cualquiera que sea el polinomio, satisfagan la condición $y(1)=1$. El polinomio resultante, indicado por $P_n(x)$, se conoce como el *polinomio de Legendre de grado n*. Los primeros de éstos son

$$P_0(x)=1 \quad P_1(x)=x \quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x) \quad P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

27.14. Encuentre una fórmula de recurrencia para la solución de las series de potencias alrededor de $x=0$ para la ecuación diferencial no homogénea $(x^2+4)y''+xy=x+2$.

Dividiendo la ecuación dada por x^2+4, vemos que $x=0$ es un punto ordinario y que $\phi(x)=(x+2)/(x^2+4)$ es analítica allí. Por esto, el método de las series de potencias se aplica a toda la ecuación, que, además, debemos dejar en la forma dada originalmente para simplificar el álgebra. Sustituyendo las ecuaciones de la (*27.5*) a la (*27.7*) en la ecuación diferencial dada, encontramos que

$$\begin{aligned}(x^2+4)\big[&2a_2+5a_3x+12a_4x^2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}\\&+(n+1)na_{n+1}x^{n-1}+(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\cdots\big]\\&+x\big[a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\big]=x+2\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}&(8a_2)+x(24a_3+a_0)+x^2(2a_2+48a_4+a_1)+x^3(6a_3+80a_5+a_2)+\cdots\\&\quad+x^n\big[n(n-1)a_n+4(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_{n-1}\big]+\cdots\\&=2+(1)x+(0)x^2+(0)x^3+\cdots\end{aligned} \qquad (1)$$

Igualando los coeficientes de potencias similares de x, tenemos

$$8a_2=2,\quad 24a_3+a_0=1,\quad 2a_2+48a_4+a_1=0,\quad 6a_3+80a_5+a_2=0,\ \ldots \qquad (2)$$

En general,

$$n(n-1)a_n+4(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_{n-1}=0 \quad (n=2,3,\ldots)$$

que es equivalente a

$$a_{n+2}=-\frac{n(n-1)}{4(n+2)(n+1)}a_n-\frac{1}{4(n+2)(n+1)}a_{n-1} \qquad (3)$$

$(n=2,3,\ldots)$. Obsérvese que la fórmula de recurrencia (*3*) no es válida para $n=0$ o bien $n=1$, dado que los coeficientes de x^0 y x^1 en el lado derecho de (*1*) no son cero. En cambio, usamos las dos primeras ecuaciones de (*2*) para obtener

$$a_2=\frac{1}{4} \quad a_3=\frac{1}{24}-\frac{1}{24}a_0 \qquad (4)$$

27.15. Use el método de las series de potencias para hallar la solución general cercana a $x = 0$ de

$$(x^2+4)y'' + xy = x+2$$

Usando los resultados del problema 27.14, tenemos que a_2 y a_3 están dadas por (4) y a_n para ($n = 4, 5, 6, \dots$) está dada por (3). De esta fórmula de recurrencia se desprende que

$$a_4 = -\frac{1}{24}a_2 - \frac{1}{48}a_1 = -\frac{1}{24}\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{48}a_1 = -\frac{1}{96} - \frac{1}{48}a_1$$
$$a_5 = -\frac{3}{40}a_3 - \frac{1}{80}a_2 = -\frac{3}{40}\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{24}a_0\right) - \frac{1}{80}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-1}{160} + \frac{1}{320}a_0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

De este modo,

$$y = a_0 + a_1x + \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{24}a_0\right)x^3 + \left(-\frac{1}{96} - \frac{1}{48}a_1\right)x^4 + \left(\frac{-1}{160} + \frac{1}{320}a_0\right)x^5 + \cdots$$
$$= a_0\left(1 - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{320}x^5 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{48}x^4 + \cdots\right) + \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{96}x^4 - \frac{1}{160}x^5 + \cdots\right)$$

La tercera serie es la solución particular. La primera y la segunda series representan juntas la solución general de la ecuación homogénea asociada $(x^2+4)y'' + xy = 0$.

27.16. Encuentre la fórmula de recurrencia para la solución en series de potencias alrededor de $t = 0$ para la ecuación diferencial no homogénea $(d^2y/dt^2) + ty = e^{t+1}$.

Aquí $P(t) = 0$, $Q(t) = t$ y $\phi(t) = e^{t+1}$ son analíticas en todo lugar, de modo que $t = 0$ es un punto ordinario. Sustituyendo las ecuaciones de la (27.5) a la (27.7), con t reemplazando a x, en la ecuación dada, encontramos que

$$\left[2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + \cdots + (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + \cdots\right]$$
$$+t(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots) = e^{t+1}$$

Recuerde que e^{t+1} tiene la expansión de Taylor $e^{t+1} = e\sum_{n=0}^{\infty} t^n/n!$ alrededor de $t = 0$. De este modo, la última ecuación se puede reescribir como

$$(2a_2) + t(6a_3 + a_0) + t^2(12a_4 + a_1) + \cdots + t^n\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_{n-1}\right] + \cdots$$
$$= \frac{e}{0!} + \frac{e}{1!}t + \frac{e}{2!}t^2 + \cdots + \frac{e}{n!}t^n + \cdots$$

Igualando los coeficientes de potencias similares de t, tenemos

$$2a_2 = \frac{e}{0!}, \quad 6a_3 + a_0 = \frac{e}{1!}, \quad 12a_4 + a_1 = \frac{e}{2!}, \quad \dots \qquad (1)$$

En general, $(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_{n-1} = e/n!$ para $n = 1, 2, \dots$, o bien,

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)}a_{n-1} + \frac{e}{(n+2)(n+1)n!} \qquad (2)$$

la cual es la fórmula de recurrencia para $n = 1, 2, 3, \dots$ Usando la primera ecuación en (1) podemos resolver para $a_2 = e/2$.

27.17. Use el método de las series de potencias para hallar la solución general cercana a $t = 0$ para la ecuación diferencial dada en el problema 27.16.

Utilizando los resultados del problema 27.16, tenemos que $a_2 = e/2$ y una fórmula de recurrencia dada por la ecuación (2). Utilizando esta fórmula, determinamos que

$$a_3 = -\frac{1}{6}a_0 + \frac{e}{6}$$
$$a_4 = -\frac{1}{12}a_1 + \frac{e}{24}$$
$$a_5 = -\frac{1}{20}a_2 + \frac{e}{120} = -\frac{1}{20}\left(\frac{e}{2}\right) + \frac{e}{120} = -\frac{e}{60}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sustituyendo la ecuación (27.5), con x reemplazada por t, obtenemos

$$y = a_0 + a_1 t + \frac{e}{2}t^2 + \left(-\frac{1}{6}a_0 + \frac{e}{6}\right)t^3 + \left(-\frac{1}{12}a_1 + \frac{e}{24}\right)t^4 + \left(-\frac{e}{60}\right)t^5 + \cdots$$
$$= a_0\left(1 - \frac{1}{6}t^3 + \cdots\right) + a_1\left(t - \frac{1}{12}t^4 + \cdots\right) + e\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{60}t^5 + \cdots\right)$$

27.18. Encuentre la solución general cercana a $x = 2$ de $y'' - (x-2)y' + 2y = 0$.

Para simplificar el álgebra, primero hacemos los cambios de variables $t = x - 2$. De la regla de la cadena, encontramos que las correspondientes transformadas de las derivadas de y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}(1) = \frac{dy}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}(1) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\frac{d^2y}{dt^2} - t\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

y esta ecuación se va a resolver cerca de $t = 0$. Del problema 27.3, con x reemplazada por t, vemos que la solución es

$$y = a_0(1 - t^2) + a_1\left(t - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{120}t^5 - \frac{1}{1\,680}t^7 - \cdots\right)$$

Sustituyendo $t = x - 2$ en esta última ecuación, obtenemos la solución al problema original como

$$y = a_0\left[1 - (x-2)^2\right] + a_1\left[(x-2) - \frac{1}{6}(x-2)^3 - \frac{1}{120}(x-2)^5 - \frac{1}{1\,680}(x-2)^7 - \cdots\right] \quad (1)$$

27.19. Encuentre la solución general cercana a $x = -1$ de $y'' + xy' + (2x-1)y = 0$.

Para simplificar el álgebra, primero hacemos la sustitución $t = x - (-1) = x + 1$. Entonces, como en el problema 27.18 $(dy/dx) = (dy/dt)$ y $(d^2y/dx^2) = (d^2y/dt^2)$. Sustituyendo estos resultados en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (t-1)\frac{dy}{dt} + (2t-3)y = 0$$

La solución de las series de potencias para esta ecuación se encuentra en los problemas 27.9 y 27.10 como

$$y = a_0\left(1 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \cdots\right) + a_1\left(t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3 + 0t^4 + \cdots\right)$$

Sustituyendo hacia atrás $t = x + 1$, obtenemos la solución al problema original como

$$y = a_0\left[1+\frac{3}{2}(x+1)^2+\frac{1}{6}(x+1)^3+\frac{1}{6}(x+1)^4+\cdots\right]$$
$$+a_1\left[(x+1)+\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}(x+1)^3+0(x+1)^4+\cdots\right] \qquad (1)$$

27.20. Encuentre la solución general cercana a $x=1$ de $y''+(x-1)y=e^x$.

Establecemos $t = x - 1$, de aquí $x = t + 1$. Como en el problema 27.18, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}$ de modo que la ecuación diferencial dada se puede volver a escribir como

$$\frac{d^2y}{dt^2}+ty=e^{t+1}$$

Su solución es (véanse los problemas 27.16 y 27.17)

$$y=a_0\left(1-\frac{1}{6}t^3+\cdots\right)+a_1\left(t-\frac{1}{12}t^4+\cdots\right)+e\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^4-\frac{1}{60}t^5+\cdots\right)$$

Regresando a la variable original sustituyendo la ecuación de transformación del cambio de variables $t = x - 1$, obtenemos la solución al problema original como

$$y=a_0\left[1-\frac{1}{6}(x-1)^3+\cdots\right]+a_1\left[(x-1)-\frac{1}{12}(x-1)^4+\cdots\right]$$
$$+e\left[\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3+\frac{1}{24}(x-1)^4-\frac{1}{60}(x-1)^5+\cdots\right]$$

27.21. Resuelva el problema de valor inicial

$$y''-(x-2)y'+2y=0; \quad y(2)=5, \quad y'(2)=60$$

Dado que las condiciones iniciales están prescritas en $x = 2$, éstas se satisfacen más fácilmente si la solución general de la ecuación diferencial se obtiene como una serie de potencias alrededor de este punto. Esto ya se ha hecho en la ecuación (1) del problema 27.18. Aplicando las condiciones iniciales iniciales directamente en esta solución, encontramos que $a_0 = 5$ y $a_1 = 60$. De este modo, la solución es

$$y=5\left[1-(x-2)^2\right]+60\left[(x-2)-\frac{1}{6}(x-2)^3-\frac{1}{120}(x-2)^5-\cdots\right]$$
$$=5+60(x-2)-5(x-2)^2-10(x-2)^3-\frac{1}{2}(x-2)^5-\cdots$$

27.22. Resuelva $y''+xy'+(2x-1)y=0$; $y(-1)=2$, $y'(-1)=-2$.

Dado que las condiciones iniciales están prescritas en $x=-1$, es ventajoso obtener la solución general de la ecuación diferencial cerca de $x = -1$. Esto ya se ha hecho en la ecuación (1) del problema 27.19. Aplicando las condiciones encontramos que $a_0 = 2$ y $a_1 = -2$. De este modo, la solución es

$$y=2\left[1+\frac{3}{2}(x+1)^2+\frac{1}{6}(x+1)^3+\frac{1}{6}(x+1)^4+\cdots\right]$$
$$-2\left[(x+1)+\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}(x+1)^3+0(x+1)^4+\cdots\right]$$
$$=2-2(x+1)+2(x+1)^2-\frac{2}{3}(x+1)^3+\frac{1}{3}(x+1)^4+\cdots$$

27.23. Resuelva el problema 27.22 por otro método.

MÉTODO DE LA SERIE DE TAYLOR. Un método alternativo para resolver los problemas de valor inicial descansa en la hipótesis de que la solución se puede expandir en una serie de Taylor alrededor del punto inicial x_0; es decir,

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \frac{y(x_0)}{0!} + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

Los términos $y(x_0)$ y $y'(x_0)$ están dados como condiciones iniciales; los otros términos $y^{(n)}(x_0)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ se pueden obtener derivando sucesivamente la ecuación diferencial. Para el problema 27.22, tenemos $x_0 = -1$, $y(x_0) = y(-1) = 2$ y $y'(x_0) = y'(-1) = -2$. Resolviendo la ecuación diferencial del problema 27.22 para y'', encontramos que

$$y'' = -xy' - (2x-1)y \tag{2}$$

Obtenemos $y''(x_0) = y''(-1)$ sustituyendo $x_0 = -1$ en (2) y usando las condiciones iniciales dadas.. De este modo,

$$y''(-1) = -(-1)y'(-1) - [2(-1)-1]y(-1) = 1(-2) - (-3)(2) = 4 \tag{3}$$

Para obtener $y'''(-1)$, diferenciamos (2) y luego sustituimos $x_0 = -1$ en la ecuación resultante. De este modo,

$$y'''(x) = -y' - xy'' - 2y - (2x-1)y' \tag{4}$$

y

$$\begin{aligned} y'''(-1) &= -y'(-1) - (-1)y''(-1) - 2y(-1) - [2(-1)-1]y'(-1) \\ &= -(-2) + 4 - 2(2) - (-3)(-2) = -4 \end{aligned} \tag{5}$$

Para obtener $y^{(4)}(-1)$, derivamos (4) y luego sustituimos $x_0 = -1$ en la ecuación resultante. De este modo,

$$y^{(4)}(x) = -xy''' - (2x+1)y'' - 4y' \tag{6}$$

y

$$\begin{aligned} y^{(4)}(-1) &= -(-1)y'''(-1) - [2(-1)+1]y''(-1) - 4y'(-1) \\ &= -4 - (-1)(4) - 4(-2) = 8 \end{aligned} \tag{7}$$

Este proceso se puede continuar indefinidamente. Sustituyendo las ecuaciones (3), (5), (7), y las condiciones iniciales en (1), obtenemos, como antes

$$\begin{aligned} y &= 2 + \frac{-2}{1!}(x+1) + \frac{4}{2!}(x+1)^2 + \frac{-4}{3!}(x+1)^3 + \frac{8}{4!}(x+1)^4 + \cdots \\ &= 2 - 2(x+1) + 2(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)^3 + \frac{1}{3}(x+1)^4 + \cdots \end{aligned}$$

Una ventaja de usar este método alternativo, comparándolo con el método usual de resolver primero la ecuación diferencial y aplicar luego las condiciones iniciales, es que el método de las series de Taylor es más sencillo de aplicar cuando sólo se requieren los primeros pocos términos de la solución. Una de las desventajas es que la fórmula de recurrencia no se puede hallar por el método de series de Taylor, y, por lo tanto, no se puede obtener una expresión general para el n-ésimo término de la solución. Obsérvese que este método alternativo es también útil para resolver ecuaciones diferenciales sin condiciones iniciales. En tales casos, establecemos $y(x_0) = a_0$ y $y'(x_0) = a_1$, donde a_0 y a_1 son constantes desconocidas, y luego procedemos como antes.

27.24. Use el método descrito en el problema 27.23 para resolver $y'' - 2xy = 0$; $y(2) = 1$, $y'(2) = 0$.

Usando la ecuación (1) del problema 27.23 asumimos una solución de la forma

$$y(x) = \frac{y(2)}{0!} + \frac{y'(2)}{1!}(x-2) + \frac{y''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{y'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \cdots \tag{1}$$

A partir de la ecuación diferencial,

$$y''(x) = 2xy, \quad y'''(x) = 2y + 2xy', \quad y^{(4)}(x) = 4y' + 2xy'', \quad \ldots$$

Sustituyendo en estas ecuaciones $x = 2$ y usando las condiciones iniciales, encontramos que

$$y''(2) = 2(2)y(2) = 4(1) = 4$$
$$y'''(2) = 2y(2) + 2(2)y'(2) = 2(1) + 4(0) = 2$$
$$y^{(4)}(2) = 4y'(2) + 2(2)y''(2) = 4(0) + 4(4) = 16$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (*1*), obtenemos la solución como

$$y = 1 + 2(x-2)^2 + \frac{1}{3}(x-2)^3 + \frac{2}{3}(x-2)^4 + \cdots$$

27.25. Demuestre que el método de los coeficientes indeterminados no se puede usar para obtener una solución particular de $y'' + xy = 2$.

Por el método de los coeficientes indeterminados, asumimos una solución particular de la forma $y_p = A_0x^m$, donde m podría ser cero si la solución simple $y_p = A_0$ no requiere ninguna modificación (véase el capítulo 11). Sustituyendo y_p en la ecuación diferencial, encontramos

$$m(m-1)A_0x^{m-2} + A_0x^{m+1} = 2 \tag{1}$$

Sin considerar el valor de m, es imposible asignar a A_0 un valor *constante* que satisfaga (*1*). Por esto, se desprende que el método de los coeficientes indeterminados no es aplicable.

Una limitación del método de los coeficientes indeterminados consiste en que éste sólo es válido para ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

PROBLEMAS ADICIONALES

En los problemas 27.26 al 27.34, determine si los valores de x dados son puntos ordinarios o singulares de las ecuaciones diferenciales dadas.

27.26. $x = 1;\ y'' + 3y' + 2xy = 0$

27.27. $x = 2;\ (x-2)y'' + 3(x^2 - 3x + 2)y' + (x-2)^2y = 0$

27.28. $x = 0;\ (x+1)y'' + \frac{1}{x}y' + xy = 0$

27.29. $x = -1;\ (x+1)y'' + \frac{1}{x}y' + xy = 0$

27.30. $x = 0;\ x^3y'' + y = 0$

27.31. $x = 0;\ x^3y'' + xy = 0$

27.32. $x = 0;\ e^xy'' + (\operatorname{sen} x)y' + xy = 0$

27.33. $x = -1;\ (x+1)^3y'' + (x^2-1)(x+1)y' + (x-1)y = 0$

27.34. $x = 2;\ x^4(x^2-4)y'' + (x+1)y' + (x^2 - 3x + 2) = 0$

27.35. Encuentre la solución general cercana a $x = 0$ de $y'' - y' = 0$. Compruebe su respuesta resolviendo la ecuación por el método del capítulo 9 y luego expandiendo el resultado en una serie de potencias alrededor de $x = 0$.

En los problemas 27.36 a 27.47, encuentre *a*) la fórmula de recurrencia y *b*) la solución general de la ecuación general dada por medio del método de las series de potencias alrededor del valor de x dado.

27.36. $x = 0;\ y'' + xy = 0$

27.37. $x = 0;\ y'' - 2xy' - 2y = 0$

27.38. $x = 0;\ y'' + x^2y' + 2xy = 0$

27.39. $x = 0;\ y'' - x^2y' - y = 0$

27.40. $x = 0;\ y'' + 2x^2y = 0$

27.41. $x = 0;\ (x^2-1)y'' + xy' - y = 0$

27.42. $x = 0;\ y'' - xy = 0$

27.43. $x = 1;\ y'' - xy = 0$

27.44. $x = -2;\ y'' - x^2y' + (x+2)y = 0$

27.45. $x = 0;\ (x^2+4)y'' + y = x$

27.46. $x = 1;\ y'' - (x-1)y' = x^2 - 2x$

27.47. $x = 0;\ y'' - xy' = e^{-x}$

27.48. Use el método de la serie de Taylor descrito en el problema 27.23 para resolver $y'' - 2xy' + x^2y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$.

27.49. Use el método de las series de Taylor descrito en el problema 27.23 para resolver $y'' - 2xy = x^2;\ y(1) = 0,\ y'(1) = 2$.

SOLUCIONES EN SERIES ALREDEDOR DE UN PUNTO SINGULAR REGULAR

28

PUNTOS SINGULARES REGULARES

El punto x es un *punto singular regular* de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{28.1}$$

si x_0 no es un punto ordinario (véase el capítulo 27), pero tanto $(x-x_0)P(x)$ como $(x-x_0)^2Q(x)$ son analíticas en x_0. Sólo consideramos puntos singulares regulares en $x_0 = 0$; si éste no es el caso, entonces el cambio de variables, $t = x - x_0$ trasladará a x_0 al origen.

MÉTODO DE FROBENIUS

Teorema 28.1. Si $x = 0$ es un punto singular regular de (*28.1*), entonces la ecuación tiene al menos una solución de la forma

$$y = x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

donde λ y a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ son constantes. Esta solución es válida en un intervalo $0 < x < R$ para algún número real R.

Para evaluar los coeficientes a_n y λ en el teorema 28.1, se procede como en el método de las series de potencias del capítulo 27. La serie infinita

$$\begin{aligned} y &= x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\lambda+n} \\ &= a_0x^{\lambda} + a_1x^{\lambda+1} + a_2x^{\lambda+2} + \cdots + a_{n-1}x^{\lambda+n-1} + a_nx^{\lambda+n} + a_{n+1}x^{\lambda+n+1} + \cdots \end{aligned} \tag{28.2}$$

con sus derivadas

$$\begin{aligned} y' &= \lambda a_0x^{\lambda-1} + (\lambda+1)a_1x^{\lambda} + (\lambda+2)a_2x^{\lambda+1} + \cdots \\ &+ (\lambda+n-1)a_{n-1}x^{\lambda+n-2} + (\lambda+n)a_nx^{\lambda+n-1} + (\lambda+n+1)a_{n+1}x^{\lambda+n} + \cdots \end{aligned} \tag{28.3}$$

y

$$y'' = \lambda(\lambda-1)a_0x^{\lambda-2} + (\lambda+1)(\lambda)a_1x^{\lambda-1} + (\lambda+2)(\lambda+1)a_2x^{\lambda} + \cdots$$
$$+ (\lambda+n-1)(\lambda+n-2)a_{n-1}x^{\lambda+n-3} + (\lambda+n)(\lambda+n-1)a_nx^{\lambda+n-2}$$
$$+ (\lambda+n+1)(\lambda+n)a_{n+1}x^{\lambda+n-1} + \cdots \qquad (28.4)$$

se sustituyen en la ecuación (*28.1*). Los términos con potencias de x similares se agrupan y se establecen iguales a cero. Cuando se hizo esto para x^n, la ecuación resultante es la fórmula de recurrencia. Una ecuación cuadrática en λ, llamada *ecuación indicial*, aparece cuando el coeficiente de x^0 se establece igual a cero y a_0 se deja arbitraria.

Las dos raíces de la ecuación indicial pueden ser números reales o números complejos. Si son números complejos ocurrirán en un par conjugado y las soluciones de números complejos que se producen se pueden combinar (usando las relaciones de Euler y la identidad $x^{a\pm ib} = x^a e^{\pm ib\ln x}$) para formar soluciones reales. En este libro, por simplicidad, supondremos que ambas raíces de la ecuación indicial son reales. Entonces, si λ se toma como la raíz indicial *mayor*, $\lambda = \lambda_1 \geq \lambda_2$, el método de Frobenius siempre produce una solución

$$y_1(x) = x^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1)x^n \qquad (28.5)$$

para la ecuación (*28.1*). [Hemos escrito $a_n(\lambda_1)$ para indicar los coeficientes producidos por el método cuando $\lambda = \lambda_1$.]

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son cocientes de polinomios, generalmente es más fácil multiplicar primero (*28.1*) por su mínimo común denominador y luego aplicar el método de Frobenius a la ecuación resultante.

SOLUCIÓN GENERAL

El método de Frobenius siempre produce una solución para (*28.1*) de la forma (*28.5*). La solución general (véase el teorema 8.2) tiene la forma $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias y $y_2(x)$ es una segunda solución de (*28.1*) que es linealmente independiente de $y_1(x)$. El método para obtener esta segunda solución depende de la relación entre las dos raíces de la ecuación indicial.

Caso 1. Si $\lambda_1 - \lambda_2$ no es un número entero, entonces

$$y_2(x) = x^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_2)x^n \qquad (28.6)$$

donde $y_2(x)$ se obtiene de idéntica manera que $y_1(x)$ por el método de Frobenius, usando λ_2 en lugar de λ_1.

Caso 2. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces

$$y_2(x) = y(x)\ln x + x^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\lambda_1)x^n \qquad (28.7)$$

Para generar esta solución, mantenga la fórmula de recurrencia en términos de λ y úsela para encontrar los coeficientes a_n ($n \geq 1$) en términos tanto de λ como de a_0, donde el coeficiente a_0 sigue siendo arbitrario. Sustituya estas a_n en la ecuación (*28.2*) para obtener una función $y(\lambda, x)$ que depende de las variables λ y x. Entonces

$$y_2(x) = \left.\frac{\partial y(\lambda, x)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_1} \qquad (28.8)$$

Caso 3. Si $\lambda_1 - \lambda_2 = N$ es un número entero positivo, entonces

$$y_2(x) = d_{-1}y_1(x)\ln x + x^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} d_n(\lambda_2)x^n \qquad (28.9)$$

Para generar esta solución, primero intentamos el método de Frobenius, con λ_2. Si éste produce una segunda solución, entonces ésta es $y_2(x)$, la que tiene la forma de (*28.9*) con $d_{-1} = 0$. De otra manera, proceda como en el caso 2 para generar $y(\lambda, x)$, de donde

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial \lambda}[(\lambda_1 - \lambda_2)y(\lambda, x)]\Big|_{\lambda=\lambda_2} \qquad (28.10)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

28.1. Determine si $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial

$$y'' - xy' + 2y = 0$$

Tal como se demostró en el problema 27.1, $x = 0$ es un punto ordinario de esta ecuación diferencial, así que no puede ser un punto singular regular.

28.2. Determine si $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial

$$2x^2y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0$$

Dividiendo por $2x^2$ tenemos

$$P(x) = \frac{7(x+1)}{2x} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{-3}{2x^2}$$

Tal como se demostró en el problema 27.7, $x = 0$ es un punto singular. Además, tanto

$$xP(x) = \frac{7}{2}(x+1) \quad \text{y} \quad x^2Q(x) = -\frac{3}{2}$$

son analíticas en todo lugar: la primera es un polinomio y la segunda una constante. Por esto, ambas son analíticas en $x = 0$ y este punto es singular regular.

28.3. Determine si $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial

$$x^3y'' + 2x^2y' + y = 0$$

Dividiendo por x^3 tenemos

$$P(x) = \frac{2}{x} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{1}{x^3}$$

Ninguna de estas funciones está definida en $x = 0$, de modo que este punto es singular. Aquí,

$$xP(x) = 2 \quad \text{y} \quad x^2Q(x) = \frac{1}{x}$$

El primero de estos términos es analítico en todo lugar, pero el segundo está indefinido en $x = 0$ y no es analítico allí. Por lo tanto, $x = 0$ *no* es un punto singular regular de la ecuación diferencial dada.

28.4. Determine si $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial

$$8x^2y'' + 10xy' + (x-1)y = 0$$

Dividiendo por $8x^2$ tenemos

$$P(x) = \frac{5}{4x} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{1}{8x} - \frac{1}{8x^2}$$

Ninguna de estas funciones está definida en $x = 0$, de modo que este punto es singular. Además, tanto

$$xP(x) = \frac{5}{4} \quad \text{y} \quad x^2Q(x) = \frac{1}{8}(x-1)$$

son analíticas en todo lugar: la primera es una constante y la segunda es un polinomio. Por esto, ambas son analíticas en $x = 0$, y éste es un punto singular regular.

28.5. Encuentre una fórmula de recurrencia y la ecuación indicial para la solución en una serie infinita alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial dada en el problema 28.4.

Del problema 28.4 se desprende que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial, de modo que se aplica el teorema 28.1. Sustituyendo las ecuaciones (*28.2*) a (*28.4*) en el lado izquierdo de la ecuación diferencial dada y combinando los coeficientes de las potencias similares de x, obtenemos

$$x^{\lambda}\left[8\lambda(\lambda-1)a_0+10\lambda a_0-a_0\right]+x^{\lambda+1}\left[8(\lambda+1)\lambda a_1+10(\lambda+1)a_1+a_0-a_1\right]+\cdots$$
$$+x^{\lambda+n}\left[8(\lambda+n)(\lambda+n-1)a_n+10(\lambda+n)a_n+a_{n-1}-a_n\right]+\cdots=0$$

Dividiendo por x^{λ} y simplificando, tenemos

$$\left[8\lambda^2+2\lambda-1\right]a_0+x\left[(8\lambda^2+18\lambda+9)a_1+a_0\right]+\cdots$$
$$+x^n\left\{\left[8(\lambda+n)^2+2(\lambda+n)-1\right]a_n+a_{n-1}\right\}+\cdots=0$$

Factorizando el coeficiente de a_n e igualando a cero el coeficiente de cada potencia de x, encontramos que

$$(8\lambda^2+2\lambda-1)a_0=0 \tag{1}$$

y, para $n \geq 1$,

$$\left[4(\lambda+n)-1\right]\left[2(\lambda+n)+1\right]a_n+a_{n-1}=0$$

o bien,

$$a_n=\frac{-1}{\left[4(\lambda+n)-1\right]\left[2(\lambda+n)+1\right]}a_{n-1} \tag{2}$$

La ecuación (*2*) es una fórmula recurrente para esta ecuación diferencial.

De (*1*), ya sea $a_0 = 0$ o bien

$$8\lambda^2+2\lambda-1=0 \tag{3}$$

Es conveniente mantener a_0 arbitraria; por lo tanto, debemos elegir λ de tal forma que se satisfaga (*3*), la cual es la ecuación indicial.

28.6. Encuentre la solución general alrededor de $x = 0$ para $x = 0$ de $8x^2y''+10xy'+(x-1)y=0$.

Las raíces de la ecuación indicial dadas por (*3*) del problema 28.5 son $\lambda_1=\frac{1}{4}$ y $\lambda_2=-\frac{1}{2}$. Dado que $\lambda_1-\lambda_2=\frac{3}{4}$, la solución está dada por las ecuaciones (*28.5*) y (*28.6*). Sustituyendo $\lambda=\frac{1}{4}$ en la fórmula de recurrencia (*2*) del problema 28.5 y simplificando, obtenemos

$$a_n=\frac{-1}{2n(4n+3)}a_{n-1} \quad (n\geq 1)$$

De este modo,

$$a_1=\frac{-1}{14}a_0, \quad a_2=\frac{-1}{44}a_1=\frac{1}{616}a_0, \quad \ldots$$

y

$$y_1(x)=a_0x^{1/4}\left(1-\frac{1}{15}x+\frac{1}{616}x^2+\cdots\right)$$

Sustituyendo $\lambda=-\frac{1}{2}$ en la fórmula de recurrencia (*2*) del problema 28.5 y simplificando, obtenemos

$$a_n=\frac{-1}{2n(4n-3)}a_{n-1}$$

De este modo,

$$a_1=-\frac{1}{2}a_0, \quad a_2=\frac{-1}{20}a_1=\frac{1}{40}a_0, \quad \ldots$$

y

$$y_2(x)=a_0x^{-1/2}\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{40}x^2+\cdots\right)$$

La solución general es

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$
$$= k_1x^{1/4}\left(1 - \frac{1}{14}x + \frac{1}{616}x^2 + \cdots\right) + k_2x^{-1/2}\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{40}x^2 + \cdots\right)$$

donde $k_1 = c_1a_0$ y $k_2 = c_2a_0$.

28.7. Encuentre una fórmula de recurrencia y la ecuación indicial para la solución en una serie infinita alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial

$$2x^2y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0$$

Del problema 28.2 se desprende que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial, de modo que se aplica el teorema 28.1. Sustituyendo las ecuaciones de la (*28.2*) a la (*28.4*) en el lado izquierdo de la ecuación diferencial dada y combinando los coeficientes de las potencias similares de x, obtenemos

$$x^{\lambda}[2\lambda(\lambda-1)a_0 + 7\lambda a_0 - 4a_0] + x^{\lambda+1}[2(\lambda+1)\lambda a_1 + 7\lambda a_0 + 7(\lambda+1)a_1 - 3a_1] + \cdots$$
$$+ x^{\lambda+n}[2(\lambda+n)(\lambda+n-1)a_n + 7(\lambda+n-1)a_{n-1} + 7(\lambda+n)a_n - 3a_n] + \cdots = 0$$

Dividiendo por x^{λ} y simplificando, tenemos

$$(2\lambda^2 + 5\lambda - 3)a_0 + x\left[(2\lambda^2 + 9\lambda + 4)a_1 + 7\lambda a_0\right] + \cdots$$
$$+ x^n\left\{\left[2(\lambda+n)^2 + 5(\lambda+n) - 3\right]a_n + 7(\lambda+n-1)a_{n-1}\right\} + \cdots = 0$$

Factorizando el coeficiente de a_n e igualando a cero el coeficiente de cada potencia de x, encontramos que

$$(2\lambda^2 + 5\lambda - 3)a_0 = 0 \qquad (1)$$

y, para $n \geq 1$,

$$[2(\lambda+n) - 1][(\lambda+n) + 3]a_n + 7(\lambda+n-1)a_{n-1} = 0$$

o bien,

$$a_n = \frac{-7(\lambda+n-1)}{[2(\lambda+n)-1][(\lambda+n)+3]}a_{n-1} \qquad (2)$$

La ecuación (*2*) es una fórmula recurrente para esta ecuación diferencial.

De (*1*), ya sea $a_0 = 0$ o bien

$$2\lambda^2 + 5\lambda - 3 = 0 \qquad (3)$$

Es conveniente mantener a_0 arbitraria; por lo tanto, requerimos λ de tal forma que se satisfaga la ecuación indicial (*3*).

28.8. Encuentre la solución general alrededor de $x = 0$ para $2x^2y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0$.

Las raíces de la ecuación indicial dadas por (*3*) del problema 28.7 son $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ y $\lambda_2 = -3$. Dado que $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{7}{2}$, la solución está dada por las ecuaciones (*28.5*) y (*28.6*). Sustituyendo $\lambda = \frac{1}{2}$ en (*2*) del problema 28.7 y simplificando, obtenemos

$$a_n = \frac{-7(2n-1)}{2n(2n+7)}a_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

De este modo,

$$a_1 = -\frac{7}{18}a_0, \quad a_2 = -\frac{21}{44}a_1 = \frac{147}{792}a_0, \quad \cdots$$

y

$$y_1(x) = a_0x^{1/2}\left(1 - \frac{7}{18}x + \frac{147}{792}x^2 + \cdots\right)$$

Sustituyendo $\lambda = -3$ en (2) del problema 28.7 y simplificando, obtenemos

$$a_n = \frac{-7(n-4)}{n(2n-7)}a_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

De este modo, $a_1 = -\frac{21}{5}a_0$, $a_2 = -\frac{7}{3}a_1 = \frac{49}{5}a_0$, $a_3 = -\frac{7}{3}a_2 = -\frac{343}{15}a_0$, $a_4 = 0$

y, dado que $a_4 = 0$, $a_n = 0$ para $n \geq 4$. De este modo,

$$y_2(x) = a_0 x^{-3}\left(1 - \frac{21}{5}x + \frac{49}{5}x^2 - \frac{343}{15}x^3\right)$$

La solución general es

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \\ &= k_1 x^{1/2}\left(1 - \frac{7}{18}x + \frac{147}{792}x^2 + \cdots\right) + k_2 x^{-3}\left(1 - \frac{21}{5}x + \frac{49}{5}x^2 - \frac{343}{15}x^3\right) \end{aligned}$$

donde $k_1 = c_1 a_0$ y $k_2 = c_2 a_0$.

28.9. Encuentre la solución general alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial $3x^2 y'' - xy' + y = 0$.

Aquí, $P(x) = -1/(3x)$ y $q(x) = 1/(3x^2)$; por esto, $x = 0$ es un punto singular regular y el método de Frobenius resulta aplicable. Sustituyendo las ecuaciones de la (*28.2*) a la (*28.4*) en la ecuación diferencial y simplificando, tenemos

$$x^{\lambda}\left[3\lambda^2 - 4\lambda + 1\right]a_0 + x^{\lambda+1}\left[3\lambda^2 + 2\lambda\right]a_1 + \cdots + x^{\lambda+n}\left[3(\lambda+n)^2 - 4(\lambda+n) + 1\right]a_n + \cdots = 0$$

Dividiendo por x^{λ} e igualando todos los coeficientes a cero, encontramos

$$(3\lambda^2 - 4\lambda + 1)a_0 = 0 \qquad (1)$$

y

$$\left[3(\lambda+n)^2 - 4(\lambda+n) + 1\right]a_n = 0 \quad (n \geq 1) \qquad (2)$$

De (*1*) concluimos que la ecuación indicial es $3\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$, que tiene raíces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = \frac{1}{3}$.

Dado que $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2}{3}$, la solución está dada por las ecuaciones (*28.5*) y (*28.6*). Obsérvese que para cualquiera de los dos valores de λ, (*2*) se satisface simplemente eligiendo $a_n = 0$, $n \geq 1$. De este modo,

$$y_1(x) = x^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x \quad y_2(x) = x^{1/3} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^{1/3}$$

y la solución general es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = k_1 x + k_2 x^{1/3}$$

donde $k_1 = c_1 a_0$ y $k_2 = c_2 a_0$.

28.10. Use el método de Frobenius para encontrar una solución alrededor $x = 0$ para la ecuación diferencial $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$.

Aquí, $P(x) = 1/x$ y $Q(x) = 1$, por esto, $x = 0$ es un punto singular regular y el método de Frobenius resulta aplicable. Sustituyendo las ecuaciones de la (*28.2*) a la (*28.4*) en el lado izquierdo de la ecuación diferencial, tal como fue dada, y combinando los coeficientes de las potencias similares de x, obtenemos

$$x^{\lambda}\left[\lambda^2 a_0\right] + x^{\lambda+1}\left[(\lambda+1)^2 a_1\right] + x^{\lambda+2}\left[(\lambda+2)^2 a_2 + a_0\right] + \cdots + x^{\lambda+n}\left[(\lambda+2)^2 a_n + a_{n-2}\right] + \cdots = 0$$

De este modo

$$\lambda^2 a_0 = 0 \qquad (1)$$

$$(\lambda+1)^2 a_1 = 0 \qquad (2)$$

y, para $n \geq 2$, $(\lambda+n)^2 a_n + a_{n-2} = 0$, o bien,

$$a_n = \frac{-1}{(\lambda+n)^2}a_{n-2} \quad (n \geq 2) \qquad (3)$$

En (*3*) se requiere la estipulación $n \geq 2$, porque a_{n-2} no está definido para $n = 0$ o bien $n = 1$. De (*1*) la ecuación indicial es $\lambda^2 = 0$, que tiene raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. De este modo, sólo obtendremos *una* solución de la forma de la ecuación (*28.5*); la segunda solución, $y_2(x)$, tendrá la forma de (*28.7*).

Sustituyendo $\lambda = 0$ en (*2*) y (*3*) encontramos que $a_1 = 0$ y $a_n = -(1/n^2)a_{n-2}$. Dado que $a_1 = 0$ se desprende que $0 = a_3 = a_5 = a_7 = \cdots$. Además,

$$a_2 = -\frac{1}{4}a_0 = -\frac{1}{2^2(1!)^2}a_0 \qquad a_4 = -\frac{1}{16}a_2 = -\frac{1}{2^4(2!)^2}a_0$$

$$a_6 = -\frac{1}{36}a_4 = -\frac{1}{2^6(3!)^2}a_0 \qquad a_8 = -\frac{1}{64}a_6 = \frac{1}{2^8(4!)^2}a_0$$

y, en general, $a_{2k} = \frac{(-1)k}{2^{2k}(k!)^2}a_0 (k = 1, 2, 3, \ldots)$. De este modo,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_0x^0\left[1 - \frac{1}{2^2(1!)^2}x^2 + \frac{1}{2^4(2!)^2}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}x^{2k} + \cdots\right] \\ &= a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} \end{aligned} \qquad (4)$$

28.11. Encuentre la solución general alrededor a $x = 0$ para la ecuación diferencial dada en el problema 28.10.

Una solución está dada por (*4*) del problema 28.10. Debido a que las raíces de la ecuación indicial son iguales, usamos la ecuación (*28.8*) para generar una segunda solución linealmente independiente. La fórmula de recurrencia es (*3*) del problema 28.10, aumentada con (*2*) del problema 28.10 para el caso especial de $n = 1$. De (*2*), $a_1 = 0$, lo que implica que $0 = a_3 = a_5 = a_7 = \cdots$. Entonces, de (*3*),

$$a_2 = \frac{-1}{(\lambda+2)^2}a_0, \quad a_4 = \frac{-1}{(\lambda+4)^2}a_2 = \frac{1}{(\lambda+4)^2(\lambda+2)^2}a_0, \quad \ldots$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (*28.2*) tenemos

$$y(\lambda, x) = a_0\left[x^\lambda - \frac{1}{(\lambda+2)^2}x^{\lambda+2} + \frac{1}{(\lambda+4)^2(\lambda+2)^2}x^{\lambda+4} + \cdots\right]$$

Recuerde que $\frac{\partial}{\partial\lambda}(x^{\lambda+k}) = x^{\lambda+k}\ln x$. (Cuando derivamos con respecto a λ, se puede considerar a x como una constante.)

De este modo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(\lambda, x)}{\partial\lambda} = a_0\Bigg[x^\lambda \ln x &+ \frac{2}{(\lambda+2)^3}x^{\lambda+2} - \frac{1}{(\lambda+2)^2}x^{\lambda+2}\ln x \\ &- \frac{2}{(\lambda+4)^3(\lambda+2)^2}x^{\lambda+4} - \frac{2}{(\lambda+4)^2(\lambda+2)^3}x^{\lambda+4} \\ &+ \frac{1}{(\lambda+4)^2(\lambda+2)^2}x^{\lambda+4}\ln x + \cdots\Bigg] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y_2(x) = \left.\frac{\partial y(\lambda, x)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0} &= a_0\bigg(\ln x + \frac{2}{2^3}x^2 - \frac{1}{2^2}x^2\ln x \\ &\quad - \frac{2}{4^3 2^2}x^4 - \frac{2}{4^2 2^3}x^4 + \frac{1}{4^2 2^2}x^4\ln x + \cdots\bigg) \\ &= (\ln x)a_0\left[1 - \frac{1}{2^2(1!)}x^2 + \frac{1}{2^4(2!)^2}x^4 + \cdots\right] \\ &\quad + a_0\left[\frac{x^2}{2^2(1!)}(1) - \frac{x^4}{2^4(1!)^2}\left(\frac{1}{2}+1\right) + \cdots\right] \\ &= y_1(x)\ln x + a_0\left[\frac{x^2}{2^2(1!)^2}(1) - \frac{x^4}{2^4(1!)^2}\left(\frac{3}{2}\right) + \cdots\right] \end{aligned} \qquad (1)$$

que es la forma pedida en la ecuación (*28.7*). La solución general es $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$.

28.12. Use el método de Frobenius para encontrar una solución alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial $x^2y'' - xy' + y = 0$.

Aquí, $P(x) = -1/x$ y $Q(x) = 1/x^2$, y así que $x = 0$ es un punto singular regular y el método de Frobenius resulta aplicable. Sustituyendo las ecuaciones de la (*28.2*) a la (*28.4*) en el lado izquierdo de la ecuación diferencial, tal como fue dada, y combinando los coeficientes de las potencias similares de x, obtenemos

$$x^{\lambda}(\lambda-1)^2 a_0 + x^{\lambda+1}\left[\lambda^2 a_1\right] + \cdots + x^{\lambda+n}\left[(\lambda+n)^2 - 2(\lambda+n)+1\right]a_n + \cdots = 0$$

De este modo,
$$(\lambda-1)^2 a_0 = 0 \tag{1}$$

y, en general,
$$\left[(\lambda+n)^2 - 2(\lambda+n)+1\right]a_n = 0 \tag{2}$$

De (*1*) la ecuación indicial es $(\lambda-1)^2 = 0$, que tiene raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Sustituyendo $\lambda = 1$ en (*2*), obtenemos $n^2 a_n = 0$, lo cual implica que $a_n = 0$, $n \geq 1$. De este modo, $y_1(x) = a_0 x$.

28.13. Encuentre la solución general alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial dada en el problema 28.12.

Una solución está dada en el problema 28.12. Debido a que las raíces de la ecuación indicial son iguales, usamos la ecuación (*28.8*) para generar una segunda solución linealmente independiente. La fórmula de recurrencia es (*2*) del problema 28.12. Resolviéndola para a_n en términos de λ, encontramos que $a_n = 0$ $(n \geq 1)$, y cuando estos valores se sustituyen en la ecuación (*28.2*), tenemos $y(\lambda, x) = a_0 x^{\lambda}$. De este modo,

$$\frac{\partial y(\lambda, x)}{\partial \lambda} = a_0 x^{\lambda} \ln x$$

y
$$y_2(x) = \left.\frac{\partial y(\lambda, x)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=1} = a_0 x \ln x = y_1(x) \ln x$$

que es precisamente la forma de la ecuación (*28.7*), donde, para esta ecuación diferencial particular, $b_n(\lambda_1) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. La solución general es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = k_1(x) + k_2 x \ln x$$

donde $k_1 = c_1 a_0$ y $k_2 = c_2 a_0$.

28.14. Use el método de Frobenius para encontrar una solución alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial $x^2y'' + (x^2 - 2x)y' + 2y = 0$.

Aquí,
$$P(x) = 1 - \frac{2}{x} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{2}{x^2}$$

de modo que $x = 0$ es un punto singular regular y el método de Frobenius resulta aplicable. Sustituyendo las ecuaciones de la (*28.2*) a la (*28.4*) en el lado izquierdo de la ecuación diferencial, tal como fue dada, y combinando los coeficientes de las potencias similares de x, obtenemos

$$x^{\lambda}\left[(\lambda^2 - 3\lambda + 2)a_0\right] + x^{\lambda+1}\left[(\lambda^2 - \lambda)a_1 + \lambda a_0\right] + \cdots$$
$$+ x^{\lambda+n}\left\{\left[(\lambda+n)^2 - 2(\lambda+n)+2\right]a_n + (\lambda+n-1)a_{n-1}\right\} + \cdots = 0$$

Dividiendo por x^{λ}, factorizando el coeficiente de a_n e igualando a cero el coeficiente de cada potencia de x, obtenemos

$$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)a_0 = 0 \tag{1}$$

y, en general, $[(\lambda+n)-2][(\lambda+n)-1]a_n + (\lambda+n-1)a_{n-1} = 0$, o bien

$$a_n = -\frac{1}{\lambda+n-2}a_{n-1} \quad (n \geq 1) \tag{2}$$

De (*1*), la ecuación indicial es $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, la cual tiene raíces $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$. Dado que $\lambda_1 - \lambda_2 = 1$, un número entero positivo, la solución está dada por las ecuaciones (*28.5*) y (*28.9*). Sustituyendo $\lambda = 2$ en (*2*), obtenemos $a_n = -(1/n)a_{n-1}$, de lo cual obtenemos

$$a_1 = -a_0$$
$$a_2 = -\frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2!}a_0$$
$$a_3 = -\frac{1}{3}a_2 = -\frac{1}{3}\frac{1}{2!}a_0 = -\frac{1}{3!}a_0$$

y, en general, $a_k = \frac{(-1)^k}{k!}a_0$. De este modo,

$$y_1(x) = a_0x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n = a_0x^2e^{-x} \tag{3}$$

28.15. Encuentre la solución general alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial dada en el problema 28.14.

Una solución está dada por (*3*) del problema 28.14 para la raíz indicial $\lambda = 2$. Si intentamos el método de Frobenius con la raíz indicial $\lambda_2 = 1$, la fórmula de recurrencia (*2*) del problema 28.14 se convierte en

$$a_n = -\frac{1}{n-1}a_{n-1}$$

que deja a a_1 indefinida porque el denominador es cero cuando $n = 1$. En vez de ello, debemos usar (*28.10*) para generar una segunda solución linealmente independiente. Usando la fórmula de recurrencia (2) del problema 28.14 para resolver secuencialmente para a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ en términos de λ, encontramos

$$a_1 = -\frac{1}{\lambda-1}a_0, \quad a_2 = \frac{1}{\lambda}a_1 = \frac{1}{\lambda(\lambda-1)}a_0, \quad a_3 = -\frac{1}{\lambda+1}a_2 = \frac{-1}{(\lambda+1)\lambda(\lambda-1)}a_0, \quad \ldots$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (*28.2*), tenemos

$$y(\lambda, x) = a_0\left[x^\lambda - \frac{1}{(\lambda-1)}x^{\lambda+1} + \frac{1}{\lambda(\lambda-1)}x^{\lambda+2} - \frac{1}{(\lambda+1)\lambda(\lambda-1)}x^{\lambda+3} + \cdots\right]$$

y, dado que $\lambda - \lambda_2 = \lambda - 1$,

$$(\lambda-\lambda_2)y(\lambda, x) = a_0\left[(\lambda-1)x^\lambda - x^{\lambda+1} + \frac{1}{\lambda}x^{\lambda+2} - \frac{1}{\lambda(\lambda+1)}x^{\lambda+3} + \cdots\right]$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}[(\lambda-\lambda_2)y(\lambda, x)] = a_0\left[x^\lambda + (\lambda-1)x^\lambda\ln x - x^{\lambda+1}\ln x - \frac{1}{\lambda^2}x^{\lambda+2} + \frac{1}{\lambda}x^{\lambda+2}\ln x + \frac{1}{\lambda^2(\lambda+1)}x^{\lambda+3} + \frac{1}{\lambda(\lambda+1)^2}x^{\lambda+3} - \frac{1}{\lambda(\lambda+1)}x^{\lambda+3}\ln x + \cdots\right]$$

y

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}[(\lambda-\lambda_2)y(\lambda, x)]\bigg|_{\lambda=\lambda_2=1} \\ &= a_0\left(x + 0 - x^2\ln x - x^3 + x^3\ln x + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^4\ln x + \cdots\right) \\ &= (-\ln x)a_0\left(x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \cdots\right) + a_0\left(x - x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \cdots\right) \\ &= -y_1(x)\ln x + a_0x\left(1 - x^2 + \frac{3}{4}x^3 + \cdots\right) \end{aligned}$$

Ésta es la forma pedida en la ecuación (*28.9*), con $d_{-1} = -1$, $d_0 = a_0$, $d_1 = 0$, $d_3 = \frac{3}{4}a_0, \ldots$ La solución general es $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$.

28.16. Use el método de Frobenius para encontrar una solución alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

Aquí,

$$P(x) = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad Q(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

de modo que $x = 0$ es un punto singular regular y el método de Frobenius resulta aplicable. Sustituyendo las ecuaciones de la (*28.2*) a la (*28.4*) en el lado izquierdo de la ecuación diferencial, tal como fue dada, y combinando los coeficientes de las potencias similares de x, obtenemos

$$x^{\lambda}\left[(\lambda^2 - 1)a_0\right] + x^{\lambda+1}\left[(\lambda+1)^2 - 1\right]a_1 + x^{\lambda+2}\left\{\left[(\lambda+2)^2 - 1\right]a_2 + a_0\right\} + \cdots$$
$$+ x^{\lambda+n}\left\{\left[(\lambda+n)^2 - 1\right]a_n + a_{n-2}\right\} + \cdots = 0$$

De este modo

$$(\lambda^2 - 1)a_0 = 0 \tag{1}$$

$$\left[(\lambda+1)^2 - 1\right]a_1 = 0 \tag{2}$$

y para $n \geq 2$, $\left[(\lambda+n)^2 - 1\right]a_n + a_{n-2} = 0$, o bien,

$$a_n = \frac{-1}{(\lambda+n)^2 - 1}a_{n-2} \quad (n \geq 2) \tag{3}$$

De (*1*), la ecuación indicial es $\lambda^2 - 1 = 0$, que tiene raíces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Dado que $\lambda_1 - \lambda_2 = 2$ es un número entero positivo, la solución está dada por las ecuaciones (*28.5*) y (*28.9*). Sustituyendo $\lambda = 1$ en (*2*) y (*3*), obtenemos $a_1 = 0$ y

$$a_n = \frac{-1}{n(n+2)}a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

Como $a_1 = 0$, tenemos que $0 = a_3 = a_5 = a_7 = \cdots$. Además,

$$a_2 = \frac{-1}{2(4)}a_0 = \frac{-1}{2^2 1!2!}a_0, \quad a_4 = \frac{-1}{4(6)}a_2 = \frac{1}{2^4 2!3!}a_0, \quad a_6 = \frac{-1}{6(8)}a_4 = \frac{-1}{2^6 3!4!}a_0$$

y, en general,

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(k+1)!}a_0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

De este modo,

$$y_1(x) = a_0 x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!(n+1)!}x^{2n} \tag{4}$$

28.17. Encuentre la solución general alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial dada en el problema 28.16.

Una solución está dada por (*4*) del problema 28.16 para la raíz indicial $\lambda_1 = 1$. Si intentamos el método de Frobenius con la raíz indicial $\lambda_2 = -1$, la fórmula de recurrencia (*3*) del problema 28.16 se convierte en

$$a_n = -\frac{1}{n(n-2)}a_{n-2}$$

que falla al definir a_2 porque el denominador es cero cuando $n = 2$. En vez de ello, debemos usar la ecuación (*28.10*) para generar una segunda solución linealmente independiente. Usando las ecuaciones (*2*) y (*3*) del problema 28.16 para resolver secuencialmente para $a_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ en términos de λ, encontramos que $0 = a_1 = a_3 = a_5 = \cdots$ y

$$a_2 = \frac{-1}{(\lambda+3)(\lambda+1)}a_0, \quad a_4 = \frac{1}{(\lambda+5)(\lambda+3)^2(\lambda+1)}a_0, \quad \ldots$$

De este modo,

$$y(\lambda, x) = a_0\left[x^{\lambda} - \frac{1}{(\lambda+3)(\lambda+1)}x^{\lambda+2} + \frac{1}{(\lambda+5)(\lambda+3)^2(\lambda+1)}x^{\lambda+4} + \cdots\right]$$

Dado que $\lambda - \lambda_2 = \lambda + 1$,

$$(\lambda - \lambda_2)y(\lambda, x) = a_0\left[(\lambda+1)x^{\lambda} - \frac{-1}{(\lambda+3)}x^{\lambda+2} + \frac{1}{(\lambda+5)(\lambda+3)^2}x^{\lambda+4} + \cdots\right]$$

y

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}[(\lambda-\lambda_2)y(\lambda,x)] = a_0\left[x^\lambda + (\lambda+1)x^\lambda \ln x + \frac{1}{(\lambda+3)^2}x^{\lambda+2} - \frac{1}{(\lambda+3)}x^{\lambda+2}\ln x - \frac{1}{(\lambda+5)^2(\lambda+3)^2}x^{\lambda+4} - \frac{2}{(\lambda+5)(\lambda+3)^3}x^{\lambda+4} + \frac{1}{(\lambda+5)(\lambda+3)^2}x^{\lambda+4}\ln x + \cdots\right]$$

Entonces

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{\partial}{\partial\lambda}[(\lambda-\lambda_2)y(\lambda,x)]\Big|_{\lambda=\lambda_2=-1} \\ &= a_0\left(x^{-1} + 0 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x\ln x - \frac{1}{64}x^3 - \frac{2}{32}x^3 + \frac{1}{16}x^3\ln x + \cdots\right) \\ &= -\frac{1}{2}(\ln x)a_0 x\left(1 - \frac{1}{8}x^2 + \cdots\right) + a_0\left(x^{-1} + \frac{1}{4}x - \frac{5}{64}x^3 + \cdots\right) \\ &= -\frac{1}{2}(\ln x)y_1(x) + a_0 x^{-1}\left(1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{64}x^4 + \cdots\right) \end{aligned} \quad (1)$$

Esto está en la forma de (*28.9*) con $d_{-1} = -\frac{1}{2}$, $d_0 = a_0$, $d_1 = 0$, $d_2 = \frac{1}{4}a_0$, $d_3 = 0$, $d_4 = \frac{-5}{64}a_0$, ... La solución general es $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$.

28.18. Use el método de Frobenius para encontrar una solución alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial $x^2y'' + (x^2 + 2x)y' - 2y = 0$.

Aquí,

$$P(x) = 1 + \frac{2}{x} \quad \text{y} \quad Q(x) = -\frac{2}{x^2}$$

de modo que $x = 0$ es un punto singular regular y el método de Frobenius resulta aplicable. Sustituyendo las ecuaciones (*28.2*) a (*28.4*) en el lado izquierdo de la ecuación diferencial, tal como fue dada, y combinando los coeficientes de potencias de x similares, obtenemos

$$x^\lambda\left[(\lambda^2+\lambda-2)a_0\right] + x^{\lambda+1}\left[(\lambda^2+3\lambda)a_1 + \lambda a_0\right] + \cdots + x^{\lambda+n}\left\{\left[(\lambda+n)^2 + (\lambda+n) - 2\right]a_n + (\lambda+n-1)a_{n-1}\right\} + \cdots = 0$$

Dividiendo por x^λ, factorizando el coeficiente de a_n e igualando a cero el coeficiente de cada potencia de x, obtenemos

$$(\lambda^2+\lambda-2)a_0 = 0 \quad (1)$$

y, para $n \geq 1$,

$$[(\lambda+n)+2][(\lambda+n)-1]a_n + (\lambda+n-1)a_{n-1} = 0$$

que es equivalente a

$$a_n = -\frac{1}{\lambda+n+2}a_{n-1} \quad (n \geq 1) \quad (2)$$

De (*1*), la ecuación indicial es $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, que tiene raíces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$. Dado que $\lambda_1 - \lambda_2 = 3$ es un número entero positivo, la solución está dada por las ecuaciones (*28.5*) y (*28.9*). Sustituyendo $\lambda = 1$ en (*2*), obtenemos $a_n = [-1/(n+3)]a_{n-1}$, que a su vez produce

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{4}a_0 = -\frac{3!}{4!}a_0 \\ a_2 &= -\frac{1}{5}a_1 = \left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{3!}{4!}\right)a_0 = \frac{3!}{5!}a_0 \\ a_3 &= -\frac{1}{6}a_2 = -\frac{3!}{6!}a_0 \end{aligned}$$

y, en general,

$$a_k = \frac{(-1)^k 3!}{(k+3)!} a_o$$

De aquí,
$$y_1(x) = a_0 x \left[1 + 3! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+3)!} \right] = a_0 x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3! x^n}{(n+3)!}$$

que se puede simplificar a

$$y_1(x) = \frac{3a_0}{x^2}(2 - 2x + x^2 - 2e^{-x}) \qquad (3)$$

28.19. Encuentre la solución general alrededor de $x = 0$ para la ecuación diferencial dada en el problema 28.18.

Una solución está dada por (*3*) del problema 28.18 para la raíz indicial $\lambda_1 = 1$. Si intentamos el método de Frobenius con la raíz indicial $\lambda_2 = -2$, la fórmula de recurrencia (*2*) del problema 28.18 se convierte en

$$a_n = -\frac{1}{n} a_{n-1} \qquad (1)$$

que realmente define toda $a_n (n \geq 1)$. Resolviendo secuencialmente obtenemos

$$a_1 = -a_0 = -\frac{1}{1!} a_0 \quad a_2 = -\frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{2!} a_0$$

y, en general, $a_k = (-1)^k a_0 / k!$ Por lo tanto,

$$y_2(x) = a_0 x^{-2} \left[1 - \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{(-1)^k}{k!} x^k + \cdots \right]$$
$$= a_0 x^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = a_0 x^{-2} e^{-x}$$

Ésta es precisamente la forma de (*28.9*), con $d_{-1} = 0$ y $d_n = (-1)^n a_0 / n!$ La solución general es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

28.20. Encuentre una expresión general para la ecuación indicial de (*28.1*).

Como $x = 0$ es un punto singular regular, $xP(x)$ y $x^2Q(x)$ son analíticas cerca del origen y se pueden expandir allí en series de Taylor. De este modo,

$$xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots$$
$$x^2 Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots$$

Dividiendo por x y x^2, respectivamente, tenemos

$$P(x) = p_0 x^{-1} + p_1 + p_2 x + \cdots \quad Q(x) = q_0 x^{-2} + q_1 x^{-1} + q_2 + \cdots$$

Sustituyendo estos dos resultados con las ecuaciones (*28.2*) a la (*28.4*) en la ecuación (*28.1*) y combinando, obtenemos

$$x^{\lambda-2} [\lambda(\lambda-1)a_0 + \lambda a_0 p_0 + a_0 q_0] + \cdots = 0$$

que se cumple sólo si

$$a_0 [\lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0] = 0$$

Dado que $a_0 \neq 0$ (a_0 es una constante arbitraria, por esto se puede elegir distinta de cero), la ecuación indicial es

$$\lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0 = 0 \qquad (1)$$

28.21. Encuentre la ecuación indicial de $x^2y'' + xe^x y' + (x^3 - 1)y = 0$ si la solución se requiere cerca de $x = 0$.

Aquí

$$P(x) = \frac{e^x}{x} \quad \text{y} \quad Q(x)x - \frac{1}{x^2}$$

y tenemos

$$xP(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$
$$x^2Q(x) = x^3 - 1 = -1 + 0x + 0x^2 + 1x^3 + 0x^4 + \cdots$$

de lo cual $p_0 = 1$ y $q_0 = -1$. Usando (*1*) del problema 28.20 obtenemos la ecuación indicial como $\lambda^2 - 1 = 0$.

28.22. Resuelva el problema 28.9 por un método alternativo.

La ecuación diferencial dada, $3x^2y'' - xy' + y = 0$, es un caso especial de la *ecuación de Euler*

$$b_n x^n y^{(n)} + b_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + b_2x^2y'' + b_1xy' + b_0y = \phi(x) \tag{1}$$

donde $b_j (j = 0, 1, \ldots, n)$ es una constante. La ecuación de Euler siempre se puede transformar en una ecuación diferencial lineal con *coeficientes constantes* por el cambio de variables

$$z = \ln x \quad \text{o bien} \quad x = e^z \tag{2}$$

De (2), de la regla de la cadena y de la derivada de un producto, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz} = e^{z}\frac{dy}{dz} \tag{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{-z}\frac{dy}{dz}\right) = \left[\frac{d}{dz}\left(e^{-z}\frac{dy}{dz}\right)\right]\frac{dz}{dx}$$
$$= \left[-e^{-z}\left(\frac{dy}{dz}\right) + e^{-z}\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)\right]e^{-z} = e^{-2z}\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right) - e^{-2z}\left(\frac{dy}{dz}\right) \tag{4}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2), (*3*) y (*4*) en la ecuación diferencial dada y simplificando, obtenemos

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{4}{3}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{3}y = 0$$

Usando el método del capítulo 9, encontramos que la solución de esta última ecuación es $y = c_1e^z + c_2e^{(1/3)z}$. Luego, usando (2) y observando que $e^{(1/3)z} = (e^z)^{(1/3)}$, tenemos como antes,

$$y = c_1x + c_2x^{1/3}$$

28.23. Resuelva la ecuación diferencial del problema 28.12 por un método alternativo.

La ecuación diferencial dada, $x^2y'' - xy' + y = 0$, es un caso especial de la *ecuación de Euler*, (*1*) del problema 28.22. Usando las transformaciones (2), (*3*) y (*4*) del problema 28.22, reducimos la ecuación dada a

$$\frac{d^2y}{dz^2} - 2\frac{dy}{dz} + y = 0$$

La solución para esta ecuación es (véase el capítulo 9) $y = c_1e^z + c_2ze^z$. Entonces, usando (2) del problema 28.22, tenemos la solución de la ecuación diferencial original como

$$y = c_1x + c_2x\ln x$$

tal como antes.

28.24. Encuentre la solución cercana a $x = 0$ de la *ecuación hipergeométrica*

$$x(1-x)y'' + [C - (A+B+1)x]y' - ABy = 0$$

donde A y B son cualesquiera números reales, y C es cualquier número real no entero.

Dado que $x = 0$ es un punto singular regular, el método de Frobenius resulta aplicable. Sustituyendo las ecuaciones de la (*28.2*) a la (*28.4*) en la ecuación diferencial, simplificando e igualando a cero el coeficiente de cada potencia de x, obtenemos

$$\lambda^2 + (C-1)\lambda = 0 \tag{1}$$

como la ecuación indicial y

$$a_{n+1} = \frac{(\lambda+n)(\lambda+n+A+B)+AB}{(\lambda+n+1)(\lambda+n+C)}a_n \tag{2}$$

como la fórmula de recurrencia. Las raíces de (*1*) son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1-C$; por esto, $\lambda_1 - \lambda_2 = C-1$. Como C no es un número entero, la solución de la ecuación hipergeométrica está dada por las ecuaciones (*28.5*) y (*28.6*).

Sustituyendo $\lambda = 0$ en (2), tenemos

$$a_{n+1} = \frac{n(n+A+B)+AB}{(n+1)(n+C)}a_n$$

que es equivalente a

$$a_{n+1} = \frac{(A+n)(B+n)}{(n+1)(n+C)}a_n$$

De este modo,

$$a_1 = \frac{AB}{C}a_0 = \frac{AB}{1!C}a_0$$
$$a_2 = \frac{(A+1)(B+1)}{2(C+1)}a_1 = \frac{A(A+1)B(B+1)}{2!C(C+1)}a_0$$
$$a_3 = \frac{(A+2)(B+2)}{3(C+2)}a_2 = \frac{A(A+1)(A+2)B(B+1)(B+2)}{3!C(C+1)(C+2)}a_0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

y $y_1(x) = a_0F(A, B; C; x)$, donde

$$F(A, B; C; x) = 1 + \frac{AB}{1!C}x + \frac{A(A+1)B(B+1)}{2!C(C+1)}x^2 + \frac{A(A+1)(A+2)B(B+1)(B+2)}{3!C(C+1)(C+2)}x^3 + \cdots$$

La serie $F(A, B; C; x)$ se conoce como la serie hipergeométrica; se puede demostrar que esta serie converge para $-1 < x < 1$. Se acostumbra asignar a la constante arbitraria a_0 el valor 1. Entonces, $y_1(x) = F(A, B; C; x)$ y la serie hipergeométrica es una solución de la ecuación hipergeométrica.

Para encontrar $y_2(x)$ sustituimos $\lambda = 1-C$ en (2) y obtenemos

$$a_{n+1} = \frac{(n+1-C)(n+1+A+B-C)+AB}{(n+2-C)(n+1)}a_n$$

o bien
$$a_{n+1} = \frac{(A-C+n+1)(B-C+n+1)}{(n+2-C)(n+1)}a_n$$

Resolviendo para a_n en términos de a_0 y estableciendo nuevamente $a_0 = 1$, tenemos que

$$y_2(x) = x^{1-C}F(A-C+1, B-C+1; 2-C; x)$$

La solución general es $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$.

PROBLEMAS ADICIONALES

En los problemas del 28.25 al 28.33, encuentre dos soluciones linealmente independientes para las ecuaciones diferenciales dadas.

28.25. $2x^2y'' - xy' + (1-x)y = 0$

28.26. $2x^2y'' + (x^2 - x)y' + y = 0$

28.27. $3x^2y'' - 2xy' - (2 + x^2)y = 0$

28.28. $xy'' + y' - y = 0$

28.29. $x^2y'' + xy' + x^3y = 0$

28.30. $x^2y'' + (x - x^2)y' - y = 0$

28.31. $xy'' - (x+1)y' - y = 0$

28.32. $4x^2y'' + (4x + 2x^2)y' + (3x - 1)y = 0$

28.33. $x^2y'' + (x^2 - 3x)y' - (x - 4)y = 0$

En los problemas del 28.34 al 28.38, encuentre la solución general para las ecuaciones dadas usando el método descrito en el problema 28.22.

28.34. $4x^2y'' + 4xy' - y = 0$

28.35. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

28.36. $2x^2y'' + 11xy' + 4y = 0$

28.37. $x^2y'' - 2y = 0$

28.38. $x^2y'' - 6xy' = 0$

ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES CLÁSICAS

29

ECUACIONES DIFERENCIALES CLÁSICAS

Debido a que algunas ecuaciones diferenciales especiales se han estudiado durante años, tanto por la belleza estética de sus soluciones como porque nos brindan muchas aplicaciones físicas, se pueden considerar *clásicas*. Ya hemos visto un ejemplo de una ecuación así, la ecuación de *Legendre*, en el problema 27.13.

Nos enfocaremos en cuatro ecuaciones clásicas: la ecuación diferencial de *Chebyshev*, nombrada así en honor de Pafnuty Chebyshev (1821-1894); la ecuación diferencial de *Hermite*, llamada así por Charles Hermite (1822-1901); la ecuación diferencial de *Laguerre*, nombrada así en homenaje a Edmond Laguerre (1834-1886), y la ecuación diferencial de *Legendre*, titulada así por Adrien Legendre (1752-1833). Estas ecuaciones se dan en la tabla 29-1.

Tabla 29-1

(Nota: $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$)

Ecuación diferencial de Chebyshev	$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$
Ecuación diferencial de Hermit	$y'' - 2xy' + 2ny = 0$
Ecuación diferencial de Laguerre	$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$
Ecuación diferencial de Legendre	$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$

SOLUCIONES POLINOMIALES Y CONCEPTOS ASOCIADOS

Una de las propiedades más importantes que poseen estas cuatro ecuaciones, es que sus soluciones son *polinomios*, naturalmente llamados polinomios de Chebyshev, polinomios de Hermite, etcétera.

Hay muchas maneras de obtener estas soluciones polinomiales. Una de las maneras es emplear técnicas de series, como las que se discutieron en los capítulos 27 y 28. Un modo alternativo consiste en el uso de las fórmulas de *Rodrigues* (1794-1851), nombradas así en honor de O. Rodrigues, un banquero francés. Este método utiliza diferenciaciones repetidas (véase, por ejemplo, el problema 29.1).

Estas soluciones polinomiales se pueden obtener también por el uso de *funciones generadoras*. En esta aproximación, las expansiones de las series infinitas de las funciones específicas "generan" los polinomios deseados (véase el problema 29.3). Se debería notar que, a partir de una perspectiva computacional, esta aproximación se vuelve más consumidora de tiempo cuanto más lejos vamos en las series.

Estos polinomios disfrutan de varias propiedades, siendo la *ortogonalidad* la más importante. Esta condición, que se expresa en términos de una integral, hace posible que funciones "más complicadas" se puedan expresar en términos de esos polinomios, de manera muy similar a las expansiones que se verán en el capítulo 33. Decimos que los polinomios son ortogonales *con respecto a una función de peso* (véase, por ejemplo, el problema 29.2).

Ahora enlistamos los primeros cinco polinomios ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) de cada tipo:

- Polinomios de *Chebyshev*, $T_n(x)$:
  - $T_0(x) = 1$
  - $T_1(x) = x$
  - $T_2(x) = 2x^2 - 1$
  - $T_3(x) = 4x^3 - 3x$
  - $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$
- Polinomios de *Hermite*, $H_n(x)$:
  - $H_0(x) = 1$
  - $H_1(x) = 2x$
  - $H_2(x) = 4x^2 - 2$
  - $H_3(x) = 8x^3 - 12x$
  - $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$
- Polinomios de *Laguerre*, $L_n(x)$:
  - $L_0(x) = 1$
  - $L_1(x) = -x + 1$
  - $L_2(x) = x^2 - 4x + 2$
  - $L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$
  - $L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$
- Polinomios de *Legendre*, $P_n(x)$:
  - $P_0(x) = 1$
  - $P_1(x) = x$
  - $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
  - $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
  - $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

PROBLEMAS RESUELTOS

29.1. Siendo $n = 2$ en la ecuación diferencial de Hermite, use la fórmula de Rodrigues para encontrar la solución polinomial.

La ecuación diferencial de Hermite se convierte en $y'' - 2xy' + 4y = 0$. La fórmula de Rodrigues para los polinomios de Hermite, $H_n(x)$, está dada por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

Con $n = 2$, tenemos $H_2(x) = (-1)^2 e^{x^2} \dfrac{d^2}{dx^2}(e^{-x^2}) = 4x^2 - 2$. Esto coincide con nuestro listado anterior y vía sustitución directa en la ecuación diferencial, vemos que $4x^2 - 2$ es en verdad una solución.

Notas: 1) Ningún múltiplo de $4x^2 - 2$ distinto de cero es también una solución. 2) Cuando $n = 0$ en la fórmula de Rodrigues, "la 0-ésima derivada" se define como la propia función. Es decir,

$$H_0(x) = (-1)^0 e^{x^2} \frac{d^0}{dx^0}(e^{-x^2}) = 1(e^{x^2})(e^{-x^2}) = 1.$$

29.2. Dados los polinomios de Laguerre $L_1(x) = -x + 1$ y $L_2(x) = x^2 - 4x + 2$, demuestre que estas dos funciones son *ortogonales con respecto a la función de peso* e^{-x} *sobre el intervalo* $(0, \infty)$.

La ortogonalidad de estos polinomios con respecto a las funciones de peso dadas significa que $\int_0^\infty (-x+1)(x^2 - 4x + 2)e^{-x}dx = 0$. Esta integral es verdaderamente cero, tal como se verifica por integración por partes y aplicando la regla de L'Hopital.

29.3. Usando la función *generadora* para los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$, encuentre $T_0(x)$, $T_1(x)$ y $T_2(x)$.

La función generadora deseada está dada por

$$\frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n.$$

Llevando a cabo la división del lado izquierdo de la ecuación y combinando las potencias similares de t producimos:

$$(1)t^0 + (x)t^1 + (2x^2 - 1)t^2 + \cdots$$

De aquí, $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = 1$ y $T_2(x) = 2x^2 - 1$, que concuerda con nuestra lista anterior. Observamos que, debido a la naturaleza del cálculo, el uso de la función generadora no ofrece un modo eficiente para obtener realmente los polinomios de Chebyshev.

29.4. Siendo $n = 4$ en la ecuación diferencial de Legendre verifique que $P_4(x) = \dfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$ es una solución.

La ecuación diferencial se convierte en $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 20y = 0$. Tomando la primera y la segunda derivadas de $P_4(x)$, obtenemos $P_4'(x) = \dfrac{1}{2}(35x^3 - 15x)$ y $P_4''(x) = \dfrac{1}{2}(105x^2 - 15)$. La sustitución directa en la ecuación diferencial, seguida por el agrupamiento de los términos similares de x,

$$(1 - x^2)P_4''(x) - 2xP_4'(x) + 20P_4(x) \equiv 0.$$

29.5. Los polinomios de Hermite, $H_n(x)$, satisfacen la *relación de recurrencia*

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Verifique esta relación para $n = 3$.

Si $n = 3$, entonces debemos demostrar que la ecuación $H_4(x) = 2xH_3(x) - 6H_2(x)$ se satisface con los polinomios de Hermite adecuados. La sustitución directa da

$$16x^4 - 48x^2 + 12 = (2x)(8x^3 - 12x) - 6(4x^2 - 2).$$

Vemos que el lado derecho iguala al lado izquierdo, por estó, se verifica la relación de recurrencia.

29.6. Los polinomios de Legendre satisfacen la fórmula de recurrencia

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

Use esta fórmula para encontrar $P_5(x)$.

Con $n = 4$ y resolviendo para $P_5(x)$, tenemos $P_5(x) = \frac{1}{5}(9xP_4(x) - 4P_3(x))$. Sustituyendo para $P_3(x)$ y para $P_4(x)$, tenemos $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$.

29.7. Los polinomios de Chebyshev, $T_n(x)$, también se pueden obtener usando la fórmula $T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}(x))$. Verifique esta fórmula para $T_2(x) = 2x^2 - 1$.

Con $n = 2$, tenemos $\cos(2\cos^{-1}(x))$. Se establece $\alpha = \cos^{-1}(x)$. Entonces, $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha) = \cos^2(\alpha) - (1 - \cos^2(\alpha)) = 2\cos^2(\alpha) - 1$. Pero si $\alpha = \cos^{-1}(x)$, entonces $x = \cos(\alpha)$. De aquí, $\cos(2\cos^{-1}(x)) = 2x^2 - 1 = T_2(x)$.

29.8. La ecuación diferencial $(1 - x^2)y'' + Axy' + By = 0$ se asemeja mucho tanto a la ecuación de Chebyshev como a la de Legendre, donde A y B son constantes. Un teorema de ecuaciones diferenciales establece que esta ecuación diferencial tiene dos soluciones de polinomios finitos, uno de grado m, el otro de grado n, si y sólo si $A = m + n - 1$ y $B = -mn$, donde n y m son números enteros no negativos y $n + m$ es impar.

Por ejemplo, la ecuación $(1 - x^2)y'' + xy' - 6y = 0$ tiene soluciones polinomiales de grados 2 y 3: $y = 1 + 3x^2$ y $y = x + \frac{x^3}{3}$ (éstos se obtienen usando las técnicas de series vistas en el capítulo 27).

Aquí observamos que $A = 4 = n + m - 1$ y $B = -6 = -mn$ necesariamente implican que $m = 2$ y $n = 3$ (o inversamente). Por esto, nuestro teorema se verifica para esta ecuación.

Determine si las tres ecuaciones diferenciales siguientes tienen dos soluciones polinomiales.

a) $(1 - x^2)y'' + 6xy' - 12y = 0$; *b*) $(1 - x^2)y'' + xy' + 8y = 0$; *c*) $(1 - x^2)y'' - xy' + 3y = 0$.

a) Aquí $A = 6 = n + m - 1$, $B = -mn = -12$ implica $m = 3$, $n = 4$; de aquí, tenemos dos soluciones de polinomios finitos, uno de grado 3, y el otro de grado 4.

b) Aquí $A = 1$ y $B = 8$; esto implica que $m = 2$, $n = -4$; por lo tanto, no tenemos esas dos soluciones. (Tendremos una solución polinomial, de grado 2.)

c) Dado que $A = -1$, $B = 3$ implica $m = \sqrt{3}$, $n = -\sqrt{3}$, no tenemos dos soluciones polinomiales para la ecuación diferencial.

PROBLEMAS ADICIONALES

29.9. Verifique que $H_2(x)$ y $H_3(x)$ son ortogonales con respecto a la función de peso e^{-x^2} en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

29.10. Encuentre $H_5(x)$ usando la fórmula de recurrencia $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$.

29.11. La fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre está dada por

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

Use esta fórmula para obtener $P_5(x)$. Compare esto con los resultados dados en el problema 29.6.

29.12. Encuentre $P_6(x)$ siguiendo el procedimiento dado en el problema 29.6.

29.13. Siguiendo el procedimiento del problema 29.7, demuestre que

$$\cos(3\cos^{-1}(x)) = 4x^3 - 3x = T_3(x).$$

29.14. Los polinomios de Chebyshev satisfacen la fórmula de recurrencia

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0.$$

Use este resultado para obtener $T_5(x)$.

29.15. Los polinomios de Legendre satisfacen la condición $\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2 \, dx = \frac{2}{2n+1}$. Demuestre que esto es verdad para $P_3(x)$.

29.16. Los polinomios de Laguerre satisfacen la condición $\int_{0}^{\infty} e^{-x}(L_n(x))^2 \, dx = (n!)^2$. Demuestre que esto es verdad para $L_2(x)$.

29.17. Los polinomios de Laguerre también satisfacen la ecuación $L_n'(x) - nL_{n-1}'(x) + nL_{n-1}(x) = 0$. Demuestre que esto es verdad para $L_3(x)$.

29.18. Genere $H_1(x)$ usando la ecuación $e^{2tx-t^2} = \sum_{0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}$.

29.19. Considere la ecuación de "operador" $\frac{d^m}{dx^m} L_n(x)$, donde $m, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Los polinomios deducidos de esta ecuación se llaman *polinomios asociados de Laguerre* y se indican con $L_n^m(x)$. Encuentre $L_3^2(x)$ y $L_4^1(x)$.

29.20. Determine si las cinco ecuaciones diferenciales siguientes tienen dos soluciones de polinomiales; de ser así, dé los grados de las soluciones: *a*) $(1-x^2)y'' + 5xy' - 5y = 0$; *b*) $(1-x^2)y'' + 8xy' - 18y = 0$; *c*) $(1-x^2)y'' + 2xy' + 10y = 0$; *d*) $(1-x^2)y'' + 14xy' - 56y = 0$; *e*) $(1-x^2)y'' + 12xy' - 22y = 0$.

FUNCIONES GAMMA Y DE BESSEL

30

FUNCIÓN GAMMA

La *función gamma*, $\Gamma(p)$, para cualquier número real positivo p, está definida por

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx \tag{30.1}$$

En consecuencia, $\Gamma(1) = 1$ y para cualquier número real positivo p,

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \tag{30.2}$$

Además, cuando $p = n$, un número entero positivo,

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{30.3}$$

De este modo, la función gamma (que se define sobre todos los números reales positivos) es una extensión de la función factorial (que se define únicamente sobre los números enteros no negativos).

La ecuación (*30.2*) se puede volver a escribir como

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\Gamma(p+1) \tag{30.4}$$

que define la función gamma iterativamente para todos los valores de p negativos no enteros. $\Gamma(0)$ permanece indefinida, porque

$$\lim_{p\to 0^+} \Gamma(p) = \lim_{p\to 0^+} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{p\to 0^-} \Gamma(p) = \lim_{p\to 0^-} \frac{\Gamma(p+1)}{p} = -\infty$$

Entonces, de la ecuación (*30.4*), tenemos que $\Gamma(p)$ es indefinida para valores de p de números enteros negativos.

La tabla 30-1 enlista valores de la función gamma en el intervalo $1 \le p < 2$. Estos valores tabulares se usan con las ecuaciones (*30.2*) y (*30.4*) para generar valores de $\Gamma(p)$ en otros intervalos.

FUNCIONES DE BESSEL

Aquí p representa cualquier número real. La *función de Bessel de la primera clase de orden p*, $J_p(x)$, es

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{2^{2k+p} k!\,\Gamma(p+k+1)} \tag{30.5}$$

La función $J_p(x)$ es una solución alrededor del punto singular regular $x = 0$ de la *ecuación diferencial de Bessel de orden p*:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \tag{30.6}$$

De hecho, $J_p(x)$ es aquella solución de la ecuación (*30.6*) garantizada por el teorema 28.1.

OPERACIONES ALGEBRAICAS SOBRE SERIES INFINITAS

Cambiando el índice mudo. El índice mudo de una serie infinita se puede cambiar a voluntad sin alterar la serie. Por ejemplo,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(p+1)!}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots$$

Cambio de variables. Considere la serie infinita $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}$. Si hacemos el cambio de variables $j = k+1$, o $k = j-1$, entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}$$

Obsérvese que un cambio de variables generalmente modifica los límites sobre la sumatoria. Por ejemplo, si $j = k+1$, tenemos que $j = 1$ cuando $k = 0$, $j = \infty$ cuando $k = \infty$, y, como k va de 0 a ∞, j va de 1 a ∞.

Las dos operaciones dadas antes generalmente se usan en concordancia. Por ejemplo,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}=\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{(j-1)!}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}$$

Aquí la segunda serie resulta del cambio de variables $j = k + 2$ en la primera serie, en tanto que la tercera serie es el resultado de simplemente cambiar el índice mudo en la segunda serie de j a k. Obsérvese que las tres series se igualan a

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots=e-1$$

PROBLEMAS RESUELTOS

30.1. Determine $\Gamma(3.5)$.

De la tabla 30-1 tenemos que $\Gamma(1.5) = 0.8862$, redondeado a cuatro cifras decimales. Usando la ecuación (*30.2*) con $p = 2.5$, obtenemos $\Gamma(3.5) = (2.5)\Gamma(2.5)$. Pero también de la ecuación (*30.2*), con $p = 1.5$, tenemos $\Gamma(2.5) = (1.5)\Gamma(1.5)$. De este modo, obtenemos $\Gamma(3.5) = (2.5)(1.5)\ \Gamma(1.5) = (3.75)(0.8862) = 3.3233$.

30.2. Determine $\Gamma(-0.5)$.

De la tabla 30-1 tenemos que $\Gamma(1.5) = 0.8862$, redondeado a cuatro cifras decimales. Usando la ecuación (*30.4*) con $p = 0.5$, obtenemos $\Gamma(0.5) = 2\Gamma(1.5)$. Pero también de la ecuación (*30.4*), con $p = -0.5$, tenemos $\Gamma(-0.5) = -2\Gamma(0.5)$. De este modo, $\Gamma(-0.5) = (-2)(2)\ \Gamma(1.5) = -4(0.8862) = -3.5448$.

30.3. Determine $\Gamma(-1.42)$.

Repetidamente, de la ecuación (*30.4*) tenemos que

$$\Gamma(-1.42)=\frac{1}{-1.42}\Gamma(-0.42)=\frac{1}{-1.42}\left(\frac{1}{-0.42}\Gamma(0.58)\right)=\frac{1}{1.42(0.42)}\left(\frac{1}{0.58}\Gamma(1.58)\right)$$

Tabla 30-1 La función gamma $(1.00 \leq x \leq 1.99)$

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1.00	1.0000 0000	1.25	0.9064 0248	1.50	0.8862 2693	1.75	0.9190 6253
1.01	0.9943 2585	1.26	0.9043 9712	1.51	0.8865 9169	1.76	0.9213 7488
1.02	0.9888 4420	1.27	0.9025 0306	1.52	0.8870 3878	1.77	0.9237 6313
1.03	0.9835 4995	1.28	0.9007 1848	1.53	0.8875 6763	1.78	0.9262 2731
1.04	0.9794 3820	1.29	0.8990 4159	1.54	0.8881 7766	1.79	0.9287 6749
1.05	0.9735 0427	1.30	0.8974 7070	1.55	0.8888 6835	1.80	0.9313 8377
1.06	0.9687 4365	1.31	0.8960 0418	1.56	0.8896 3920	1.81	0.9340 7626
1.07	0.9641 5204	1.32	0.8946 4046	1.57	0.8904 8975	1.82	0.9368 4508
1.08	0.9597 2531	1.33	0.8933 7805	1.58	0.8914 1955	1.83	0.9396 9040
1.09	0.9554 5949	1.34	0.8922 1551	1.59	0.8924 2821	1.84	0.9426 1236
1.10	0.9513 5077	1.35	0.8911 5144	1.60	0.8935 1535	1.85	0.9456 1118
1.11	0.9473 9550	1.36	0.8901 8453	1.61	0.8946 8061	1.86	0.9486 8704
1.12	0.9435 9019	1.37	0.8893 1351	1.62	0.8959 2367	1.87	0.9518 4019
1.13	0.9399 3145	1.38	0.8885 3715	1.63	0.8972 4423	1.88	0.9550 7085
1.14	0.9364 1607	1.39	0.8878 5429	1.64	0.8986 4203	1.89	0.9583 7931
1.15	0.9330 4093	1.40	0.8872 6382	1.65	0.9001 1682	1.90	0.9617 6583
1.16	0.9298 0307	1.41	0.8867 6466	1.66	0.9016 6837	1.91	0.9652 3073
1.17	0.9266 9961	1.42	0.8863 5579	1.67	0.9032 9650	1.92	0.9787 7431
1.18	0.9237 2781	1.43	0.8860 3624	1.68	0.9050 0103	1.93	0.9723 9692
1.19	0.9208 8504	1.44	0.8858 0506	1.69	0.9067 8182	1.94	0.9760 9891
1.20	0.9181 6874	1.45	0.8856 6138	1.70	0.9086 3873	1.95	0.9798 8065
1.21	0.9155 7649	1.46	0.8856 0434	1.71	0.9105 7168	1.96	0.9837 4254
1.22	0.9131 0595	1.47	0.8856 3312	1.72	0.9125 8058	1.97	0.9876 8498
1.23	0.9107 5486	1.48	0.8857 4696	1.73	0.9146 6537	1.98	0.9917 0841
1.24	0.9085 2106	1.49	0.8859 4513	1.74	0.9168 2603	1.99	0.9958 1326

De la tabla 30-1, tenemos $\Gamma(1.58) = 0.8914$, redondeado a cuatro cifras decimales; de aquí,

$$\Gamma(-1.42) = \frac{0.8914}{1.42(0.42)(0.58)} = 2.5770$$

30.4. Demuestre que $\Gamma(p+1)p\ \Gamma(p)$, $p > 0$.

Usando *(30.1)* y la integración por partes, tenemos

$$\begin{aligned}\Gamma(p+1) &= \int_0^\infty x^{(p+1)-1}e^{-x}\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_0^r x^p e^{-x}\,dx \\ &= \lim_{r\to\infty}\left[-x^p e^{-x}\Big|_0^r + \int_0^r p x^{p-1}e^{-x}\,dx\right] \\ &= \lim_{r\to\infty}(-r^p e^{-r} + 0) + p\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx = p\Gamma(p)\end{aligned}$$

El resultado $\lim_{r\to\infty} r^p e^{-r} = 0$ se obtiene fácilmente escribiendo $r^p e^{-r}$ como r^p/e^r y luego usando la regla de L'Hopital.

30.5. Demuestre que $\Gamma(1) = 1$.

Usando la ecuación *(30.1)*, encontramos que

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{1-1} e^{-x} dx = \lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-x} dx$$
$$= \lim_{r\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^r = \lim_{r\to\infty} (-e^{-r} + 1) = 1$$

30.6. Demuestre que si $p = n$, un número entero positivo, entonces $\Gamma(n+1) = n!$

La prueba es por inducción. Primero consideramos $n = 1$. Usando el problema 30.4 con $p = 1$ y luego el problema 30.5, tenemos

$$\Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1(1) = 1 = 1!$$

A continuación, asumimos que $\Gamma(n+1) = n!$ se cumple para $n = k$ y luego tratamos de probar su validez para $n = k+1$:

$$\Gamma[(k+1)+1] = (k+1)\Gamma(k+1) \qquad \text{(Problema 30.4 con } p = k+1\text{)}$$
$$= (k+1)(k!) \qquad \text{(de la hipótesis de inducción)}$$
$$= (k+1)!$$

De este modo, $\Gamma(n+1) = n!$ es verdadera por inducción.

Obsérvese que ahora podemos usar esta igualdad para definir 0!; es decir,

$$0! = \Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1$$

30.7. Demuestre que $\Gamma(p+k+1) = (p+k)(p+k-1)\cdots(p+2)(p+1)\Gamma(p+1)$.

Usando el problema 30.4 repetidamente, donde primero p es reemplazada por $p + k$, luego por $p + k - 1$, etc., obtenemos

$$\Gamma(p+k+1) = \Gamma[(p+k)+1] = (p+k)\Gamma(p+k)$$
$$= (p+k)\Gamma[(p+k-1)+1] = (p+k)(p+k-1)\Gamma(p+k-1)$$
$$= \cdots = (p+k)(p+k-1)\cdots(p+2)(p+1)\Gamma(p+1)$$

30.8. Exprese $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ como una función gamma.

Estableciendo $z = x^2$; de aquí $x = z^{1/2}$ y $dx = \frac{1}{2} z^{-1/2} dz$. Sustituyendo estos valores en la integral y observando que x va desde 0 hasta ∞, tal como z, tenemos

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-z} \left(\frac{1}{2} z^{-1/2}\right) dz = \frac{1}{2} \int_0^\infty z^{(1/2)-1} e^{-z} dz = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

La última igualdad se desprende de la ecuación *(30.1)*, con la variable sustituta x reemplazada por z y con $p = \frac{1}{2}$.

30.9. Use el método de Frobenius para encontrar una solución a la ecuación de Bessel de orden p:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

Sustituyendo las ecuaciones de la *(28.2)* a la *(28.4)* en la ecuación de Bessel y simplificando, encontramos que

$$x^\lambda(\lambda^2 - p^2)a_0 + x^{\lambda+1}\left[(\lambda+1)^2 - p^2\right]a_1 + x^{\lambda+2}\left\{\left[(\lambda+2)^2 - p^2\right]a_2 + a_0\right\} + \cdots$$
$$+ x^{\lambda+n}\left\{\left[(\lambda+n)^2 - p^2\right]a_n + a_{n-2}\right\} + \cdots = 0$$

De este modo, $$(\lambda^2 - p^2)a_0 = 0 \quad \left[(\lambda+1)^2 - p^2\right]a_1 = 0 \tag{1}$$

y, en general, $\left[(\lambda+n)^2 - p^2\right]a_n + a_{n-2} = 0$, o bien,

$$a_n = -\frac{1}{(\lambda+n)^2 - p^2}a_{n-2} \quad (n \leq 2) \tag{2}$$

La ecuación indicial es $\lambda^2 - p^2 = 0$, la cual tiene raíces $\lambda_1 = p$ y $\lambda_2 = -p$ (con p no negativo).

Sustituyendo $\lambda = p$ en (*1*) y (*2*) y simplificando, encontramos que $a_1 = 0$ y

$$a_n = -\frac{1}{n(2p+n)}a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

De aquí, $0 = a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = \cdots$ y

$$a_2 = \frac{-1}{2^2 1!(p+1)}a_0$$

$$a_4 = -\frac{1}{2^2 2(p+2)}a_2 = \frac{1}{2^4 2!(p+2)(p+1)}a_0$$

$$a_6 = -\frac{1}{2^2 3(p+3)}a_4 = \frac{1}{2^6 3!(p+3)(p+2)(p+1)}a_0$$

y, en general,

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(p+k)(p+k-1)\cdots(p+2)(p+1)}a_0 \quad (k \geq 1)$$

De este modo,
$$y_1(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^p \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}x^{2k}\right]$$

$$= a_0 x^p \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}k!(p+k)(p+k-1)\cdots(p+2)(p+1)}\right] \tag{3}$$

Se acostumbra elegir la constante arbitraria a_0 como $a_0 = \frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$. Entonces, poniendo a_0x^p dentro de los paréntesis y dentro de la sumatoria de (*3*), combinando, y finalmente usando el problema 30.4, obtenemos

$$y_1(x) = \frac{1}{2^p\Gamma(p+1)}x^p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)} \equiv J_p(x)$$

30.10. Encuentre la solución general para la ecuación de Bessel de orden cero.

Para $p = 0$, la ecuación es $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$, que se resolvió en el capítulo 28. Por (*4*) del problema 28.10, una solución es

$$y_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{e^{2n}(n!)^2}$$

Cambiando n a k, usando el problema 30.6, y estableciendo $a_0 = \frac{1}{2^0\Gamma(0+1)} = 1$ tal como se indica en el problema 30.9, tenemos que $y_1(x) = J_0(x)$. Una segunda solución es [véase (*1*) del problema 28.11, con a_0 nuevamente elegida como 1]

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \left[\frac{x^2}{2^2(1!)^2}(1) - \frac{x^4}{2^4(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^6(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \cdots\right]$$

que generalmente es designada por $N_0(x)$. De este modo, la solución general para la ecuación de Bessel de orden cero es $y = c_1J_0(x) + c_2N_0(x)$.

Otra forma común de la solución general se obtiene cuando la segunda solución linealmente independiente no se toma como $N_0(x)$, sino como una combinación de $N_0(x)$ y $J_0(x)$. En particular, si definimos

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}[N_0(x) + (\gamma - \ln 2)J_0(x)] \tag{1}$$

donde γ es la *constante de Euler* definida por

$$\gamma = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - \ln k\right) \approx 0.57721566$$

entonces la solución general para la ecuación de Bessel de orden cero se puede dar como $y = c_1J_0(x) + c_2Y_0(x)$.

30.11. Demuestre que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)x^{2k-1}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^{2k+p+1}k!\Gamma(p+k+2)}$$

Escribiendo el término $k = 0$ de manera separada, tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)x^{2k-1}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)x^{2k-1}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}$$

la cual, bajo el cambio de variables $j = k - 1$, se convierte en

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}2(j+1)x^{2(j+1)-1}}{2^{2(j+1)+p}(j+1)!\Gamma(p+j+1+1)} &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)(-1)^j2(j+1)x^{2j+1}}{2^{2j+p+2}(j+1)!\Gamma(p+j+2)}\\ &= -\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j2(j+1)x^{2j+1}}{2^{2j+p+1}(2)(j+1)(j!)\Gamma(p+j+2)}\\ &= -\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j x^{2j+1}}{2^{2j+p+1}j!\Gamma(p+j+2)}\end{aligned}$$

El resultado deseado se desprende de cambiar la variable muda en la última sumatoria de j a k.

30.12. Demuestre que

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+p+2}}{2^{2k+p+1}k!\Gamma(p+k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)x^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}$$

Haga el cambio de variables $j = k + 1$:

$$\begin{aligned}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+p+2}}{2^{2k+p+1}k!\Gamma(p+k+2)} &= -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}x^{2(j-1)p+2}}{2^{2(j-1)+p+1}(j-1)!\Gamma(p+j-1+2)}\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j x^{2j+p}}{2^{2j+p-1}(j-1)!\Gamma(p+j+1)}\end{aligned}$$

Ahora, multiplique el numerador y el denominador de la última sumatoria por $2j$, observando que $j(j-1)! = j!$ y $2^{2j+p-1}(2) = 2^{2j+p}$. El resultado es

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j(2j)x^{2j+p}}{2^{2j+p}j!\Gamma(p+j+1)}$$

Teniendo el factor j en el numerador, la última serie infinita no se altera si el límite inferior de la suma se cambia de $j = 1$ a $j = 0$. Una vez hecho esto, el resultado deseado se obtiene simplemente cambiando el índice mudo de j a k.

30.13. Demuestre que $\frac{d}{dx}\left[x^{p+1}J_{p+1}(x)\right]=x^{p+1}J_p(x)$.

Podemos derivar la serie para la función de Bessel término por término. De este modo,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[x^{p+1}J_{p+1}(x)\right]&=\frac{d}{dx}\left[x^{p+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+p+1}}{2^{2k+p+1}k!\Gamma(k+p+1+1)}\right]\\&=\frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+2p+2}}{2^{2k+p}(2)k!\Gamma(k+p+2)}\right]\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+2p+2)x^{2k+2p+1}}{2^{2k+p}k!2\Gamma(k+p+2)}\end{aligned}$$

Observando que $2\Gamma(k+p+2)=2(k+p+1)\Gamma(k+p+1)$ y que el factor $2(k+p+1)$ se cancela, tenemos

$$\frac{d}{dx}\left[x^{p+1}J_{p+1}(x)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+2p+1}}{2^{2k+p}k!\Gamma(k+p+1)}=x^{p+1}J_p(x)$$

Para el caso particular de $p=0$, tenemos que

$$\frac{d}{dx}\left[xJ_1(x)\right]=xJ_0(x) \tag{1}$$

30.14. Demuestre que $xJ'_p(x)=pJ_p(x)-xJ_{p+1}(x)$.

Tenemos

$$\begin{aligned}pJ_p(x)-xJ_{p+1}(x)&=p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}-x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+p+1}}{2^{2k+p+1}k!\Gamma(p+k+2)}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k px^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+p+2}}{2^{2k+p+1}k!\Gamma(p+k+2)}\end{aligned}$$

Usando el problema 30.12 sobre la última sumatoria, encontramos

$$\begin{aligned}pJ_p(x)-xJ_{p+1}(x)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k px^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)x^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(p+2k)x^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}=xJ'_p(x)\end{aligned}$$

Para el caso particular $p=0$, tenemos que $xJ'_0(x)=-xJ_1(x)$, o bien

$$J'_0(x)=-J_1(x) \tag{1}$$

30.15. Demuestre que $xJ'_p(x)=-pJ_p(x)+xJ_{p-1}(x)$.

$$-pJ_p(x)+xJ_{p-1}(x)=-p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)}+x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+p-1}}{2^{2k+p-1}k!\Gamma(p+k)}$$

Multiplicando el numerador y el denominador en la segunda sumatoria por $2(p+k)$ y observando que $(p+k)\Gamma(p+k) = \Gamma(p+k+1)$, encontramos que

$$\begin{aligned}
-pJ_p(x) + xJ_{p-1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(-p)x^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(p+k)x^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k[-p+2(p+k)]x^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+p)x^{2k+p}}{2^{2k+p}k!\Gamma(p+k+1)} = xJ'_p(x)
\end{aligned}$$

30.16. Use los problemas 30.14 y 30.15 para deducir la fórmula de recurrencia

$$J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p-1}(x)$$

Sustrayendo los resultados del problema 30.15 de los resultados del problema 30.14, encontramos que

$$0 = 2pJ_p(x) - xJ_{p-1}(x) - xJ_{p+1}(x)$$

Resolviendo para $J_{p+1}(x)$ obtenemos el resultado deseado.

30.17. Demuestre que $y = xJ_1(x)$ es una solución de $xy'' - y' - x^2J'_0(x) = 0$.

Primero observe que $J_1(x)$ es una solución de la ecuación de Bessel de orden uno:

$$X^2 J''_1(x) + xJ'_1(x) + (x^2-1)J_1(x) = 0 \tag{1}$$

Ahora sustituya $y = xJ_1(x)$ en el lado izquierdo de la ecuación diferencial:

$$x[xJ_1(x)]'' - [xJ_1(x)]' - x^2J'_0(x) = x[2J'_1(x) + xJ''_1(x)] - [J_1(x) + xJ'_1(x)] - x^2J'_0(x)$$

Pero $J'_0(x) = -J_1(x)$ [por (*1*) del problema 30.14], de modo que el lado derecho se convierte en

$$x^2J''_1(x) + 2xJ'_1(x) - J_1(x) - xJ'_1(x) + x^2J_1(x) = x^2J''_1(x) + xJ'_1(x) + (x^2-1)J_1(x) = 0$$

la última igualdad que se desprende de (*1*).

30.18. Demuestre que $y = \sqrt{x}J_{3/2}(x)$ es una solución de $x^2y'' + (x^2-2)y = 0$.

Obsérvese que $J_{3/2}(x)$ es una solución de la ecuación de Bessel de orden $\frac{3}{2}$:

$$x^2J''_{3/2}(x) + xJ'_{3/2}(x) + \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)J_{3/2}(x) = 0 \tag{1}$$

Ahora sustituya $y = \sqrt{x}J_{3/2}(x)$ en el lado izquierdo de la ecuación diferencial dada, obteniendo

$$\begin{aligned}
&x^2\left[\sqrt{x}J_{3/2}(x)\right]'' + (x^2-2)\sqrt{x}J_{3/2}(x) \\
&= x^2\left[-\frac{1}{4}x^{-3/2}J_{3/2}(x) + x^{-1/2}J'_{3/2}(x) + x^{1/2}J''_{3/2}(x)\right] + (x^2-2)x^{1/2}J_{3/2}(x) \\
&= \sqrt{x}\left[x^2J''_{3/2}(x) + xJ'_{3/2}(x) + \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)J_{3/2}(x)\right] = 0
\end{aligned}$$

la última igualdad se desprende de (*1*). De este modo, $\sqrt{x}J_{3/2}(x)$ satisface la ecuación diferencial dada.

PROBLEMAS ADICIONALES

30.19. Encuentre $\Gamma(2.6)$.

30.20. Encuentre $\Gamma(-1.4)$.

30.21. Encuentre $\Gamma(4.14)$.

30.22. Encuentre $\Gamma(-2.6)$.

30.23. Encuentre $\Gamma(-1.33)$.

30.24. Exprese $\int_0^\infty e^{-x^3}\,dx$ como una función gamma.

30.25. Evalúe $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx$.

30.26. Demuestre que $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)x^{2k-1}}{2^{2k-1}k!\Gamma(p+k)} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^{2k}k!\Gamma(p+k+1)}$

30.27. Demuestre que $\frac{d}{dx}\left[x^{-p}J_p(x)\right] = -x^{-p}J_{p+1}(x)$.

Sugerencia: Use el problema 30.11.

30.28. Demuestre que $J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J_p'(x)$.

30.29. *a*) Pruebe que la derivada de $(\frac{1}{2}x^2)\left[J_0^2(x) + J_1^2(x)\right]$ es $xJ_0^2(x)$.

Sugerencia: Use (*I*) del problema 30.13 y (*I*) del problema 30.14.

b) Evalúe $\int_0^1 xJ_0^2(x)\,dx$ en términos de las funciones de Bessel.

30.30. Demuestre que $y = xJ_n(x)$ es una solución de $x^2y'' - xy' + (1 + x^2 - n^2)y = 0$.

30.31. Demuestre que $y = x^2J_2(x)$ es una solución de $xy'' - 3y' + xy = 0$.

Una introducción a las ecuaciones diferenciales parciales

31

CONCEPTOS INTRODUCTORIOS

Una *ecuación diferencial parcial* (EDP) es una ecuación diferencial en la cual la función desconocida depende de dos o más variables independientes (véase el capítulo 1). Por ejemplo,

$$u_x - 3u_y = 0 \tag{31.1}$$

es una EDP en la cual u es la variable dependiente (desconocida), en tanto que x y y son las variables independientes. Las definiciones de *orden* y *linealidad* son exactamente las mismas del caso de las *ecuaciones diferenciales ordinarias* (EDO) (véanse los capítulos 1 y 8) con la salvedad de que clasificamos a las EDP como *casi lineales* si las derivadas de los órdenes mayores son lineales, pero no lo son las derivadas de los órdenes menores. De este modo, la ecuación (*31.1*) es una EDP lineal y de primer orden, mientras que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3 = x + y - 4 \tag{31.2}$$

es una EDP casi lineal, de segundo orden debido al término $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3$

Las ecauciones diferenciales parciales tienen muchas aplicaciones y algunas se designan como clásicas, en forma muy similar a sus contrapartes, las EDO (véase capítulo 29). Tres de tales ecuaciones son, la *ecuación de calor*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{31.3}$$

la *ecuación de onda*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{31.4}$$

y la *ecuación de Laplace* [llamada así en honor de P.S. Laplace (1749-1827), matemático y científico francés]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \tag{31.5}$$

Estas ecuaciones se usan ampliamente como modelos que tratan con el flujo de calor, ingeniería civil y acústica, por nombrar sólo tres áreas. Obsérvese que k es una constante positiva en las ecuaciones (*31.3*) y (*31.4*).

SOLUCIONES Y TÉCNICAS DE SOLUCIÓN

Si una función $u(x, y, z, \ldots)$ es suficientemente derivable —lo cual asumimos a lo largo de este capítulo para *todas* las funciones— podemos verificar si es una *solución* simplemente derivando u el número de veces adecuado con respecto a las variables apropiadas; entonces podemos sustituir estas expresiones en la EDP. Si se obtiene una identidad, entonces u resuelve la EDP. (Véanse los problemas del 31.1 al 31.4.)

Introduciremos dos técnicas de solución: la *integración básica* y la *separacción de variables*.

Con respecto a la técnica de separación de variables, asumiremos que la *forma* de la solución de la EDP se puede "partir" o "separar" en un *producto* de *funciones* de *cada* variable independiente. (Véanse los problemas 31.4 y 31.11.) Obsérvese que este método *no debería* confundirese con el método de las EDO de "separación de variables", que se discutió en el capítulo 4.

PROBLEMAS RESUELTOS

31.1. Verifique que $u(x, t)$ = sen x cos kt satisface la ecuación de onda (*31.4*).

Tomando las derivadas de u nos conduce a $u_x = \cos x \cos kt$, $u_{xx} = -\operatorname{sen} x \cos kt$, $u_t = -k \operatorname{sen} x \operatorname{sen} kt$ y $u_{tt} = -k^2 \operatorname{sen} x \cos kt$. Por lo tanto, $u_{xx} = \frac{1}{k^2} u_{tt}$ implica $-\operatorname{sen} x \cos kt \overset{?}{=} \frac{1}{k^2}(-k^2 \operatorname{sen} x \cos kt) = -\operatorname{sen} x \cos kt$; de aquí, u es realmente una solución.

31.2. Verifique que cualquier función de la forma $F(x + kt)$ satisface la ecuación de onda, (*31.4*).

Tenemos que $u = x + kt$; entonces, usando la regla de la cadena para las derivadas parciales, tenemos $F_x = F_u u_x = F_u(1) = F_u$; $F_{xx} = F_{uu} u_x = F_{xx}(1) = F_{xx}$; $F_t = F_u u_t = F_u(k)$; $F_{tt} = kF_{uu}u_t = k^2 F_{uu}$. Así que $F_{xx} = F_{uu} = \frac{1}{k^2} F_{tt} = \frac{1}{k^2}(k^2 F_{uu}) = F_{uu}$, de modo que hemos verificado que cualquier función suficientemente derivable de la forma $F(x + kt)$ satisface la ecuación de onda. Observamos que esto significa que funciones tales como $\sqrt{x+kt}$, $\tan^{-1}(x + kt)$ y $\ln(x + kt)$ satisfacen todas la ecuación de onda.

31.3. Verifique que $u(x, t) = e^{-kt} \operatorname{sen} x$ satisface la ecuación de calor (*31.3*).

La diferenciación implica $u_x e^{-kt} \cos x$, $u_{xx} = -e^{-kt} \operatorname{sen} x$, $u_t = -ke^{-kt} \operatorname{sen} x$. Sustituyendo u_{xx} y u_t en (*31.3*) claramente se produce una identidad, probando de este modo que $u(x, t) = e^{-kt} \operatorname{sen} x$ en realidad satisface la ecuación de calor.

31.4. Verifique que $u(x,t) = (5x - 6x^5 + x^9)t^6$ satisface la EDP $x^3t^2u_{xtt} - 9x^2t^2u_{tt} = tu_{xxt} + 4u_{xx}$.

Observamos que $u(x, t)$ tiene una forma específica; es decir, se puede "partir" o "separar" en dos funciones: una función de x veces una función de t. Esto se discutirá posteriormente en el problema 31.11. La derivada de $u(x, t)$ conduce a:

$u_{xtt} = (5 - 30x^4 + 9x^8)(30t^4)$, $u_{xx} = (-120x^3 + 72x^7)(t^6)$, $u_{xxt} = (-120x^3 + 72x^7)(6t^5)$ y $u_{tt} = (5x - 6x^5 + x^9)(30t^4)$.

La simplificación algebraica demuestra que

$$x^3t^2\,(5-30x^4+9x^8)\,(30t^4)-9x^2t^2\,(5x-6x^5+x^9)\,(30t^4)=$$
$$t(-120x^3+72x^7)(6t^5)+4(-120x^3+72x^7)\,(t^6)$$

porque ambos lados se reducen a $720x^7t^6-1\,200x^3t^6$. Por esto, nuestra solución se verifica.

31.5. Tenemos $u=u(x,\,y)$. Por integración, encuentre la solución general de $u_x=0$.

Se llega a la solución por "integración parcial", de manera muy similar a la técnica de la resolución de ecuaciones "exactas" (véase el capítulo 5). Aquí, $u\,(x,\,y)=f(y)$, donde $f(y)$ es cualquier función derivable de y. Podemos escribir esto simbólicamente como

$$u(x,\,y)=\int u_x\partial\,x=\int 0\;\partial\,x=f(y).$$

Observamos que no se necesita un "+ C" porque se "absorbe" en $f(y)$; es decir, $f(y)$ es la "constante" más general con respecto a x.

31.6. Dada $u=u(x,\,y,\,z)$. Encuentre, por integración, la solución general para $u_x=0$.

Aquí, vemos por inspección que nuestra solución se puede escribir como $f\,(y,\,z)$.

31.7. Dada $u=u(x,\,y)$. Encuentre, por integración, la solución general para $u_x=2x$.

Dado que una antiderivada de $2x$ (con respecto a x) es x^2, la solución general es $\int 2x\,\partial\,x=x^2+f(y)$; donde $f(y)$ es cualquier función derivable de y.

31.8. Dada $u=u(x,\,y)$. Encuentre, por integración, la solución general para $u_x=2x,\ u(0,\,y)=\ln y$.

Por el problema 31.7, la solución de la EDP es $u(x,\,y)=x^2+f(y)$. Dejando $x=0$ implica $u(0,\,y)=0^2+f(y)=\ln y$. Por lo tanto, $f(y)=\ln y$, de modo que nuestra solución es $u(x,\,y)=x^2+\ln y$.

31.9. Dada $u=u(x,\,y)$. Encuentre, por integración, la solución general para $u_y=2x$.

Observando que una antiderivada de $2x$ con respecto a y es $2xy$, la solución general está dada por $2xy+g(x)$, donde $g(x)$ es cualquier función derivable de x.

31.10. Dada $u=u(x,\,y)$. Encuentre, por integración, la solución general para $u_{xy}=2x$.

Integrando primero con respecto a y, tenemos $u_x=2xy+f(x)$, donde $f(x)$ es cualquier función derivable de x. Ahora integramos u_x con respecto a x, llegamos a $u(x,\,y)=x^2y+g(x)+h(y)$, donde $g(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, y donde $h(y)$ es cualquier función derivable de y.

Observamos que si la EDP se escribiera como $u_{yx}=2x$, nuestros resultados serían los mismos.

31.11. Aquí, $u(x,\,t)$ representa la temperatura de una varilla muy delgada de longitud π, que está colocada en el intervalo $\{x/0\le x\le\pi\}$, en una posición x y un tiempo t. La EDP que controla la distribución de calor está dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}$$

donde u, x, t y k están dadas en unidades adecuadas. Luego, asumimos que ambos extremos están aislados; es decir, $u(0,\,t)=u(\pi,\,t)=0$ son una "condición en la frontera" obligada para $t\ge 0$. Dada una distribución inicial de temperatura de $u(x,\,0)=2\operatorname{sen}4x-11\operatorname{sen}7x$, para $0\le x\le\pi$, use la técnica de separación de variables para encontrar una solución (no trivial), $u(x,\,t)$.

Asumimos que $u(x, t)$ se puede escribir como un producto de funciones. Es decir, $u(x, t) = X(x)T(t)$. Encontrando las derivadas adecuadas, tenemos $u_{xx} = X''(x)T(t)$ y $u_t = X(x)T'(t)$. La sustitución de estas derivadas en la EDP produce lo siguiente:

$$X''(x)T(t) = \frac{1}{k}X(x)T'(t). \tag{1}$$

La ecuación (*1*) se puede volver a escribir como

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)}. \tag{2}$$

Observamos que el lado izquierdo de la ecuación (*2*) es exclusivamente una función de x, mientras que el lado derecho de esta ecuación contiene sólo la variable independiente t. Esto necesariamente implica que ambas relaciones deben ser una constante, porque no hay otras alternativas. Indicamos esta constante con c:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = c. \tag{3}$$

Ahora separamos la ecuación (*3*) en dos EDO:

$$X''(x) - cX(x) = 0 \tag{4}$$

y

$$T'(t) - ckT(t) = 0. \tag{5}$$

Observamos que la ecuación (*4*) es una ecuación "espacial", mientras que la ecuación (*5*) es una ecuación "temporal". Para resolver $u(x, t)$ debemos resolver estas dos EDO resultantes.

Primero volcamos nuestra atención en la ecuación espacial, $X''(x) - cX(x) = 0$. Para resolver esta EDO debemos considerar nuestras condiciones aisladas en la frontera; esto dará lugar a un "problema de valor en la frontera" (véase el capítulo 32). Observamos que $u(0, t) = 0$ implica que $X(0) = 0$, dado que $T(t)$ no puede ser idéntica a 0, ya que esto produciría una solución trivial; de manera similar, $X(\pi) = 0$. La naturaleza de las soluciones de esta EDO depende de si c es positiva, cero o negativa.

Si $c > 0$, mediante las técnicas presentadas en el capítulo 9, tenemos $X(x) = c_1e^{\sqrt{c}x} + c_2e^{-\sqrt{c}x}$, donde c_1 y c_2 están determinadas por las condiciones en la frontera $X(0) = c_1e^0 + c_2e^0 = c_1 + c_2 = 0$ y $x(\pi) = c_1e^{\sqrt{c}\pi} + c_2e^{-\sqrt{c}\pi}$. Estas dos ecuaciones necesariamente implican que $c_1 = c_2 = 0$, lo que significa que $X(x)$ 0 lo cual hace que $u(x, t)$ sea trivial.

Si $c = 0$, entonces $X(x) = c_1x + c_2$, donde c_1 y c_2 están determinadas por las condiciones en la frontera. Aquí nuevamente, $x(0) = X(\pi) = 0$ fuerza a $c_1 = c_2 = 0$, y tenemos $u(x, t) \equiv 0$ una vez más.

Asumamos que $c < 0$, escribiendo $c = -\lambda^2$, $\lambda > 0$ por conveniencia. Nuestra EDO se convierte en $X''(x) + \lambda^2X(x) = 0$, que lleva a $X(x) = c_1 \operatorname{sen} \lambda x + c_2 \cos \lambda x$. Nuestra primera condición en la frontera, $X(0) = 0$ implica $c_2 = 0$. Imponiendo $X(\pi) = 0$, tenemos $c_1 \operatorname{sen} \lambda\pi = 0$.

Si establecemos $\lambda = 1, 2, 3, \ldots,$ entonces tenemos una solución no trivial para $X(x)$. Es decir, $X(x) = c_1 \operatorname{sen} nx$, donde n es un número entero positivo. Obsérvese que estos valores se pueden calificar como "valores propios" y las correspondientes funciones se llaman "funciones propias" (véase el capítulo 33).

Ahora nos concentramos en la ecuación (*5*), estableciendo $c = -\lambda^2 = -n^2$, donde n es un número entero positivo. Es decir, $T'(t) + n^2kT(t) = 0$. Este tipo de EDO se discutió en el capítulo 4 y tiene $T(t) = c_3e^{-n^2kt}$ como solución, donde c_3 es una constante arbitraria.

Dado que $u(x, t) = X(x)T(t)$, tenemos $u(x, t) = c_1 \operatorname{sen} nx \; c_3e^{-n^2kt} = a_ne^{-n^2kt} \operatorname{sen} nx$, donde $a_n = c_1c_3$. No sólo $u(x, t) = a_ne^{-n^2kt} \operatorname{sen} nx$ satisface la EDP en conjunción con las condiciones en la frontera, sino cualquier combinación lineal de éstas para diferentes valores de n. Es decir,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{N} a_ne^{-n^2kt} \operatorname{sen} nx, \tag{6}$$

donde N es cualquier número entero positivo, y es también una solución. Esto se debe a la linealidad de la EDP. (De hecho, podemos hacer que nuestra suma vaya de 1 hasta ∞).

Finalmente, imponemos la condición inicial, $u(x, 0) = 2 \operatorname{sen} 4x - 11 \operatorname{sen} 7x$, a la ecuación (*6*). De aquí, $u(x, 0) = \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen} nx$. Con $n = 4$, $a_4 = 2$ y $n = 7$, $a_7 = -11$, llegamos a la solución deseada.

$$u(x, t) = 2e^{-16kt} \operatorname{sen} 4x - 11e^{-49kt} \operatorname{sen} 7x. \tag{7}$$

Se puede demostrar fácilmente que la ecuación (*7*) resuelve la ecuación de calor, a la vez que satisface las condiciones en la frontera y la condición inicial.

PROBLEMAS ADICIONALES

31.12. Verifique que cualquier función de la forma $F(x-kt)$ satisface la ecuación de onda (*31.4*).

31.13. Verifique que $u = \tanh(x-kt)$ satisface la ecuación de onda.

31.14. Si $u = f(x-y)$, demuestre que $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

31.15. Verifique que $u(x, t) = (55 + 22x^6 + x^{12})\operatorname{sen} 2t$ satisface la EDP $12x^4 u_{tt} - x^5 u_{xtt} = 4u_{xx}$.

31.16. Una función $u(x, y)$ se llama *armónica* si satisface la ecuación de Laplace; es decir, $u_{xx} + u_{yy} = 0$. ¿Cuáles de las siguientes funciones son armónicas *a*) $3x + 4y + 1$; *b*) $e^{3x}\cos 3y$; *c*) $e^{3x}\cos 4y$; *d*) $\ln(x^2 + y^2)$; *e*) $\operatorname{sen}(e^x)\cos(e^y)$?

31.17. Encuentre la solución general para $u_x = \cos y$ si $u(x, y)$ es una función de x y y.

31.18. Encuentre la solución para $u_y = \cos y$ si $u(x, y)$ es una función de x y y.

31.19. Encuentre la solución para $u_y = 3$ si $u(x, y)$ es una función de x y y, y $u(x, 0) = 4x + 1$.

31.20. Encuentre la solución para $u_x = 2xy + 1$ si $u(x, y)$ es una función de x y y, y $u(0, y) = \cosh y$.

31.21. Encuentre la solución general para $u_{xx} = 3$ si $u(x, y)$ es una función de x y y.

31.22. Encuentre la solución general para $u_{xy} = 8xy^3$ si $u(x, y)$ es una función de x y y.

31.23. Encuentre la solución general para $u_{xyx} = -2$ si $u(x, y)$ es una función de x y y.

31.24. Se tiene a $u(x, t)$ que representa el desplazamiento vertical de una cuerda de longitud π, que está situada en el intervalo $\{x/0 \le x \le \pi\}$, en la posición x y el tiempo t. Asumiendo unidades adecuadas para longitud, tiempo y la constante k, la ecuación de onda modela el desplazamiento, $u(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Usando el método de separación de variables, resuelva la ecuación para $u(x, t)$, si se imponen las condiciones en la frontera $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ para $t \ge 0$ con un desplazamiento inicial $u(x, 0) = 5\operatorname{sen} 3x - 6\operatorname{sen} 8x$ y una velocidad inicial $u_t(x, 0) = 0$ para $0 \le x \le \pi$.

PROBLEMAS DE VALOR DE LA FRONTERA DE SEGUNDO ORDEN

32

FORMA ESTÁNDAR

Un problema con valores en la frontera en forma estándar consiste de la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = \phi(x) \tag{32.1}$$

y de las condiciones en la frontera

$$\begin{aligned} \alpha_1\, y(a) + \beta_1\, y'(a) &= \gamma_1 \\ \alpha_2\, y(b) + \beta_2\, y'(b) &= \gamma_2 \end{aligned} \tag{32.2}$$

donde $P(x)$, $Q(x)$ y $\phi(x)$ son continuas en $[a, b]$ y α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1 y γ_2 son todas constantes reales. Además, se asume que α_1 y β_1 no son ambas cero, y también que α_2 y β_2 no son ambas cero.

Se dice que el problema con valores en la frontera es *homogéneo* si tanto la ecuación diferencial como las condiciones en la frontera son homogéneas (es decir, $\phi(x) \equiv 0$ y $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$). De otro modo, el problema es no homogéneo. De este modo, un problema con valor en la frontera homogéneo tiene la forma

$$\begin{aligned} &y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0; \\ &\alpha_1\, y(a) + \beta_1\, y'(a) = 0 \\ &\alpha_2\, y(b) + \beta_2\, y'(b) = 0 \end{aligned} \tag{32.3}$$

Un problema con valor en la frontera homogéneo de algún modo más general que (*32.3*) es en el cual los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ también dependen de una constante arbitraria λ. Tal problema tiene la forma

$$\begin{aligned} &y'' + P(x, \lambda)y' + Q(x, \lambda)y = 0; \\ &\alpha_1\, y(a) + \beta_1\, y'(a) = 0 \\ &\alpha_2\, y(b) + \beta_2\, y'(b) = 0 \end{aligned} \tag{32.4}$$

Tanto (*32.3*) como (*32.4*) siempre admiten la solución trivial $y(x) \equiv 0$.

SOLUCIONES

Un problema con valores en la frontera se resuelve obteniendo primero la solución general de la ecuación diferencial, usando cualesquiera de los métodos presentados aquí anteriormente, y aplicando luego las condiciones en la frontera para evaluar las constantes arbitrarias.

Teorema 32.1. Siendo $y_1(x)$ y $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Las soluciones no triviales (es decir, soluciones no idénticamente iguales a cero) para el problema homogéneo con valores en la frontera (*32.3*) existen si y sólo si el determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) & \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) & \alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b) \end{vmatrix} \tag{32.5}$$

es igual a cero.

Teorema 32.2. El problema con valores en la frontera no homogéneo definido por (*32.1*) y (*32.2*) tiene una solución única si y sólo si el problema homogéneo asociado (*32.3*) sólo presenta la solución trivial.

En otras palabras, *un problema no homogéneo tiene una solución única cuando y sólo cuando el problema homogéneo asociado tiene una solución única.*

PROBLEMAS DE VALOR PROPIO

Cuando se aplica al problema con valores en la frontera (*32.4*), el teorema 32.1 demuestra que las soluciones no triviales pueden existir para ciertos valores de λ pero no para los otros valores de λ. Aquellos valores de λ para los cuales realmente existen soluciones no triviales se llaman *valores propios*; las soluciones no triviales correspondientes se denominan *funciones propias*.

PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE

Un *problema de Sturm-Liouville* de segundo orden es un problema con valores en la frontera homogéneo de la forma

$$[p(x)y']' + q(x)y + \lambda w(x)y = 0; \tag{32.6}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{aligned} \tag{32.7}$$

donde $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ y $w(x)$ son continuas sobre $[a, b]$, y tanto $p(x)$ como $w(x)$ son positivas en $[a, b]$.

La ecuación (*32.6*) se puede volver a escribir en la forma estándar (*32.4*) dividiendo por $p(x)$. La forma (*32.6*), cuando es realizable, se prefiere porque los problemas de Sturm-Liouville tienen características deseables que no son compartidas con problemas de valor propio más generales. La ecuación diferencial de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y' + \lambda r(x)y = 0 \tag{32.8}$$

donde $a_2(x)$ no se anula en $[a, b]$, es equivalente a la ecuación (*32.6*) si y sólo si $a_2'(x) = a_1(x)$. (Véase el problema 32.15.) Esta condición siempre se puede forzar multiplicando la ecuación (*32.8*) por un factor apropiado. (Véase el problema 32.16.)

PROPIEDADES DE LOS PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE

Propiedad 32.1. Los valores propios de un problema de Sturm-Liouville son todos reales y no negativos.

Propiedad 32.2. Los valores propios de un problema de Sturm-Liouville se pueden arreglar para formar una sucesión infinita estrictamente creciente; es decir, $0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$. Además, $\lambda_n \to \infty$ mientras que $n \to \infty$.

Propiedad 32.3. Para cada valor propio de un problema de Sturm-Liouville, existe una y sólo una función propia linealmente independiente.

[Por la propiedad 32.3 le corresponde a cada valor propio λ_n una única función propia con el principal coeficiente unitario; indicamos esta función propia por medio de $e_n(x)$.]

Propiedad 32.4. El conjunto de funciones propias $\{e_1(x), e_2(x), \dots\}$ de un problema de Sturm-Liouville satisface la relación

$$\int_a^b w(x)e_n(x)e_m(x)\,dx = 0 \tag{32.9}$$

para $n \neq m$, donde $w(x)$ está dada en la ecuación (*32.6*).

PROBLEMAS RESUELTOS

32.1. Resuelva $y'' + 2y' - 3y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

Éste es un problema con valor en la frontera de la forma (*32.3*) con $P(x) \equiv 2$, $Q(x) \equiv -3$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$, $a = 0$ y $b = 1$. La solución general para la ecuación diferencial es $y = c_1e^{-3x} + c_2e^x$. Aplicando las condiciones en la frontera, encontramos que $c_1 = c_2 = 0$; por esto, la solución es $y \equiv 0$.

El mismo resultado se desprende del teorema 32.1. Dos soluciones linealmente independientes son $y_1(x) = e^{-3x}$ y $y_2(x) = e^x$; de aquí, el determinante (*32.5*) se convierte en

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3e^{-3} & e \end{vmatrix} = e + 3e^{-3}$$

Dado que este determinante no es cero, la única solución es la solución trivial $y(x) \equiv 0$.

32.2. Resuelva $y'' = 0$; $y(-1) = 0$, $y(1) - 2y'(1) = 0$.

Éste es un problema con valores en la frontera de la forma (*32.3*), donde $P(x) = Q(x) \equiv 0$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = -2$, $a = -1$ y $b = 1$. La solución general de la ecuación diferencial es $y = c_1 + c_2x$. Aplicando las condiciones en la frontera obtenemos las ecuaciones $c_1 - c_2 = 0$ y $c_1 - c_2 = 0$, que tienen la solución $c_1 = c_2$, con c_2 arbitraria. De este modo la solución del problema con valores en la frontera es $y = c_2(1 + x)$ con c_2 arbitraria. Como se obtiene una solución diferente para cada valor de c_2, el problema tiene un número infinito de soluciones no triviales.

La existencia de soluciones no triviales es también inmediata a partir del teorema 32.1. Aquí, $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$ y el determinante (*32.5*) se convierte en

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

32.3. Resuelva $y'' + 2y' - 3y = 9x$; $y(0) = 1$, $y'(1) = 2$.

Éste es un problema con valores en la frontera no homogéneo de las formas (*32.1*) y (*32.2*) donde $\phi(x) = x$, $\gamma_1 = 1$ y $\gamma_2 = 2$. Dado que el problema homogéneo asociado sólo tiene la solución trivial (problema 32.1), del teorema 32.2 surge que el problema dado tiene una solución única. Resolviendo la ecuación diferencial por el método del capítulo 11, obtenemos

$$y = c_1e^{-3x} + c_2e^x - 3x - 2$$

Aplicando las condiciones en la frontera, encontramos que

$$c_1 + c_2 - 2 = 1 \quad -3c_1e^{-3} + c_2e - 3 = 2$$

de donde

$$c_1 = \frac{3e - 5}{e + 3e^{-3}} \quad c_2 = \frac{5 + 9e^{-3}}{e + 3e^{-3}}$$

Finalmente

$$y = \frac{(3e - 5)e^{-3x} + (5 + 9e^{-3})e^x}{e + 3e^{-3}} - 3x - 2$$

32.4. Resuelva $y''=2$; $y(-1)=5$, $y(1)-2y'(1)=1$.

Éste es un problema con valores en la frontera no homogéneo de las formas (*32.1*) y (*32.2*) donde $\phi(x)\equiv 2$, $\gamma_1=5$ y $\gamma_2=1$. Dado que el problema homogéneo asociado tiene soluciones no triviales (problema 32.2), este problema no tiene una solución única. Hay, por lo tanto, o bien ninguna solución o más de una solución. Resolviendo la ecuación diferencial, encontramos que $y=c_1+c_2x+x^2$. Luego, aplicando las condiciones en la frontera, obtenemos las ecuaciones $c_1-c_2=4$ y $c_1-c_2=4$; de este modo, $c_1=4+c_2$ con c_2 arbitraria. Finalmente, $y=c_2(1+x)+4+x^2$; y este problema tiene un número infinito de soluciones, una para cada valor de la constante arbitraria c_2.

32.5. Resuelva $y''=2$; $y(-1)=0$, $y(1)-2y'(1)=0$.

Éste es un problema con valores en la frontera no homogéneo de las formas (*32.1*) y (*32.2*) donde $\phi(x)\equiv 2$ y $\gamma_1=\gamma_2=0$. Como en el problema 32.4 hay, o bien ninguna solución, o más de una solución. La solución para la ecuación diferencial es $y=c_1+c_2x+x^2$. Aplicando las condiciones en la frontera, obtenemos las ecuaciones $c_1-c_2=-1$ y $c_1-c_2=3$. Dado que estas ecuaciones no tienen solución, el problema con valores en la frontera tampoco tiene solución.

32.6. Encuentre los valores propios y las funciones propias de

$$y''-4\lambda y'+4\lambda^2y=0;\quad y(0)=0,\quad y(1)+y'(1)=0$$

Los coeficientes de la ecuación diferencial dada son constantes (con respecto a x); de aquí, la solución general se puede encontrar por medio del uso de la ecuación característica. Escribimos la ecuación característica en términos de la variable m, dado que λ tiene ahora otro significado. De este modo tenemos $m^2-4\lambda m+4\lambda^2=0$, que tiene la doble raíz $m=2\lambda$; la solución a la ecuación diferencial es $y=c_1e^{2\lambda x}+c_2xe^{2\lambda x}$. Aplicando las condiciones en la frontera y simplificando, obtenemos

$$c_1=0\quad c_1(1+2\lambda)+c_2(2+2\lambda)=0$$

Ahora tenemos que $c_1=0$ y ya sea $c_2=0$ o bien $\lambda=-1$. La elección de $c_2=0$ resulta en la solución trivial $y\equiv 0$; la elección de $\lambda=-1$ resulta en la solución no trivial $y=c_2xe^{-2x}$ con c_2 arbitraria. De este modo, el problema con valores en la frontera tiene el valor propio $\lambda=-1$ y la función propia $y=c_2xe^{-2x}$.

32.7. Encuentre los valores propios y las funciones propias de

$$y''-4\lambda y'+4\lambda^2y=0;\quad y'(1)=0,\quad y(2)+2y'(2)=0$$

Como en el problema 32.6 la solución a la ecuación diferencial es $y=c_1e^{2\lambda x}+c_2xe^{2\lambda x}$ Aplicando las condiciones en la frontera y simplificando, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}(2\lambda)c_1+(1+2\lambda)c_2&=0\\(1+4\lambda)c_1+(4+8\lambda)c_2&=0\end{aligned}\qquad (1)$$

Este sistema de ecuaciones tiene una solución no trivial para c_1 y c_2 si y sólo si el determinante

$$\begin{vmatrix}2\lambda & 1+2\lambda\\ 1+4\lambda & 4+8\lambda\end{vmatrix}=(1+2\lambda)(4\lambda-1)$$

es cero; es decir, si y sólo si o $\lambda=-\frac{1}{2}$ o bien $\lambda=\frac{1}{4}$. Cuando $\lambda=-\frac{1}{2}$, (*1*) tiene la solución $c_1=0$, con c_2 arbitraria; cuando $\lambda=\frac{1}{4}$, (*1*) tiene la solución $c_1=-3c_2$ con c_2 arbitraria. De aquí surge que los valores propios son $\lambda_1=-\frac{1}{2}$ y $\lambda_2=\frac{1}{4}$ y las correspondientes funciones propias son $y_1=c_2xe^{-x}$ y $y_2=c_2(-3+x)e^{x/2}$.

32.8. Encuentre los valores propios y las funciones propias de

$$y''+\lambda y'=0;\quad y(0)+y'(0)=0,\quad y'(1)=0$$

En términos de la variable m, la ecuación característica es $m^2+\lambda m=0$. Consideramos los casos $\lambda=0$ y $\lambda\neq 0$ separadamente, dado que ellos resultan en diferentes soluciones.

$\lambda = 0$: La solución de la ecuación diferencial es $y = c_1 + c_2x$. Aplicando las condiciones en la frontera, obtenemos las ecuaciones $c_1 + c_2 = 0$ y $c_2 = 0$. De lo que se desprende que $c_1 = c_2 = 0$, y $y \equiv 0$. Por lo tanto, $\lambda = 0$ no es un valor propio.

$\lambda \neq 0$: La solución de la ecuación diferencial es $y = c_1 + c_2e^{-\lambda x}$. Aplicando las condiciones en la frontera, obtenemos

$$c_1 + (1-\lambda)c_2 = 0$$
$$(-\lambda e^{-\lambda})c_2 = 0$$

Estas ecuaciones tienen una solución no trivial para c_1 y c_2 si y sólo si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda e^{-\lambda} \end{vmatrix} = -\lambda e^{-\lambda} = 0$$

que es una imposibilidad, dado que $\lambda \neq 0$.

Puesto que obtenemos sólo la solución trivial para $\lambda = 0$ y $\lambda \neq 0$, podemos concluir que el problema no tiene valores propios.

32.9. Encuentre los valores propios y las funciones propias de

$$y'' - 4\lambda y' + 4\lambda^2 y = 0; \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = 0$$

Como en el problema 32.6 la solución a la ecuación diferencial es $y = c_1e^{2\lambda x} + c_2xe^{2\lambda x}$. Aplicando las condiciones en la frontera y simplificando, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}(1+2\lambda)c_1 + c_2 &= 0 \\ (1-2\lambda)c_1 + (-2\lambda)c_2 &= 0\end{aligned} \tag{I}$$

Las ecuaciones (I) tienen una solución no trivial para c_1 y c_2 si y sólo si el determinante

$$\begin{vmatrix} 1+2\lambda & 1 \\ 1-2\lambda & -2\lambda \end{vmatrix} = -4\lambda^2 - 1$$

es cero; es decir, si y sólo si $\lambda = \pm\frac{1}{2}i$. Estos valores propios son números complejos. Para mantener la ecuación diferencial bajo consideración real, requerimos que λ sea real. Por lo tanto, este problema no tiene valores propios (reales) y la única solución (real) es la trivial: $y(x) \equiv 0$.

32.10. Encuentre los valores propios y las funciones propias de

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

La ecuación característica es $m^2 + \lambda = 0$. Consideramos los casos $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$ por separado, dado que conducen a soluciones diferentes.

$\lambda = 0$: La solución es $y = c_1 + c_2x$. Aplicando las condiciones en la frontera, obtenemos $c_1 = c_2 = 0$, que resulta en la solución trivial.

$\lambda < 0$: La solución es $y = c_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, donde $-\lambda$ y $\sqrt{-\lambda}$ son positivos. Aplicando las condiciones en la frontera, obtenemos

$$c_1 + c_2 = 0 \quad c_1e^{\sqrt{-\lambda}} - c_2e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0$$

Aquí

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}} & e^{-\sqrt{-\lambda}} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}} - e^{\sqrt{-\lambda}}$$

que nunca es cero para ningún valor de $\lambda < 0$. Por esto, $c_1 = c_2 = 0$ y $y \equiv 0$.

$\lambda > 0$: La solución es $A \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x + B \cos \sqrt{\lambda}x$. Aplicando las condiciones en la frontera, obtenemos $B = 0$ y $A \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} = 0$. Obsérvese que $\operatorname{sen} \theta = 0$ si y sólo si $\theta = n\pi$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Además, si $\theta > 0$, entonces n debe

ser positivo. Para satisfacer las condiciones de la frontera, $B = 0$ y $A = 0$ o bien sen $\sqrt{\lambda} = 0$. Esta última ecuación es equivalente a $\sqrt{\lambda} = n\pi$ donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ La elección $A = 0$ resulta en la solución trivial; la elección $\sqrt{\lambda} = n\pi$ resulta en la solución no trivial $y_n = A_n \operatorname{sen} n\pi x$. Aquí la notación A_n significa que la constante arbitraria A_n puede ser distinta para diferentes valores de n.

Agrupando los resultados de estos tres casos, concluimos que los valores propios son $\lambda_n = n^2\pi^2$ y las correspondientes funciones propias son $y_n = A_n \operatorname{sen} n\pi x$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$

32.11. Encuentre los valores propios y las funciones propias de

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

Como en el problema 32.10, los casos $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$ se deben considerar separadamente.

$\lambda = 0$: La solución es $y = c_1 + c_2 x$. Aplicando las condiciones en la frontera, obtenemos $c_1 = c_2 = 0$; por esto, $y \equiv 0$.

$\lambda < 0$: La solución es $y = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, donde $-\lambda$ y $\sqrt{-\lambda}$ son positivos. Aplicando las condiciones en la frontera, obtenemos

$$c_1 + c_2 = 0 \quad c_1\sqrt{-\lambda}\, e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - c_2\sqrt{-\lambda}\, e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0$$

que sólo admite la solución $c_1 = c_2 = 0$; por esto, $y \equiv 0$.

$\lambda > 0$: La solución es $y = A \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, x + B \cos \sqrt{\lambda}\, x$. Aplicando las condiciones en la frontera, obtenemos $B = 0$ y $A\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\pi = 0$. Para $\theta > 0$, $\cos\theta = 0$ si y sólo si θ es un múltiplo impar positivo de $\pi/2$; es decir, cuando $\theta = (2n-1)(\pi/2) = (n - \frac{1}{2})\pi$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ Por lo tanto, para satisfacer las condiciones en la frontera, debemos tener $B = 0$ y ya sea $A = 0$ o bien $\cos \sqrt{\lambda}\, \pi = 0$. Esta última ecuación es equivalente a $\sqrt{\lambda} = n - \frac{1}{2}$. La elección $A = 0$ resulta en la solución trivial; la elección $\sqrt{\lambda} = n - \frac{1}{2}$ resulta en la solución no trivial $y_n = A_n \operatorname{sen}(n - \frac{1}{2})x$.

Juntando los tres casos concluimos que los valores propios son $\lambda_n = (n - \frac{1}{2})^2$ y las correspondientes funciones propias $y_n = A_n \operatorname{sen}(n - \frac{1}{2})x$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$

32.12. Demuestre que el problema con valores en la frontera dado en el problema 32.10 es un problema de Sturm-Liouville.

Éste tiene la forma *(32.6)* con $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$ y $w(x) \equiv 1$. Aquí tanto $p(x)$ como $w(x)$ son positivas y continuas en todas partes, en particular en $[0, 1]$.

32.13. Determine si el problema con valores en la frontera

$$(xy')' + [x^2 + 1 + \lambda e^x]y = 0; \quad y(1) + 2y'(1) = 0, \quad y(2) - 3y'(2) = 0$$

es un problema de Sturm-Liouville.

Aquí $p(x) = x$, $q(x) = x^2 + 1$ y $w(x) = e^x$. Dado que tanto $p(x)$ como $q(x)$ son continuas y positivas en $[1, 2]$, el intervalo de interés, el problema con valores en la frontera es un problema de Sturm-Liouville.

32.14. Determine cuáles de las siguientes ecuaciones diferenciales con las condiciones en la frontera $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$ forman problemas de Sturm-Liouville:

a) $e^x y'' + e^x y' + \lambda y = 0$ *b)* $xy'' + y' + (x^2 + 1 + \lambda)y = 0$

c) $\left(\frac{1}{x}y'\right)' + (x + \lambda)y = 0$ *d)* $y'' + \lambda(1 + x)y = 0$

e) $e^{2x} y'' + e^{2x} y' + \lambda y = 0$

a) La ecuación se puede volver a escribir como $(e^x y')' + \lambda y = 0$; de aquí $p(x) = e^x$, $q(x) \equiv 0$ y $w(x) \equiv 1$. Éste es un problema de Sturm-Liouville.

b) La ecuación es equivalente a $(xy')' + (x^2 + 1)y + \lambda y = 0$; de aquí $p(x) = x$, $q(x) = x^2 + 1$ y $w(x) \equiv 1$. Dado que $p(x)$ es cero en un punto del intervalo $[0, 1]$, éste no es un problema de Sturm-Liouville.

c) Aquí $p(x) = 1/x$, $q(x) = x$ y $w(x) \equiv 1$. Dado que $p(x)$ no es continua en [0, 1], en particular en $x = 0$, éste no es un problema de Sturm-Liouville.

d) La ecuación se puede volver a escribir como $(y')' + \lambda(1+x)y = 0$; por esto, $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$ y $w(x) = 1 + x$. Éste es un problema de Sturm-Liouville.

e) La ecuación, en su forma presente, no es equivalente a la ecuación (*32.6*); éste no es un problema de Sturm-Liouville. Sin embargo, si primero multiplicamos la ecuación por e^{-x}, obtenemos $(e^x y')' + \lambda e^{-x} y = 0$; éste es un problema de Sturm-Liouville con $p(x) = e^x$, $q(x) \equiv 0$ y $w(x) = e^{-x}$.

2.15. Demuestre que la ecuación (*32.6*) es equivalente a la ecuación (*32.8*) si y sólo si $a_2'(x) = a_1(x)$.

Aplicando la regla del producto de la derivada a (*32.6*), encontramos que

$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y + \lambda w(x)y = 0 \tag{1}$$

Estableciendo $a_2(x) = p(x)$, $a_1(x) = p'(x)$, $a_0(x) = q(x)$ y $r(x) = w(x)$, se desprende que (*1*), la cual está reescrita como la ecuación (*32.6*), es precisamente (*29.8*) con $a_2'(x) = p'(x) = a_1(x)$.

De manera inversa, si $a_2'(x) = a_1(x)$, entonces (*32.8*) tiene la forma

$$a_2(x)y'' + a_2'(x)y' + a_0 8x)y + \lambda r(x)y = 0$$

que es equivalente a $[a_2(x)y'] + a_0(x)y + \lambda r(x)y = 0$. Esta última ecuación es precisamente (*32.6*) con $p(x) = a_2(x)$, $q(x) = a_0(x)$ y $w(x) = r(x)$.

2.16. Demuestre que si la ecuación (*32.8*) se multiplica por $I(x) = e^{\int [a_1(x)/a_2(x)]dx}$, la ecuación resultante es equivalente a la ecuación (*32.6*).

Multiplicando (*32.8*) por $I(x)$ obtenemos

$$I(x)a_2(x)y'' + I(x)a_1(x)y' + I(x)a_0(x)y + \lambda I(x)r(x)y = 0$$

que se puede reescribir como

$$a_2(x)[I(x)y']' + I(x)a_0(x)y + \lambda I(x)r(x)y = 0 \tag{1}$$

Divida (*1*) por $a_2(x)$ y luego establezca $p(x) = I$, $q(x) = I(x)a_0(x)/a_2(x)$ y $w(x) = I(x)r(x)/a_2(x)$; la ecuación resultante es precisamente (*32.6*). Obsérvese que dado que $I(x)$ es una exponencial y como $a_2(x)$ no se anula, $I(x)$ es positiva.

32.17. Transforme $y'' + 2xy' + (x + \lambda)y = 0$ en la ecuación (*32.6*) por medio del procedimiento detallado en el problema 32.16.

Aquí $a_2(x) \equiv 1$ y $a_1(x) = 2x$; de aquí $a_1(x)/a_2(x) = 2x$ y $I(x) = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$. Multiplicando la ecuación diferencial dada por $I(x)$, obtenemos

$$e^{x^2}y'' + 2xe^{x^2}y' + xe^{x^2}y + \lambda e^{x^2}y = 0$$

que se puede volver a escribir como

$$(e^{x^2}y')' + xe^{x^2}y + \lambda e^{x^2}y = 0$$

Esta última ecuación es precisamente la ecuación (*32.6*) con $p(x) = e^{x^2}$, $q(x) = xe^{x^2}$ y $w(x)e^{x^2}$.

32.18. Transforme $(x+2)y'' + 4y' + xy + \lambda e^x y = 0$ en la ecuación (*32.6*) por medio del procedimiento explicado en el problema 32.16.

Aquí $a_2(x) = x + 2$ y $a_1(x) \equiv 4$; de aquí $a_1(x)/a_2(x) = 4/(x+2)$ y

$$I(x) = e^{\int [4/(x+2)]dx} = e^{4\ln|x+2|} = e^{\ln(x+2)^4} = (x+2)^4$$

Multiplicando la ecuación diferencial dada por $I(x)$, obtenemos

$$(x+2)^5 y'' + 4(x+2)^4 y' + (x+2)^4 xy + \lambda(x+2)^4 e^x y = 0$$

que se puede reescribir como

$$(x+2)[x+2)^4 y']' + (x+2)^4 xy + \lambda(x+2)^4 e^x y = 0$$

o bien
$$[(x+2)^4 y']' + (x+2)^3 xy + \lambda(x+2)^3 e^x y = 0$$

Esta última ecuación es precisamente (32.6) con $p(x) = (x+2)^4$, $q(x) = (x+2)^3 x$ y $w(x) = (x+2)^3 e^x$. Obsérvese que dado que dividimos por $a_2(x)$, es necesario restringir $x \neq -2$. Además, para que tanto $p(x)$ como $w(x)$ sean positivas, requerimos que $x > -2$.

32.19. Verifique las propiedades de la 32.1 a la 32.4 para el problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Usando los resultados del problema 32.10, tenemos que los valores propios son $\lambda_n = n^2\pi^2$ y las correspondientes funciones propias son $y_n(x) = A_n \operatorname{sen} n\pi x$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Los valores propios son obviamente reales y no negativos, y pueden ordenarse como $\lambda_1 = \pi^2 < \lambda_2 = 4\pi^2 < \lambda_3 = 9\pi^2 < \cdots$. Cada valor propio tiene una función propia linealmente independiente y sencilla $e_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x$ asociada con él. Finalmente, dado que

$$\operatorname{sen} n\pi x \operatorname{sen} m\pi x = \frac{1}{2}\cos(n-m)\pi x - \frac{1}{2}\cos(n+m)\pi x$$

tenemos para $n \neq m$ y $w(x) \equiv 1$:

$$\begin{aligned}\int_a^b w(x)e_n(x)e_m(x)\,dx &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\cos(n-m)\pi x - \frac{1}{2}\cos(n+m)\pi x\right] dx \\ &= \left[\frac{1}{2(n-m)\pi}\operatorname{sen}(n-m)\pi x - \frac{1}{2(n+m)\pi}\operatorname{sen}(n+m)\pi x\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= 0\end{aligned}$$

32.20. Verifique las propiedades de la 32.1 a la 32.4 para el problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

Para este problema, calculamos los valores propios $\lambda_n = (n - \frac{1}{2})^2$ y las correspondientes funciones propias $y_n(x) = A_n \cos(n - \frac{1}{2})x$, para $n = 1, 2, \ldots$ Los valores propios son reales y positivos, y se pueden ordenar como

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} < \lambda_2 = \frac{9}{4} < \lambda_3 = \frac{25}{4} < \cdots$$

Cada valor propio tiene sólo una función propia linealmente independiente $e_n(x) = \cos(n - \frac{1}{2})x$ asociada con él. También, para $n \neq m$ y $w(x) \equiv 1$,

$$\begin{aligned}\int_a^b w(x)e_n(x)e_m(x)\,dx &= \int_0^\pi \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x \cos\left(m - \frac{1}{2}\right)x\,dx \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}\cos(n+m-1)x + \frac{1}{2}\cos(n-m)x\right] dx \\ &= \left[\frac{1}{2(n+m-1)}\operatorname{sen}(n+m-1)x + \frac{1}{2(n-m)}\operatorname{sen}(n-m)x\right]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

32.21. Pruebe que si el conjunto de funciones distintas de cero $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_p(x)\}$ satisface a (32.9), entonces el conjunto es linealmente independiente en $[a, b]$.

De (8.7) consideramos la ecuación

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_k y_k(x) + \cdots + c_p y_p(x) \equiv 0 \tag{1}$$

Multiplicando esta ecuación por $w(x)y_k(x)$ y luego integrando de a a b, obtenemos

$$\begin{aligned}&c_1\int_a^b w(x)y_k(x)y_1(x)\,dx + c_2\int_a^b w(x)y_k(x)y_2(x)\,dx + \cdots \\ &\quad + c_k\int_a^b w(x)y_k(x)y_k(x)\,dx + \cdots + c_p\int_a^b w(x)y_k(x)y_p(x)\,dx = 0\end{aligned}$$

De la ecuación (*29.9*), concluimos que para $i \neq k$,

$$c_k \int_a^b w(x) y_k(x) y_1(x)\, dx = 0$$

Pero dado que $y_k(x)$ es una función distinta de cero y $w(x)$ es positiva en $[a, b]$, se sigue que

$$\int_a^b w(x)[y_k(x)]^2\, dx \neq 0$$

de aquí, $c_k = 0$. Dado que $c_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, p$, es la única solución para (*1*), el conjunto de funciones dado es linealmente independiente en $[a, b]$.

PROBLEMAS ADICIONALES

En los problemas del 32.22 al 32.29, encuentre todas las soluciones, si es que existen, para los problemas con valores en la frontera dados.

32.22. $y'' + y = 0$; $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$

32.23. $y'' + y = x$; $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$

32.24. $y'' + y = 0$; $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 1$

32.25. $y'' + y = x$; $y(0) = -1$, $y(\pi/2) = 1$

32.26. $y'' + y = 0$; $y'(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$

32.27. $y'' + y = 0$; $y'(0) = 1$, $y(\pi/2) = 0$

32.28. $y'' + y = x$; $y'(0) = 1$, $y(\pi/2) = 0$

32.29. $y'' + y = 0$; $y'(0) = 1$, $y(\pi/2) = \pi/2$

En los problemas del 32.30 al 32.36, encuentre los valores propios y las funciones propias, de haberlos, de los problemas con valores en la frontera dados.

32.30. $y'' + 2\lambda y' + \lambda^2 y = 0$; $y(0) + y'(0) = 0$, $y(1) + y'(1) = 0$

32.31. $y'' + 2\lambda y' + \lambda^2 y = 0$; $y(0) = 0$, $y(1) = 0$

32.32. $y'' + 2\lambda y' + \lambda^2 y = 0$; $y(1) + y'(1) = 0$, $3y(2) + 2y'(2) = 0$

32.33. $y'' + \lambda y' = 0$; $y(0) + y'(0) = 0$, $y(2) + y'(2) = 0$

32.34. $y'' - \lambda y = 0$; $y(0) = 0$, $y(1) = 0$

32.35. $y'' + \lambda y = 0$; $y'(0) = 0$, $y(5) = 0$

32.36. $y'' + \lambda y = 0$; $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$

En los problemas del 32.37 al 32.43, determine si cada una de las ecuaciones diferenciales dadas con las condiciones en la frontera $y(-1) + 2y'(-1) = 0$, $y(1) + 2y'(1) = 0$ es un problema de Sturm-Liouville.

32.37. $(2 + \operatorname{sen} x)y'' + (\cos x)y' + (1 + \lambda)y = 0$

32.38. $(\operatorname{sen} \pi x)y'' + (\pi \cos \pi x)y' + (x + \lambda)y = 0$

32.39. $(\operatorname{sen} x)y'' + (\cos x)y' + (1 + \lambda)y = 0$

32.40. $(x+2)^2 y'' + 2(x+2)y' + (e^x + \lambda e^{2x})y = 0$

32.41. $(x+2)^2 y'' + (x+2)y' + (e^x + \lambda e^{2x})y = 0$

32.42. $y'' + \dfrac{3}{x^2}\lambda y = 0$

32.43. $y'' + \dfrac{3}{(x-4)^2}\lambda y = 0$

32.44. Transforme $e^{2x}y'' + e^{2x}y' + (x + \lambda)y = 0$ en la ecuación (*32.6*) por medio del procedimiento visto en el problema 32.16.

32.45. Transforme $x^2 y'' + xy' + \lambda xy = 0$ en la ecuación (*32.6*) por medio del procedimiento visto en el problema 32.16.

32.46. Verifique las propiedades de la 32.1 a la 32.4 para el problema de Sturm-Liouville.

$$y'' + \lambda = 0; \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

32.47. Verifique las propiedades de la 32.1 a la 32.4 para el problema de Sturm-Liouville.

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(2\pi) = 0$$

EXPANSIONES DE LAS FUNCIONES PROPIAS

33

FUNCIONES SUAVES A TROZOS

Una amplia clase de funciones se puede representar por series infinitas de funciones propias de un problema de Sturm-Liouville (véase el capítulo 32).

Definición: Una función $f(x)$ es *continua a trozos en el intervalo abierto* $a < x < b$ si (1) $f(x)$ es continua en todas partes en $a < x < b$ con la posible excepción de a lo sumo un número *finito* de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y (2) en esos puntos de discontinuidad, los límites derecho e izquierdo de $f(x)$, respectivamente $\lim\limits_{\substack{x \to x_j \\ x > x_j}} f(x)$ y $\lim\limits_{\substack{x \to x_j \\ x < x_j}} f(x)$, existen ($j = 1, 2, \ldots, n$).

(Nótese que una función continua es continua a trozos.)

Definición: Una función $f(x)$ es *continua a trozos en el intervalo cerrado* $a \le x \le b$ si (1) es continua a trozos en el intervalo abierto $a < x < b$, (2) el límite del lado derecho de $f(x)$ existe en $x = a$, y (3) el límite del lado izquierdo de $f(x)$ existe en $x = b$.

Definición: Una función es *suave a trozos* en $[a, b]$ si tanto $f(x)$ como $f'(x)$ son continuas a trozos en $[a, b]$.

Teorema 33.1. Si $f(x)$ es suave a trozos en $[a, b]$ y si $\{e_n(x)\}$ es el conjunto de todas las funciones propias de un problema de Sturm-Liouville (véase la propiedad 32.3), entonces

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x) \tag{33.1}$$

donde

$$c_n = \frac{\int_a^b w(x) f(x) e_n(x)\, dx}{\int_a^b w(x) e_n^2(x)\, dx} \tag{33.2}$$

La representación (*33.1*) es válida en todos los puntos del intervalo abierto (a, b) donde $f(x)$ es continua. La función $w(x)$ en (*33.2*) está dada en la ecuación (*32.6*).

Debido a que diferentes problemas de Sturm-Liouville comúnmente generan diferentes conjuntos de funciones propias, una función suave a trozos tendrá muchas expansiones de la forma (*33.1*). Las características básicas de todas esas expansiones se exhiben por medio de las series trigonométricas que se discuten a continuación.

SERIES DE FOURIER DE TIPO SENO

Las funciones propias del problema de Sturm-Liouville $y'' + \lambda y = 0$; $y(0) = 0$, $y(L) = 0$, donde L es un númerc positivo real, son $e_n(x) = \text{sen}(n\pi x/L)(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Sustituyendo estas funciones en (*33.1*), obtenemos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \,\text{sen}\, \frac{n\pi x}{L} \tag{33.3}$$

Para este problema de Sturm-Liouville, $w(x)$ 1, $a = 0$ y $b = L$; de modo que

$$\int_a^b w(x)e_n^2(x)\,dx = \int_0^L \text{sen}^2 \frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{L}{2}$$

y (*33.2*) se convierte en

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{33.4}$$

La expansión (*33.3*) con coeficientes dados por (*33.4*) es la *serie de Fourier de tipo seno* para $f(x)$ en $(0, L)$.

SERIES DE FOURIER DE TIPO COSENO

Las funciones propias del problema de Sturm-Liouville $y'' + \lambda y = 0$; $y'(0) = 0$, $y'(L) = 0$, donde L es un número positivo real, son $e_0(x) = 1$ y $e_n(x) = \cos(n\pi x/L)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Aquí $\lambda = 0$ es un valor propio con la correspondiente función propia $e_0(x) = 1$. Sustituyendo estas funciones en (*33.1*), donde debido a la función propia adicional $e_0(x)$ la sumatoria comienza ahora en $n = 0$, obtenemos

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{L} \tag{33.5}$$

Para este problema de Sturm-Liouville, $w(x) \equiv 1$, $a = 0$ y $b = L$; de modo que

$$\int_a^b w(x)e_0^2(x)\,dx = \int_0^L dx = L \quad \int_a^b w(x)e_n^2(x)\,dx = \int_0^L \cos^2\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{L}{2}$$

De este modo (*33.2*) se convierte en

$$c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \quad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{33.6}$$

La expansión (*33.5*) con coeficientes dados por (*33.6*) es la *serie de Fourier de tipo coseno* para $f(x)$ en $(0, L)$.

PROBLEMAS RESUELTOS

33.1. Determine si $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ 1/x & x < 0 \end{cases}$ es continua a trozos en $[-1, 1]$.

La función dada es continua en todas partes en $[-1, 1]$ excepto en $x = 0$. Por lo tanto, si los límites de los lados izquierdo y derecho existen en $x = 0$, $f(x)$ será continua a trozos en $[-1, 1]$. Tenemos

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x^2 + 1) = 1 \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

Dado que el límite del lado izquierdo no existe, $f(x)$ no es continua a trozos en $[-1, 1]$.

33.2. ¿Es $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} \pi x & x>1 \\ 0 & 0\le x\le 1 \\ e^x & -1<x<0 \\ x^3 & x\le -1 \end{cases}$ continua a trozos en [–2, 5]?

La función dada es continua en [–2, 5], excepto en los dos puntos $x_1 = 0$ y $x_2 = -1$. (Obsérvese que $f(x)$ es continua en $x = 1$.) En los dos puntos de discontinuidad encontramos que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{x\to 0} 0=0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{x\to 0} e^x=e^0=1$$

y

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=\lim_{x\to -1} e^x=e^{-1} \qquad \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=\lim_{x\to -1} x^3=-1$$

Dado que todos los límites requeridos existen, $f(x)$ es continua a trozos en [–2, 5].

33.3. ¿Es la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<0 \\ 1 & 0\le x\le 1 \\ 2x+1 & x>1 \end{cases}$$

suave a trozos en [–2, 2]?

Esta función es continua en todas partes en [–2, 2] excepto en $x_1 = 1$. Dado que los límites requeridos existen en x_1, $f(x)$ es continua a trozos. Derivando $f(x)$ obtenemos

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x<0 \\ 0 & 0\le x\le 1 \\ 2 & x>1 \end{cases}$$

La derivada no existe en $x_1 = 1$ pero es continua en todos los otros puntos en [–2, 2]. En x_1, el límite requerido existe; de aquí que $f'(x)$ es continua a trozos. Luego, se desprende que $f(x)$ es suave a trozos en [–2, 2].

33.4. ¿Es la función

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ \sqrt{x} & 0\le x\le 1 \\ x^3 & x>1 \end{cases}$$

suave a trozos sobre [–1, 3]?

La función $f(x)$ es continua en todas partes en [–1, 3] excepto en $x_1 = 0$. Dado que los límites requeridos existen en x_1, $f(x)$ es continua a trozos. Derivando $f(x)$ obtenemos

$$f'(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & 0<x<1 \\ 3x^2 & x>1 \end{cases}$$

que es continua en todas partes en [–1, 3], excepto en los dos puntos $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$ donde la derivada no existe. En x_1,

$$\lim_{\substack{x\to x_1\\ x>x_1}} f'(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{2\sqrt{x}}=\infty$$

De aquí, uno de los límites requeridos no existe. De aquí se deprende que $f'(x)$ no es continua a trozos, y por lo tanto que $f(x)$ no es suave a trozos en [–1, 3].

33.5. Encuentre una serie de Fourier de tipo seno para $f(x) = 1$ en $(0, 5)$.

Usando la ecuación (*33.4*) con $L = 5$, obtenemos

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{5}\int_0^5 (1)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{5}\,dx \\ &= \frac{2}{5}\left[-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right]_{x=0}^{x=5} = \frac{2}{n\pi}[1-\cos n\pi] = \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n] \end{aligned}$$

De este modo, la ecuación (*33.3*) se convierte en

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{5} \\ &= \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{5} + \cdots\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Dado que $f(x) = 1$ es suave a trozos en $[0, 5]$ y continua en todas partes en el intervalo abierto $(0, 5)$, del teorema 33.1 se desprende que (*1*) es válida para toda x en $(0, 5)$.

33.6. Encuentre una serie de Fourier de tipo coseno para $f(x) = x$ en $(0, 3)$.

Usando la ecuación (*33.6*) con $L = 3$, obtenemos

$$c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^3 x\,dx = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^3 x\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx \\ &= \frac{2}{3}\left[\frac{3x}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\right]_{x=0}^{x=3} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{9}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{9}{n^2\pi^2}\right) = \frac{6}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

De este modo, la ecuación (*33.5*) se convierte en

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1]\cos\frac{n\pi x}{3} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{12}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{3} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{3} + \frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{3} + \cdots\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Dado que $f(x) = x$ es suave a trozos en $[0, 3]$ y continua en todas partes en el intervalo abierto $(0, 3)$, del teorema 33.1 se desprende que (*1*) es válida para toda x en $(0, 3)$.

33.7. Encuentre una serie de Fourier de tipo seno para $f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$ en $(0, 3)$.

Usando la ecuación (*33.4*) con $L = 3$, obtenemos

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}\,dx \\ &= \frac{2}{3}\int_0^2 (0)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}\,dx + \frac{2}{3}\int_2^3 (2)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}\,dx \\ &= 0 + \frac{4}{3}\left[-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\right]_{x=2}^{x=3} = \frac{4}{n\pi}\left[\cos\frac{2n\pi}{3} - \cos n\pi\right] \end{aligned}$$

De este modo, la ecuación (*33.3*) se convierte en

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\left[\cos\frac{2n\pi}{3}-(-1)^n\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}$$

Además, $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2},\quad \cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2},\quad \cos\frac{6\pi}{3}=1,\ \ldots$

De aquí,

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{3}-\frac{3}{4}\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{3}+\frac{2}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{3}-\cdots\right) \qquad (1)$$

Dado que $f(x)$ es suave a trozos sobre [0, 3] y continua en todas partes en (0, 3) excepto en $x = 2$, del teorema 33.1 se desprende que (*1*) es válida en todas partes dentro de (0, 3) excepto en $x = 2$.

33.8. Encuentre una serie de Fourier de tipo seno para $f(x)=e^x$ sobre $(0,\pi)$.

Usando la ecuación (*33.4*) con $L = \pi$, obtenemos

$$c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{\pi}\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{e^x}{1+n^2}(\operatorname{sen}nx-n\cos nx)\right]_{x=0}^{x=\pi}$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{n}{1+n^2}\right)(1-e^{\pi}\cos n\pi)$$

De este modo, la ecuación (*33.3*) se convierte en

$$e^x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}[1-e^{\pi}(-1)^n]\operatorname{sen}nx$$

Del teorema 33.1 se desprende que esta última ecuación es válida para toda x en $(0,\pi)$.

33.9. Encuentre una serie de Fourier de tipo coseno para $f(x)=e^x$ sobre $(0,\pi)$.

Usando la ecuación (*33.6*) con $L = \pi$, obtenemos

$$c_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^x dx=\frac{1}{\pi}(e^{\pi}-1)$$

$$c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^x\cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{e^x}{1+n^2}(\cos nx+n\operatorname{sen}nx)\right]_{x=0}^{x=\pi}$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1+n^2}\right)(e^{\pi}\cos n\pi-1)$$

De este modo, la ecuación (*33.5*) se convierte en

$$e^x=\frac{1}{\pi}(e^{\pi}-1)+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}[(-1)^n e^{\pi}-1]\cos nx$$

Como en el problema 33.8, esta última ecuación es válida para toda x en $(0,\pi)$.

33.10. Encuentre una expansión para $f(x) = e^x$ en términos de las funciones propias del problema de Sturm-Liouville $y'' + \lambda y = 0$; $y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

Del problema 32.20, tenemos $e_n(x) = \cos(n - \frac{1}{2})x$ para $n = 1, 2, \ldots$ Sustituyendo estas funciones y $w(x) \equiv 1$, $a = 0$ y $b = \pi$ en la ecuación (*33.2*), obtenemos para el numerador:

$$\int_a^b w(x)f(x)e_n(x)dx = \int_0^\pi \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x\,dx$$

$$= \frac{e^x}{1 + (n - \frac{1}{2})^2}\left[\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x + \left(n - \frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right]_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \frac{-1}{1 + (n - \frac{1}{2})^2}\left[e^\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)(-1)^n + 1\right]$$

y para el denominador:

$$\int_a^b w(x)e_n^2(x)dx = \int_0^\pi \cos^2\left(n - \frac{1}{2}\right)x\,dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{4(n - \frac{1}{2})}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\pi}{2}$$

De este modo,

$$c_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-1}{1 + (n - \frac{1}{2})^2}\right]\left[e^\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)(-1)^n + 1\right]$$

y la ecuación (*33.1*) se convierte en

$$e^x = \frac{-2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 + (-1)^n e^\pi (n - \frac{1}{2})}{1 + (n - \frac{1}{2})^2}\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x$$

Por el teorema 33.1, esta última ecuación es válida para toda x en $(0, \pi)$.

33.11. Encuentre una expansión para $f(x) = 1$ en términos de las funciones propias del problema de Sturm-Liouville $y'' + \lambda y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(1) = 0$.

Podemos demostrar que las funciones propias son $e_n(x) = \operatorname{sen}(n - \frac{1}{2})\pi x$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Sustituyendo estas funciones y $w(x) \equiv 1$, $a = 0$, $b = 1$ en la ecuación (*33.2*), obtenemos para el numerador:

$$\int_a^b w(x)f(x)e_n(x)\,dx = \int_0^1 \operatorname{sen}\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\,dx$$

$$= \frac{-1}{(n - \frac{1}{2})\pi}\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\Big|_0^1 = \frac{1}{(n - \frac{1}{2})\pi}$$

y para el denominador:

$$\int_a^b w(x)e_n^2(x)\,dx = \int_0^1 \operatorname{sen}^2\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\,dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi x}{4(n - \frac{1}{2})}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}$$

De este modo,

$$c_n = \frac{2}{(n - \frac{1}{2})\pi}$$

y la ecuación (*33.1*) se convierte en

$$1 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n - \frac{1}{2})\pi x}{n - \frac{1}{2}}$$

Por el teorema 33.1, esta última ecuación es válida para toda x en $(0, 1)$.

PROBLEMAS ADICIONALES

33.12. Encuentre una serie de Fourier de tipo seno para $f(x) = 1$ sobre (0, 1).

33.13. Encuentre una serie de Fourier de tipo seno para $f(x) = x$ sobre (0, 3).

33.14. Encuentre una serie de Fourier de tipo coseno para $f(x) = x^2$ sobre $(0, \pi)$.

33.15. Encuentre una serie de Fourier de tipo coseno para $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$ sobre (0, 3).

33.16. Encuentre una serie de Fourier de tipo coseno para $f(x) = 1$ sobre (0, 7).

33.17. Encuentre una serie de Fourier de tipo seno para $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$ sobre (0, 2).

33.18. Encuentre una expansión para $f(x) = 1$ en términos de las funciones propias del problema de Sturm-Liouville $y'' + \lambda y = 0$; $y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

33.19. Encuentre una expansión para $f(x) = x$ en términos de las funciones propias del problema de Sturm-Liouville $y'' + \lambda y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

33.20. Determine si las siguientes funciones son continuas a trozos en [–1, 5]:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 2 \\ 4 & 0 < x < 2 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1/(x-2)^2 & x > 2 \\ 5x^2 - 1 & x \leq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)}$

33.21. ¿Cuáles de las siguientes funciones son suaves a trozos en [–2, 3]?:

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 & x < 0 \\ \operatorname{sen} \pi x & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 5x & x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 1 \\ \sqrt{x} & x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \ln|x|$

d) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \leq 1 \\ (x-1)^{1/3} & x > 1 \end{cases}$

UNA INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS

34

INTRODUCCIÓN

En este capítulo consideramos funciones, $y_n = f(n)$, que están definidas para valores de números enteros no negativos $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Así, por ejemplo, si $y_n = n^3 - 4$, entonces los primeros términos son $\{y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots\}$ o bien $\{-4, -3, 4, 23, 60, \ldots\}$. Como trataremos con *ecuaciones en diferencias*, nos preocuparemos por las *diferencias* más que por las *derivadas*. Sin embargo, veremos que existe una fuerte conexión entre las ecuaciones en diferencias y las ecuaciones diferenciales.

Una *diferencia* se define de la siguiente manera: $\Delta y_n = y_{n+1} - y$ y una ecuación que implique una diferencia se denomina *ecuación en diferencias*, que es simplemente una ecuación que implica una función desconocida, y_n, evaluada en dos o más valores diferentes de n. De este modo, $\Delta y_n = 9 + n^2$, es un ejemplo de una ecuación en diferencias, que se puede volver a escribir como $y_{n+1} - y_n = 9 + n^2$ o bien

$$y_{n+1} = y_n + 9 + n^2 \qquad (34.1)$$

Decimos que n es la *variable independiente* o el *argumento*, en tanto que y es la *variable dependiente*.

CLASIFICACIONES

La ecuación (*34.1*) se puede clasificar como una *ecuación en diferencias, lineal, no homogénea y de primer orden*. Estos términos reflejan a sus contrapartes, las ecuaciones diferenciales. Ahora, damos las siguientes definiciones:

- El *orden* de una ecuación en diferencias está definido como la diferencia entre el argumento mayor y el argumento menor.
- Una ecuación en diferencias es *lineal* si todas las formas de y son lineales, sin importar lo que puedan ser los argumentos; de otro modo, se le clasifica como *no lineal*.
- Una ecuación en diferencias es *homogénea* si cada término contiene la variable dependiente; de no ser así, es *no homogénea*.

Observamos que las ecuaciones en diferencias también se denominan *relaciones de recurrencia* o *fórmulas de recursión* (véase el problema 34.7).

SOLUCIONES

Las *soluciones* para las ecuaciones en diferencias normalmente se clasifican como *particulares* o *generales*, dependiendo de si hay o no *condiciones iniciales* asociadas. Las soluciones se verifican por medio de la sustitución directa (véanse los problemas del 34.8 al 34.10). La teoría de las soluciones para las ecuaciones en diferencias es virtualmente idéntica a la de las ecuaciones diferenciales (véase el capítulo 8) y las técnicas de "*intuir* soluciones" son de algún modo una reminiscencia de los métodos empleados para las ecuaciones diferenciales (véanse los capítulos 9 y 11).

Por ejemplo, intuiremos $y_n = \rho^n$ para resolver una ecuación en diferencias homogéneas con coeficientes constantes. La sustitución de la "intuición" nos permitirá resolver para ρ. Vea, por ejemplo, los problemas 34.11 y 34.12.

También usaremos el método de los *coeficientes indeterminados* para obtener unas soluciones particulares para una ecuación no homogénea. Véase el problema 34.13.

PROBLEMAS RESUELTOS

En los problemas del 34.1 al 34.6, considere las siguientes ecuaciones en diferencias y determine a continuación: la variable independiente, la variable dependiente, el orden, si son lineales o si son homogéneas.

34.1. $y_{n+3} = 4y_n$

La variable independiente es n, la variable dependiente es y. Ésta es una ecuación de tercer orden ya que la diferencia entre el argumento mayor menos el argumento menor es $(n + 3) - n = 3$. Es lineal debido a la linealidad tanto de y_{n+3} como de y_n. Finalmente, es homogénea porque cada término contiene la variable independiente, y.

34.2. $t_{i+2} = 4 + t_{i-3} - 5t_{i-5}$

La variable independiente es i, la variable dependiente es t. Ésta es una ecuación de séptimo orden ya que la diferencia entre el argumento mayor menos el argumento menor es 7. Es lineal debido a la forma lineal de las t_i, y es no homogénea debido al 4, que aparece de manera independiente de las t_i.

34.3. $z_k z_{k+1} = 10$

La variable independiente es k, la variable dependiente es z. Ésta es una ecuación de primer orden. Es no lineal porque, aun cuando z_k y z_{k+1} aparecen a la primera potencia, no aparecen linealmente (cualquier otra cosa más que sen z_k es lineal). Es no homogénea debido al solitario 10 sobre el lado derecho de la ecuación.

34.4. $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ donde $f_0 = 1,\ f_1 = 1$

La variable independiente es n, la variable dependiente es f. Ésta es una ecuación de segundo orden que es lineal y homogénea. Vemos que hay dos condiciones iniciales. También notamos que esta relación, unida a las condiciones iniciales, genera un clásico conjunto de valores conocido como los números de Fibonacci (véanse los problemas 34.7 y 34.30).

34.5. $y_r = 9\cos y_{r-4}$

La variable independiente es r, la variable dependiente es y. Ésta es una ecuación de cuarto orden. Es no lineal debido a la forma de $\cos y_{r-4}$; es una ecuación homogénea porque ambos términos contienen la variable dependiente.

34.6. $2^n + x_n = x_{n+8}$

La variable independiente es n, la variable dependiente es x. Ésta es una ecuación en diferencias de octavo orden. Es no homogénea debido al término 2^n.

34.7. Mediante cálculos recursivos, genere los primeros 11 números de Fibonacci usando el problema 34.4.

Sabemos que $f_0 = 1$ y $f_1 = 1$ y $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Usando esta fórmula de recursión, con $n = 0$, tenemos, $f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 1 = 2$. Ahora establecemos $n = 1$, esto implica $f_3 = f_2 + f_1 = 2 + 1 = 3$. Continuando de esta manera recursiva, tenemos lo siguiente: $f_4 = 5$, $f_5 = 8$, $f_6 = 13$, $f_7 = 21$, $f_8 = 34$, $f_9 = 55$ y $f_{10} = 89$.

34.8. Verifique que $y_n = c(4^n)$, donde c es cualquier constante, resuelve la ecuación en diferencias $y_{n+1} = 4y_n$.

Sustituyendo nuestra solución en el lado izquierdo de la ecuación en diferencias, tenemos $y_{n+1} = c(4^{n+1})$. El lado derecho se convierte en $4c(4^n) = c(4^{n+1})$, que es precisamente el resultado que obtuvimos cuando sustituimos nuestra solución en el lado izquierdo. La ecuación es verdadera por igual para toda n; es decir, se puede escribir como $4c(4^n) \equiv c(4^{n+1})$. Por esto, hemos verificado nuestra solución. Vemos que esta solución se puede considerar como la solución general para esta ecuación lineal y de primer orden, dado que la ecuación se satisface para cualquier valor de c.

34.9. Considere la ecuación en diferencias $a_{n+2} + 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ con las condiciones impuestas; $a_0 = 1$, $a_1 = -4$. Verifique que $a_n = 2(-3)^n - (-2)^n$ resuelve la ecuación y satisface ambas condiciones.

Dejando $n = 0$ y $n = 1$ en a_n, claramente obtenemos $a_0 = 1$ y $a_1 = -4$, por lo tanto se satisfacen nuestras dos condiciones subsidiarias. La sustitución de a_n en la ecuación en diferencias da

$$2(-3)^{n+2} - (-2)^{n+2} + 5[2(-3)^{n+1} - (-2)^{n+1}] + 6[2(-3)^n - (-2)^n =$$
$$9(2)(-3)^n - 4(-2)^n + 5[-6(-3)^n + 2(-2)^n] + 12(-3)^n - 6(-2)^n =$$
$$18(-3)^n - 4(-2)^n - 30(-3)^n + 10(-2)^n + 12(-3)^n - 6(-2) \equiv 0.$$

De esta forma, la ecuación se satisface con a_n.

Vemos que esta solución se puede considerar como una solución particular, como opuesta a la solución general, porque esta ecuación va apareada con condiciones específicas.

34.10. Verifique que $p_n = c_1(3)^n + c_2(5)^n + 3 + 4n$, donde c_1 y c_2 son constantes cualesquiera, satisface la ecuación en diferencias $p_{n+2} = 8p_{n+1} - 15p_n + 32n$.

Con n, $n + 1$ y $n + 2$ en p_n y sustituyendo en la ecuación se produce

$$c_1(3)^{n+2} + c_2(5)^{n+2} + 3 + 4(n+2)$$
$$= 8[c_1(3)^{n+1} + c_2(5)^{n+1} + 3 + 4(n+1)] - 15[c_1(3)^n + c_2(5)^n + 3 + 4n] + 32n$$

de donde ambos lados se simplifican a $9c_1(3)^n + 25c_2(5)^n + 11 + 4n$, verificando por lo tanto la solución.

34.11. Considere la ecuación en diferencias $y_{n+1} = -6y_n$. Intuyendo $y_n = \rho^n$ para $\rho \neq 0$, encuentre una solución para esta ecuación.

La sustitución directa da $\rho^{n+1} = -6\rho^n$ que implica que $\rho = -6$. De aquí, $y_n = (-6)^n$ es una solución para nuestra ecuación en diferencias, que se puede verificar fácilmente. Vemos que $y_n = k = (-6)^n$ también resuelve la ecuación en diferencias, donde k es cualquier constante. Esto se puede considerar como la solución general.

34.12. Usando la técnica empleada en el problema previo encuentre la solución general para $3b_{n+2} + 4b_{n+1} + b_n = 0$.

Sustituir el valor tentativo $b_n = \rho^n$ en la ecuación en diferencias da $3\rho^{n+2} + 4\rho^{n+1} + \rho^n = \rho^n(3\rho^2 + 4\rho + 1) = 0$, que implica $3\rho^2 + 4\rho + 1 = 0$. Esto resulta en $\rho = \frac{-1}{3}, -1$. De modo que la solución general, tal como se puede verificar fácilmente, es $c_1\left(\frac{-1}{3}\right)^n + c_2(-1)^n$, donde las c_i son constantes arbitrarias.

Vemos que $3\rho^2 + 4\rho + 1 = 0$ se denomina la ecuación característica. Sus raíces se pueden manejar exactamente del mismo modo en que se tratan las ecuaciones características deducidas de las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes (véase el capítulo 9).

34.13. Resuelva $d_{n+1} = 2d_n + 6n$, intuyendo una solución así $d_n = An + B$, donde A y B son coeficientes a determinar.

La sustitución de nuestro "tanteo" en la ecuación en diferencia conduce a la identidad $A(n+1) + B \equiv 2(An + B) + 6n$. Igualando los coeficientes de potencias similares de n, tenemos que $A = 2A + 6$ y $A + B = 2B$, lo que implica que $A = B = -6$. De aquí, nuestra solución se convierte en $d_n = -6n - 6$.

Vemos que el método de "coeficientes indeterminados" se presentó en el capítulo 11 con respecto a las ecuaciones diferenciales. Nuestra tentativa aquí es la contraparte de variable discreta, asumiendo un polinomio de primer grado, porque la parte no homogénea de la ecuación es un polinomio de primer grado.

34.14. Encuentre la solución general para la ecuación en diferencias no homogénea $d_{n+1} = 2d_n + 6n$, si sabemos que la solución general para la correspondiente ecuación homogénea es $d_n = k(2)^n$, donde k es una constante cualquiera.

Debido a que la teoría de soluciones para ecuaciones en diferencias se puede comparar con la de las ecuaciones diferenciales (véase el capítulo 8), la solución general para la ecuación no homogénea es la *suma* de la solución general para la correspondiente ecuación homogénea más cualquier solución para la ecuación no homogénea.

Dado que se nos da la solución general para la ecuación homogénea, y conocemos una solución particular para la ecuación no homogénea (véase el problema 34.13), la solución esperada es $d_n = k(2)^n - 6n - 6$.

34.15. Considere la ecuación en diferencias $y_{n+2} + 6y_{n+1} + 9y_n = 0$. Use la técnica de tanteo presentada en el problema 34.11 y encuentre la solución general.

Asumir $y_n = \rho^n$ nos conduce a $\rho^n(\rho^2 + 6\rho + 9) = 0$ lo cual implica que $\rho = -3, -3$, una raíz doble. Esperamos dos soluciones "linealmente independientes" para las ecuaciones en diferencias, dado que ésta es de segundo orden. De hecho, siguiendo el caso idéntico en el que la ecuación característica para ecuaciones diferenciales de segundo orden tiene una raíz doble (véase el capítulo 9), fácilmente podemos verificar que $y_n = c_1(-3)^n + c_2 n(-3)^n$ en realidad resuelve la ecuación y es, de hecho, la solución general.

34.16. Suponga que invierte \$100 el último día del mes a una tasa anual de 6%, compuesto mensualmente. Si invierte \$50 adicionales el último día de cada mes subsiguiente, ¿cuánto dinero tendría después de cinco años?

Modelaremos esta situación (véase el capítulo 2) usando una ecuación en diferencias.

Aquí y_n representa la cantidad *total* de dinero (\$) al fin del mes n. Por lo tanto, $y_0 = 100$. Dado que el 6% de interés se compone mensualmente, la cantidad de dinero al final del primer mes es igual a la *suma* de y_0 y la cantidad generada durante el primer mes, que es $100(.06/12) = 0.50$ (dividimos por 12 porque estamos componiendo *mensualmente*). De aquí, $y_1 = 100 + 0.50 + 50$ (pues agregamos \$50 al final de cada mes). Vemos que $y_1 = y_0 + 0.005y_0 + 50 = (1.005)y_0 + 50$.

Trabajando sobre esta ecuación, vemos que $y_2 = (1.005)y_1 + 50$. Y, en general, nuestra ecuación en diferencias se convierte en $y_{n+1} = (1.005)y_n + 50$, con la condición inicial $y_0 = 100$.

Resolvemos esta ecuación en diferencias siguiendo los métodos presentados en problemas previos. Es decir, primero tanteamos o "intuimos" una solución homogénea de la forma $y_n = k\rho^n$, donde k es una constante a determinar.

La sustitución de esta conjetura en la ecuación en diferencias produce $k\rho^{n+1} \equiv (1.005)k\rho^n$; esto implica que $\rho = 1.005$. Resolveremos para k después de encontrar una solución para la parte no homogénea de la ecuación en diferencias.

Debido a que el grado de la parte no homogénea de nuestra ecuación en diferencias es 0 (50 es una constante), colocamos $y_n = C$, donde debemos determinar C.

La sustitución en la ecuación en diferencias implica que $C = (1.005)C + 50$, que conduce a $C = -10\,000$.

Sumando nuestras soluciones obtenemos la solución general de la ecuación en diferencias como:

$$y_n = k(1.005)^n - 10000. \qquad (1)$$

Finalmente, obtenemos k imponiendo nuestra condición inicial: $y_0 = 100$. Dejar $n = 0$ en (1) implica $100 = k(1.005)^0 - 1\,000 = k - 1\,000$, de aquí, k 10 100. De modo que (1) se convierte en

$$y_n = 10100(1.005)^n - 10000. \qquad (2)$$

La ecuación (2) nos da la cantidad de dinero acumulada después de n meses. Para encontrar la cantidad de dinero después de cinco años, colocamos $n = 60$ en (2) y encontramos que $y_{60} = 3623.39$.

PROBLEMAS ADICIONALES

En los problemas del 34.17 al 34.20, considere las siguientes ecuaciones en diferencias y determine lo siguiente: (1) la variable independiente; (2) la variable dependiente; (3) el orden; (4) si son o no lineales, y (5) si son o no homogéneas.

34.17. $u_{n+7} = 6\sqrt{u_n}$.

34.18. $w_k = 6^k + k + 1 + \ln w_{k-1}$.

34.19. $z_t + z_{t+1} + z_{t+2} + z_{t+3} = 0$.

34.20. $g_{m-2} = 7g_{m+2} + g_{m+11}$.

34.21. Verifique que $a_n = c_1(2)^n + c_2(-2)^n$ satisfaga $a_{n+2} = 4a_n$, donde c_1 y c_2 son constantes cualesquiera.

34.22. Verifique que $b_n = c_1(5)^n + c_2 n(5)^n$ satisfaga $b_{n+2} - 10b_{n+1} + 25b_n = 0$, donde c_1 y c_2 son constantes cualesquiera.

34.23. Verifique que $r_n = \frac{19}{16} - \frac{3}{16}(5)^n - \frac{1}{4}n$ satisfaga $r_{n+2} = 6r_{n+1} - 5r_n + 1$, sujeta a $r_0 = 1$, $r_1 = 0$.

34.24. Encuentre la solución general para $k_{n+1} = -17k_n$.

34.25. Encuentre la solución general para $y_{n+2} = 11y_{n+1} + 12y_n$.

34.26. Encuentre la solución general para $x_{n+2} = 20x_{n+1} - 100x_n$.

34.27. Encuentre una solución particular para $w_{n+1} = 4w_n + 6^n$ conjeturando $w_n = A(6)^n$ y resolviendo A.

34.28. Encuentre la solución general para $y_{n+1} = 2v_n + n^2$.

34.29. Resuelva el problema previo con la condición inicial $v_0 = 7$.

34.30. Resuelva la ecuación de Fibonacci $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, sujeta a $f_0 = f_1 = 1$.

34.31. Suponga que invierte $500 el último día del mes a una tasa anual del 12%, compuesta mensualmente. Si invierte un adicional de $75 el último día de cada mes subsiguiente, ¿cuánto dinero habrá acumulado después de diez años?

La ecuación (2) nos da la cantidad de dinero acumulada después de n meses. Para encontrar la cantidad de dinero después de cinco años, colocamos $n = 60$ en (2) y encontramos que $y_{60} = 3623.39$.

PROBLEMAS ADICIONALES

En los problemas del 34.17 al 34.20, considere las siguientes ecuaciones en diferencias y determine lo siguiente: (1) la variable independiente; (2) la variable dependiente; (3) el orden; (4) si son o no lineales, y (5) si son o no homogéneas.

34.17. $u_{n+7} = 6\sqrt{u_n}$.

34.18. $w_k = 6^k + k + 1 + \ln w_{k-1}$.

34.19. $z_t + z_{t+1} + z_{t+2} + z_{t+3} = 0$.

34.20. $g_{m-2} = 7g_{m+2} + g_{m+11}$.

34.21. Verifique que $a_n = c_1(2)^n + c_2(-2)^n$ satisfaga $a_{n+2} = 4a_n$, donde c_1 y c_2 son constantes cualesquiera.

34.22. Verifique que $b_n = c_1(5)^n + c_2 n(5)^n$ satisfaga $b_{n+2} - 10b_{n+1} + 25b_n = 0$, donde c_1 y c_2 son constantes cualesquiera.

34.23. Verifique que $r_n = \frac{19}{16} - \frac{3}{16}(5)^n - \frac{1}{4}n$ satisfaga $r_{n+2} = 6r_{n+1} - 5r_n + 1$, sujeta a $r_0 = 1$, $r_1 = 0$.

34.24. Encuentre la solución general para $k_{n+1} = -17k_n$.

34.25. Encuentre la solución general para $y_{n+2} = 11y_{n+1} + 12y_n$.

34.26. Encuentre la solución general para $x_{n+2} = 20x_{n+1} - 100x_n$.

34.27. Encuentre una solución particular para $w_{n+1} = 4w_n + 6^n$ conjeturando $w_n = A(6)^n$ y resolviendo A.

34.28. Encuentre la solución general para $y_{n+1} = 2v_n + n^2$.

34.29. Resuelva el problema previo con la condición inicial $v_0 = 7$.

34.30. Resuelva la ecuación de Fibonacci $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, sujeta a $f_0 = f_1 = 1$.

34.31. Suponga que invierte \$500 el último día del mes a una tasa anual del 12%, compuesta mensualmente. Si invierte un adicional de \$75 el último día de cada mes subsiguiente, ¿cuánto dinero habrá acumulado después de diez años?

TRANSFORMADAS DE LAPLACE

APÉNDICE A

	$f(x)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(x)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}\ (s>0)$
2.	x	$\frac{1}{s^2}\ (s>0)$
3.	$x^{n-1}\ (n=1, 2, ...)$	$\frac{(n-1)!}{s^n}\ (s>0)$
4.	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-3/2}\ (s>0)$
5.	$1/\sqrt{x}$	$\sqrt{\pi}s^{-1/2}\ (s>0)$
6.	$x^{n-1/2}\quad (n=1, 2, ...)$	$\frac{(1)(3)(5)\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n}s^{-n-1/2}\quad (s>0)$
7.	e^{ax}	$\frac{1}{s-a}\quad (s>a)$
8.	$\operatorname{sen} ax$	$\frac{a}{s^2+a^2}\quad (s>0)$
9.	$\cos ax$	$\frac{s}{s^2+a^2}\quad s>0$
10.	$\operatorname{senh} ax$	$\frac{a}{s^2-a^2}\quad (s>\lvert a\rvert)$
11.	$\cosh ax$	$\frac{s}{s^2-a^2}\quad (s>\lvert a\rvert)$
12.	$x \operatorname{sen} ax$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}\quad (s>0)$
13.	$x \cos ax$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\quad (s>0)$

	$f(x)$	$F(s)=\mathcal{L}\{f(x)\}$
14.	$x^{n-1}e^{ax}\ (n=1,2,\ldots)$	$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}\quad (s>a)$
15.	$e^{bx}\operatorname{sen} ax$	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}\quad (s>b)$
16.	$e^{bx}\cos ax$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}\quad (s>b)$
17.	$\operatorname{sen} ax - ax\cos ax$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}\quad (s>0)$
18.	$\frac{1}{a}e^{-x/a}$	$\frac{1}{1+as}$
19.	$\frac{1}{a}(e^{ax}-1)$	$\frac{1}{s(s-a)}$
20.	$1-e^{-x/a}$	$\frac{1}{s(1+as)}$
21.	$\frac{1}{a^2}xe^{-x/a}$	$\frac{1}{(1+as)^2}$
22.	$\frac{e^{ax}-e^{bx}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$
23.	$\frac{e^{-x/a}-e^{-x/b}}{a-b}$	$\frac{1}{(1+as)(1+bs)}$
24.	$(1+ax)e^{ax}$	$\frac{s}{(s-a)^2}$
25.	$\frac{1}{a^3}(a-x)e^{-x/a}$	$\frac{s}{(1+as)^2}$
26.	$\frac{ae^{ax}-be^{bx}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$
27.	$\frac{ae^{-x/b}-be^{-x/a}}{ab(a-b)}$	$\frac{s}{(1+as)(1+bs)}$
28.	$\frac{1}{a^2}(e^{ax}-1-ax)$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$
29.	$\operatorname{sen}^2 ax$	$\frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$
30.	$\operatorname{senh}^2 ax$	$\frac{2a^2}{s(s^2-4a^2)}$

	$f(x)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(x)\}$
31.	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cosh\frac{ax}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\frac{ax}{\sqrt{2}} - \operatorname{senh}\frac{ax}{\sqrt{2}}\cos\frac{ax}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{a^3}{s^4+a^4}$
32.	$\operatorname{sen}\frac{ax}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\frac{ax}{\sqrt{2}}$	$\frac{a^2 s}{s^4+a^4}$
33.	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{ax}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\frac{ax}{\sqrt{2}} + \operatorname{sen}\frac{ax}{\sqrt{2}}\cos\frac{ax}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{as^2}{s^4+a^4}$
34.	$\cos\frac{ax}{\sqrt{2}}\cosh\frac{ax}{\sqrt{2}}$	$\frac{s^3}{s^4+a^4}$
35.	$\frac{1}{2}(\operatorname{senh} ax - \operatorname{sen} ax)$	$\frac{a^3}{s^4-a^4}$
36.	$\frac{1}{2}(\cosh ax - \cos ax)$	$\frac{a^2 s}{s^4-a^4}$
37.	$\frac{1}{2}(\operatorname{senh} ax + \operatorname{sen} ax)$	$\frac{as^2}{s^4-a^4}$
38.	$\frac{1}{2}(\cosh ax + \cos ax)$	$\frac{s^3}{s^4-a^4}$
39.	$\operatorname{sen} ax \operatorname{senh} ax$	$\frac{2a^2 s}{s^4+4a^4}$
40.	$\cos ax \operatorname{senh} ax$	$\frac{a(s^2-2a^2)}{s^4+4a^4}$
41.	$\operatorname{sen} ax \cosh ax$	$\frac{a(s^2+2a^2)}{s^4+4a^4}$
42.	$\cos ax \cosh ax$	$\frac{s^3}{s^4+4a^4}$
43.	$\frac{1}{2}(\operatorname{sen} ax + ax\cos ax)$	$\frac{as^2}{(s^2+a^2)^2}$
44.	$\cos ax - \frac{ax}{2}\operatorname{sen} ax$	$\frac{s^3}{(s^2+a^2)^2}$
45.	$\frac{1}{2}(ax\cosh ax - \operatorname{senh} ax)$	$\frac{a^3}{(s^2-a^2)^2}$
46.	$\frac{x}{2}\operatorname{senh} ax$	$\frac{as}{(s^2-a^2)^2}$
47.	$\frac{1}{2}(\operatorname{senh} ax + ax\cosh ax)$	$\frac{as^2}{(s^2-a^2)^2}$

	$f(x)$	$F(s)=\mathcal{L}\{f(x)\}$
48.	$\cosh ax+\dfrac{ax}{2}\operatorname{senh} ax$	$\dfrac{s^3}{(s^2-a^2)^2}$
49.	$\dfrac{a\operatorname{sen} bx-b\operatorname{sen} ax}{a^2-b^2}$	$\dfrac{ab}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
50.	$\dfrac{\cos bx-\cos ax}{a^2-b^2}$	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
51.	$\dfrac{a\operatorname{sen} ax-b\operatorname{sen} bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
52.	$\dfrac{a^2\cos ax-b^2\cos bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{s^3}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
53.	$\dfrac{b\operatorname{senh} ax-a\operatorname{senh} bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{ab}{(s^2-a^2)(s^2-b^2)}$
54.	$\dfrac{\cos ax-\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)(s^2-b^2)}$
55.	$\dfrac{a\operatorname{senh} ax-b\operatorname{sen} bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)(s^2-b^2)}$
56.	$\dfrac{a^2\cosh ax-b^2\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{s^3}{(s^2-a^2)(s^2-b^2)}$
57.	$x-\dfrac{1}{a}\operatorname{sen} ax$	$\dfrac{a^2}{s^2(s^2+a^2)}$
58.	$\dfrac{1}{a}\operatorname{senh} ax-x$	$\dfrac{a^2}{s^2(s^2-a^2)}$
59.	$1-\cos ax-\dfrac{ax}{2}\operatorname{sen} ax$	$\dfrac{a^4}{s(s^2+a^2)^2}$
60.	$1-\cosh ax+\dfrac{ax}{2}\operatorname{senh} ax$	$\dfrac{a^4}{s(s^2-a^2)^2}$
61.	$1+\dfrac{b^2\cos ax-a^2\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{a^2b^2}{s(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
62.	$1+\dfrac{b^2\cos ax-a^2\cosh bx}{a^2-b^2}$	$\dfrac{a^2b^2}{s(s^2-a^2)(s^2-b^2)}$
63.	$\dfrac{1}{8}[(3-a^2x^2)\operatorname{sen} ax-3ax\cos ax]$	$\dfrac{a^5}{(s^2+a^2)^3}$
64.	$\dfrac{x}{8}[\operatorname{sen} ax-ax\cos ax]$	$\dfrac{a^3s}{(s^2+a^2)^3}$

	$f(x)$	$F(s)=\mathscr{L}\{f(x)\}$
65.	$\frac{1}{8}[(1+a^2x^2)\operatorname{sen} ax - ax\cos ax]$	$\frac{a^3s^2}{(s^2+a^2)^3}$
66.	$\frac{1}{8}[(3+a^2x^2)\operatorname{senh} ax - 3ax\cosh ax]$	$\frac{a^5}{(s^2-a^2)^3}$
67.	$\frac{x}{8}(ax\cosh ax - \operatorname{senh} ax)$	$\frac{a^3s}{(s^2-a^2)^3}$
68.	$\frac{1}{8}[ax\cosh ax - (1-a^2x^2)\operatorname{senh} ax]$	$\frac{a^3s^2}{(s^2-a^2)^3}$
69.	$\frac{1}{n!}(1-e^{-x/a})^n$	$\frac{1}{s(as+1)(as+2)\cdots(as+n)}$
70.	$\operatorname{sen}(ax+b)$	$\frac{s\operatorname{sen} b + a\cos b}{s^2+a^2}$
71.	$\cos(ax+b)$	$\frac{s\cos b - a\operatorname{sen} b}{s^2+a^2}$
72.	$e^{-ax} - e^{ax/2}\left(\cos\frac{ax\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{ax\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{3a^2}{s^3+a^3}$
73.	$\frac{1+2ax}{\sqrt{\pi x}}$	$\frac{s+a}{s\sqrt{s}}$
74.	$e^{-ax}/\sqrt{\pi x}$	$\frac{1}{\sqrt{s+a}}$
75.	$\frac{1}{2x\sqrt{\pi x}}(e^{bx}-e^{ax})$	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$
76.	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\cos 2\sqrt{ax}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-a/s}$
77.	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\cosh 2\sqrt{ax}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{a/s}$
78.	$\frac{1}{\sqrt{a\pi}}\operatorname{sen} 2\sqrt{ax}$	$s^{-3/2}e^{-a/s}$
79.	$\frac{1}{\sqrt{a\pi}}\operatorname{senh} 2\sqrt{ax}$	$s^{-3/2}e^{a/s}$
80.	$J_0(2\sqrt{ax})$	$\frac{1}{s}e^{-a/s}$
81.	$\sqrt{x/a}\,J_1(2\sqrt{ax})$	$\frac{1}{s^2}e^{-a/s}$

	$f(x)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$
82.	$(x/a)^{(p-1)/2} J_{p-1}(2\sqrt{ax}) \quad (p>0)$	$s^{-p}e^{-a/s}$
83.	$J_0(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}$
84.	$J_1(x)$	$\dfrac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}}$
85.	$J_p(x) \quad (p>-1)$	$\dfrac{(\sqrt{s^2+1}-s)^p}{\sqrt{s^2+1}}$
86.	$x^p J_p(ax) \quad \left(p>-\dfrac{1}{2}\right)$	$\dfrac{(2a)^p\,\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}(s^2+a^2)^{p+(1/2)}}$
87.	$\dfrac{x^{p-1}}{\Gamma(p)} \quad (p>0)$	$\dfrac{1}{s^p}$
88.	$\dfrac{4^n n!}{(2n)!\sqrt{\pi}} x^{n-(1/2)}$	$\dfrac{1}{s^n\sqrt{s}}$
89.	$\dfrac{x^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{-ax} \quad (p>0)$	$\dfrac{1}{(s+a)^p}$
90.	$\dfrac{1-e^{ax}}{x}$	$\ln\dfrac{s-a}{s}$
91.	$\dfrac{e^{bx}-e^{ax}}{x}$	$\ln\dfrac{s-a}{s-b}$
92.	$\dfrac{2}{x}\operatorname{senh} ax$	$\ln\dfrac{s+a}{s-a}$
93.	$\dfrac{2}{x}(1-\cos ax)$	$\ln\dfrac{s^2+a^2}{s^2}$
94.	$\dfrac{2}{x}(\cos bx-\cos ax)$	$\ln\dfrac{s^2+a^2}{s^2+b^2}$
95.	$\dfrac{\operatorname{sen} ax}{x}$	$\arctan\dfrac{a}{s}$
96.	$\dfrac{2}{x}\operatorname{sen} ax\cos bx$	$\arctan\dfrac{2as}{s^2-a^2+b^2}$
97.	$\operatorname{sen}\lvert ax\rvert$	$\left(\dfrac{a}{s^2+a^2}\right)\left(\dfrac{1+e^{-(\pi/a)s}}{1-e^{-(\pi/a)s}}\right)$

ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE TECNOLOGÍA

APÉNDICE B

COMENTARIOS INTRODUCTORIOS

En este libro hemos presentado muchos métodos clásicos y tradicionales para resolver ecuaciones diferenciales. Virtualmente, todas estas técnicas producían soluciones analíticas de forma cerrada. Estas soluciones eran de naturaleza exacta.

Sin embargo, hemos discutido otros enfoques para las ecuaciones diferenciales; ecuaciones que no se prestaban fácilmente a soluciones exactas. En el capítulo 2 hablamos de la idea de enfoques cualitativos; en el capítulo 18 tocamos los aspectos de los métodos gráficos; en tanto que en los capítulos 19 y 20 investigamos las técnicas numéricas.

En el capítulo 2, también tratamos la cuestión de la construcción de modelos. En la figura B-1, vemos el esquema del "ciclo de modelado" que presentamos en ese capítulo. La ayuda de la "tecnología" lleva *del* modelo (por ejemplo, una ecuación diferencial) *a* una solución. Éste es (con esperanza) el caso, especialmente cuando la ecuación diferencial es demasiado difícil para ser resuelta "a mano". La solución puede ser de naturaleza exacta o se puede dar de forma gráfica, numérica o alguna otra.

En esta última generación, las calculadoras y los paquetes de software de las computadoras han tenido un gran impacto en el campo de las ecuaciones diferenciales, especialmente en las áreas computacionales.

Lo que sigue son descripciones condensadas de dos herramientas tecnológicas: la calculadora **TI-89** y el sistema computarizado de álgebra llamado ***MATHEMATICA***.

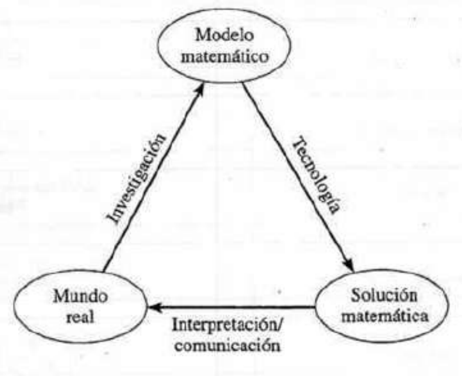


Figura B-1.

TI-89

La *TI-89 Symbolic Manipulation* es fabricada por *Texas Instruments Incorporated* (http://www.ti.com/calc). Es un instrumento portátil, de aproximadamente 7 por 3.5 pulgadas, con una profundidad de casi una pulgada. El visor de la pantalla mide aproximadamente 2.5 por 1.5 pulgadas. La **TI-89** trabaja con cuatro pilas AAA.

Con respecto a las ecuaciones diferenciales, la **TI-89** puede hacer lo siguiente:

- Graficar campos de pendientes para ecuaciones de primer orden.
- Transformar ecuaciones de mayor orden en un sistema de ecuaciones de primer orden.
- Utilizar los métodos de Runge-Kutta y de Euler.
- Resolver simbólicamente muchos tipos de ecuaciones de primer orden.
- Resolver simbólicamente varios tipos de ecuaciones de segundo orden.

MATHEMATICA

Hay muchas versiones de ***MATHEMATICA***, tales como la 5.0, 5.1, etc. ***MATHEMATICA*** es fabricada por *Wolfram Research, Inc.* (http://www.wolfram.com/). Con este paquete, los usuarios "interactúan" con el sistema computarizado de álgebra.

MATHEMATICA es extremadamente robusta. Tiene la habilidad de hacer todo lo que la **TI-89** puede hacer. Entre sus muchas otras capacidades, cuenta con una biblioteca de funciones clásicas (por ejemplo, los polinomios de Hermite, los polinomios de Laguerre, etc.), resuelve ecuaciones en diferencias lineales y sus gráficas ilustran poderosamente tanto curvas como superficies.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS ADICIONALES

CAPÍTULO 1

1.14. *a*) 2; *b*) y; *c*) x

1.15. *a*) 4; *b*) y; *c*) x

1.16. *a*) 2; *b*) s; *c*) t

1.17. *a*) 4; *b*) y; *c*) x

1.18. *a*) n; *b*) x; *c*) y

1.19. *a*) 2; *b*) r; *c*) y

1.20. *a*) 2; *b*) y; *c*) x

1.21. *a*) 7; *b*) b; *c*) p

1.22. *a*) 1; *b*) b; *c*) p

1.23. *a*) 6; *b*) y; *c*) x

1.24. *d*) y *e*)

1.25. *a*), *c*) y *e*)

1.26. *b*), *d*) y *e*)

1.27. *a*), *c*) y *d*)

1.28. *d*)

1.29. *a*), *c*) y *d*)

1.30. *b*) y *e*)

1.31. *a*), *c*) y *d*)

1.32. $c = 0$

1.33. $c = 1$

1.34. $c = e^{-2}$

1.35. $c = -3e^{-4}$

1.36. $c = 1$

1.37. c puede ser cualquier número real.

1.38. $c = -1/3$

1.39. No tiene solución.

1.40. $c_1 = 2$, $c_2 = 1$; condiciones iniciales.

1.41. $c_1 = 1$, $c_2 = 2$; condiciones iniciales.

1.42. $c_1 = 1$, $c_2 = -2$; condiciones iniciales.

1.43. $c_1 = c_2 = 1$; condiciones en la frontera.

1.44. $c_1 = 1$, $c_2 = -1$; condiciones en la frontera.

1.45. $c_1 = -1$, $c_2 = 1$; condiciones en la frontera.

1.46. Ningún valor; condiciones en la frontera.

1.47. $c_1 = c_2 = 0$; condiciones iniciales.

1.48. $c_1 = \dfrac{-2}{\sqrt{3}-1}$, $c_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$; condiciones en la frontera.

1.49. Ningún valor; condiciones en la frontera.

1.50. $c_1 = -2, c_2 = 3$

1.51. $c_1 = 0, c_2 = 1$

1.52. $c_1 = 3, c_2 = -6$

1.53. $c_1 = 0, c_2 = 1$

1.54. $c_1 = 1 + \frac{3}{e}, c_2 = -2 - \frac{2}{e}$

CAPÍTULO 2

2.12. $T_c = \frac{5}{9}(T_F - 32)$

2.13. El volumen y la temperatura están en proporción directa. En la medida que uno aumenta, también lo hará el otro; si uno disminuye, el otro también.

2.14. La fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es proporcional a la aceleración del mismo. Esto asume que la masa es constante.

2.15. Dado que t está aumentando, y $T(576) = 0$, este modelo es válido para 576 horas. Cualquier tiempo posterior nos da un radical negativo, y de aquí, una respuesta imaginaria, haciendo por lo tanto que el modelo sea inútil.

2.16. En $t = 10$, porque $T'(10) = 0$ y $T'(t) > 0$ para $t > 10$.

2.17. El movimiento debe ser periódico, porque sen $2t$ es una función periódica de periodo π.

2.18. *a*) $2\cos 2t$; *b*) $-4\,\text{sen}\,2t$

2.19. *a*) y es constante; *b*) y está aumentando; *c*) y está disminuyendo; *d*) y está aumentando.

2.20. $\frac{dX}{dt} = k(M - X)^3$, donde k es una constante negativa.

2.21. Las tasas o razones de cambio de los galones de azúcar líquida por hora.

2.22 Las tasas de cambio de los tanques (gal/hr) están afectadas por la cantidad de azúcar líquida presente en los tanques, tal como lo reflejan las ecuaciones. Los signos y magnitudes de las constantes (*a, b, c, d, e* y *f*) determinarán si hay un aumento o una disminución de azúcar, dependiendo del tiempo. La unidad para *a, b, d* y *e* es (1/hr); la unidad para *c* y *f* es (gal/hr).

CAPÍTULO 3

3.15. $y' = -y^2/x$

3.16. $y' = x/(e^x - 1)$

3.17. $y' = (\text{sen}\,x - y^2 - y)^{1/3}$

3.18. No se reduce a la forma estándar.

3.19. $y' = -y + \ln x$

3.20. $y' = 2$ y $y' = x + y + 3$

3.21. $y' = \frac{y - x}{y^2}$

3.22. $y' = \frac{x + y}{x - y}$

3.23. $y' = \frac{y - x}{x + y}$

3.24. $y' = ye^{-x} - e^x$

3.25. $y' = -1$

3.26. Lineal

3.27. Lineal, separable y exacta

3.28. Lineal

3.29. Homogénea, Bernoulli

3.30. Homogénea, Bernoulli, separable y exacta

3.31. Lineal, homogénea y exacta

3.32. Homogénea

3.33. Exacta

3.34. Bernoulli

3.35. Lineal y exacta

CAPÍTULO 4

4.23. $y = \pm\sqrt{k - x^2},\ k = 2c$

4.24. $y = \pm(k + 2x^2)^{1/4},\ k = -4c$

4.25. $y = (k + 3x)^{-1/3},\ k = -3c$

4.26. $y = -\left(\frac{1}{2}t^2 + t - c\right)^{-1}$

4.27. $y = kx,\ k = \pm e^{-c}$

4.28. $y = \ln\left|\frac{k}{x}\right|,\ c = \ln|k|$

4.29. $y = ke^{-x^2/2},\ k = \pm e^{c}$

4.30. $2t^3 + 6t + 2y^3 + 3y^2 = k,\ k = 6c$

4.31. $y^3t^4 = ke^{y},\ k = \pm e^{c}$

4.32. $y = \tan(x - c)$

4.33. $y = 3 + 2\tan(2x + k),\ k = -2c$

4.34. $\frac{1}{x^2}dx - \frac{1}{y}dy = 0;\ y = ke^{-1/x},\ k = \pm e^{-c}$

4.35. $xe^x dx - 2y\,dy = 0;\ y = \pm\sqrt{xe^x - e^x - c}$

4.36. $y = \pm\sqrt{x^2 + 2x + k},\ k = -2c$

4.37. $y = -1/(x - c)$

4.38. $x = -3/(t^3 + k),\ k = 3c$

4.39. $x = kt,\ k = \pm e^{c}$

4.40. $y = -\frac{3}{5} + ke^{5t},\ k = \pm\frac{1}{5}e^{5c}$

4.41. $y = -\sqrt{2 + 2\cos x}$

4.42. $y = e^{-1/3(x^3 + 3x + 4)}$

4.43. $\frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{6}y^6 - y = \frac{1}{2}$

4.44. $\frac{x^3}{3} - x - y = \ln|y| = 7$

4.45. $x = \frac{8}{3} + \frac{4}{3}e^{-3t}$

4.46. $y = x\ln|k/x|$

4.47. $y = kx^2 - x$

4.48. $y^2 = kx^4 - x^2$

4.49. No homogénea

4.50. $y^2 = x^2 - kx$

4.51. $3yx^2 - y^3 = k$

4.52. $-2\sqrt{x/y} + \ln|y| = c$

4.53. No homogénea

4.54. $y^2 = -x^2\left(1 + \frac{1}{\ln|kx^2|}\right)$

CAPÍTULO 5

5.24. $xy + x^2y^3 + y = c_2$

5.25. No exacta

5.26. $y = c_2e^{-x^3} + \frac{1}{3}$

5.27. $x^3y^2 + y^4 = c_2$

5.28. $xy = c_2$

5.29. No exacta

5.30. $xy\,\mathrm{sen}\,x + y = c_2$

5.31. $y^2 = c_2t$

5.32. $y = c_2t^2$

5.33. No exacta

5.34. $t^4y^3 - t^2y = c_2$

5.35. $y = \frac{-1}{t\ln|kt|}$

5.36. $x = \frac{1}{3}t^2 - \frac{c_2}{t}$

5.37. $2t^3 + 6tx^2 - 3x^2 = c_2$ o bien $x = \pm\sqrt{\frac{c_2 - 2t^3}{6t - 3}}$

5.38. $x = \frac{k}{1 + e^{2t}}$

5.39. No exacta

5.40. $t\cos x + x\,\mathrm{sen}\,t = c_2$

5.41. $I(x, y) = \frac{-1}{x^2}; y = cx - 1$

5.42. $I(x, y) = \frac{1}{y^2}; cy = x - 1$

5.43. $I(x, y) = -\frac{1}{x^2 + y^2}; y = x\tan(x + c)$

5.44. $I(x, y) = \frac{1}{(xy)^3}; \frac{1}{y^2} = 2x^2(x - c)$

5.45. $I(x, y) = \frac{1}{(xy)^2}; \frac{1}{y} = \frac{1}{3}x^4 - cx$

5.46. $I(x, y) = e^{x^3}; y = ce^{-x^3} + \frac{1}{3}$

5.47. $I(x, y) = e^{-y^2}; y^2 = \ln|kx|$

5.48. $I(x, y) = \frac{1}{y}; y^2 = 2(c - x^2)$

5.49. $I(x, y) = y^2; y^3 = \frac{c}{x}$

5.50. $I(x, y) = y^2; x^2y^4 + \frac{x^2}{2} = c$

5.51. $I(x, y) = \frac{1}{(xy)^2}; \ln|xy| = c - y$

5.52. $I(x, y) = 1$ (la ecuación es exacta); $\frac{1}{2}x^2y^2 = c$

5.53. $I(x, y) = -\frac{1}{x^2 + y^2}; y = x\tan\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right)$

5.54. $I(x, y) = \frac{1}{(xy)^2}; 3x^3y + 2xy^4 + kxy = -6$

5.55. $I(x, y) = e^{y^3/3}; x^3y^2e^{y^3/3} = c$

5.56. $x(t) = \frac{t + \sqrt{t^2 + 16}}{2}$

5.57. $x(t) \equiv 0$

5.58. $x(t) = \frac{t - \sqrt{t^2 + 120}}{2}$

5.59. $xy + x^2y^3 + y = -135$

5.60. $y(x) = -\frac{4}{3}e^{-x^3} + \frac{1}{3}$

5.61. No tiene solución

5.62. $y(t) = -\sqrt{2t}$

5.63. $y(t) = -\frac{1}{2}t^2$

5.64. $x(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{14}{3}\left(\frac{1}{t}\right)$

5.65. $x(t) = \frac{-2(1 + e^2)}{1 + e^{2t}}$

CAPÍTULO 6

6.20. $y = ce^{-5x}$

6.21. $y = ce^{5x}$

6.22. $y = ce^{0.01x}$

6.23. $y = ce^{-x^2}$

6.24. $y = ce^{-x^3}$

6.25. $y = ce^{x^3/3}$

6.26. $y = ce^{3x^3/5}$

6.27. $y = c/x$

6.28. $y = c/x^2$

6.29. $y = cx^2$

6.30. $y = ce^{-2/x}$

6.31. $y = ce^{7x} - \frac{1}{6}e^x$

6.32. $y = ce^{7x} - 2x - \frac{2}{7}$

6.33. $y = ce^{7x} - \frac{2}{53}\cos 2x - \frac{7}{53}\operatorname{sen} 2x$

6.34. $y = ce^{-x^3/3} + 1$

6.35. $y = ce^{-3/x} - \frac{1}{3}$

6.36. $y = c + \operatorname{sen} x$

6.37. $\frac{1}{y} = ce^x + 1$

6.38. $y^2 = 1/(2x + cx^2)$

6.39. $y = (6 + ce^{-x^3/4})^2$

6.40. $y = 1/(1 + ce^x)$

6.41. $y = (1 + ce^{-3x})^{1/3}$

6.42. $y = e^{-x}/(c - x)$

6.43. $y = ce^{-50t}$

6.44. $z = c\sqrt{t}$

6.45. $N = ce^{kt}$

6.46. $\rho = \frac{1}{2}t^3 + 3t^2 - 2t\ln|t| + ct$

6.47. $Q = 4(20 - t) + c(20 - t)^2$

6.48. $T = (3.2t + c)e^{-0.04t}$

6.49. $p = \frac{4}{3}z + cz^{-2}$

6.50. $y = \frac{1}{4}(-x^{-2} + x^2)$

6.51. $y = 5e^{-3(x^2 - \pi^2)}$

6.52. $y = 2e^{-x^2} + x^2 - 1$

6.53. $\frac{1}{y^4} = -\frac{31}{16}x^8 + 2x^{10}$

6.54. $v = -16e^{-2t} + 16$

6.55. $q = \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{8}{5}\operatorname{sen} 2t + \frac{4}{5}\cos 2t$

6.56. $N = \frac{1}{3}\left(t^2 + \frac{40}{t}\right)$

6.57. $T = -60e^{-0.069t} + 30$

CAPÍTULO 7

7.26. *a*) $N = 250e^{0.166t}$; *b*) 11.2 hr

7.27. *a*) $N = 300e^{0.0912t}$; *b*) 7.6 hr

7.28. *a*) 2.45 oz; *b*) 15.19 oz

7.29. Se multiplica 32 veces

7.30. 3.17 hr

7.31. *a*) $N = 80e^{0.0134t}$ (en millones); *b*) 91.5 millones

7.32. $N = 16\,620e^{0.11t}$; $N_0 = 16\,620$

7.33. *a*) $N = 100e^{-0.026t}$; *b*) 4.05 años

7.34. $N = N_0e^{-0.105t}$; $t_{1/2} = 6.6$ hr

7.35. $N = \dfrac{500}{1+99e^{-500kt}}$

7.36. \$15 219.62

7.37. \$16 904.59

7.38. \$14 288.26

7.39. 8.66 por ciento

7.40. 10.99 por ciento

7.41. 20.93 años

7.42. 7.93 años

7.43. 12.78 por ciento

7.44. 8.38 años

7.45. $T = -100e^{-0.029t} + 100$;
a) 23.9 min; *b*) 44° F

7.46. $T = 80e^{-0.035t}$; $T_0 = 80°$ F

7.47. $T = -100e^{-0.029t} + 150$; $t_{100} = 23.9$ min

7.48. *a*) 138.6°F; *b*) 3.12 min

7.49. *a*) 113.9°F; *b*) 6.95 min

7.50. Un adicional de 1.24 min

7.51. *a*) $v = 32t$; *b*) $16t^2$

7.52. *a*) 5.59 seg; *b*) 5.59 seg

7.53. *a*) $32t + 30$; *b*) 3.49 seg

7.54. *a*) $32t + 10$; *b*) 5 seg

7.55. 31.25 seg

7.56. 976.6 pies

7.57. *a*) $\dfrac{dv}{dt} = -g$; *b*) $v = -gt + v_0$;
c) $t_m = \dfrac{v_0}{g}$; *d*) $x = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0t$;
e) $x_m = \dfrac{v_0^2}{2g}$

7.58. *a*) $v = 48 - 48e^{-2t/3}$;
b) $x = 72e^{-2t/3} + 48t - 72$

7.59. *a*) $v = 128 - 118e^{-t/4}$;
b) 6.472 seg

7.60. 320 pies/seg

7.61. 0.392 m/seg con $g = 9.8\,\text{m/seg}^2$

7.62. *a*) $v = -320e^{-0.1t} + 320$;
b) $x = 3\,200e^{-0.1t} + 320t - 3\,200$;
c) 6.9 seg

7.63. *a*) $v = 4 - 4e^{-8t}$;
b) $x = \dfrac{1}{2}e^{-8t} + 4t - \dfrac{1}{2}$

7.64. *a*) $v = 320 - 320e^{-t/10}$;
b) $x = 3\,200e^{-t/10} + 320t - 3\,200$

7.65. *a*) $Q = -5e^{-0.2t} + 5$;
b) $\dfrac{Q}{V} = \dfrac{1}{2}(-e^{-0.2t} + 1)$

7.66. $Q = -\dfrac{7}{40}(20-t)^2 + 4(20-t)$;
en $t = 10$, $Q = 22.5$ lb
(Nótese que $a = 80(1/8) = 10$ lb)

7.67. *a*) $Q = 80e^{-0.04t}$;
b) 17.3 min

7.68. 56.3 lb

7.69. 111.1 g

7.70. 80 g

7.71. *a*) $-\dfrac{99}{2}e^{-10t}$; *b*) 0 amp

7.72. a) $q = 2 + 3e^{-10t}$; b) $I = -30e^{-10t}$

7.73. a) $q = 10e^{-2.5t}$; b) $I = -25e^{-25t}$

7.74. a) $q = \frac{1}{50}(2\,\text{sen}\,t - \cos t + e^{-2t})$;
b) $I_s = \frac{1}{50}(2\cos t + \text{sen}\,t)$

7.75. a) $q = \frac{1}{5}(\text{sen}\,2t + 2\cos 2t + 23e^{-4t})$;
b) $I_s = \frac{1}{5}(2\cos 2t - 4\,\text{sen}\,2t)$

7.76. a) $I = \frac{1}{10}(1 - e^{-50t})$; b) $I_s = \frac{1}{10}$

7.77. a) $I = 10e^{-25t}$; b) $I_t = 10e^{-25t}$

7.78. a) $I = \frac{1}{10}(9 + 51e^{-20t/3})$;
b) $I_t = \frac{51}{10}e^{-20t/3}$

7.79. $I = \frac{1}{626}(e^{-25t} + 25\,\text{sen}\,t - \cos t)$

7.80. $A = \frac{2}{\sqrt{34}}$ $\phi = \arctan\frac{3}{5}$

7.81. $A = -\frac{3}{\sqrt{101}}$ $\phi = \arctan 10$

7.82. $xy = k$

7.83. $y^2 = -2x + k$

7.84. $x^2y + \frac{1}{3}y^3 = k$

7.85. $x^2 + y^2 = kx$

7.86. $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = k\,(k > 0)$

7.87. $N = \frac{1\,000}{1 + 9e^{-0.1158t}}$

7.88. $N = \frac{1\,000\,000}{1 + 999e^{-0.275t}}$

7.89. $\frac{2+v}{2-v} = 3e^{32t}$ o bien $v = 2(3e^{32t} - 1)/(3e^{32t} + 1)$

CAPÍTULO 8

8.33. *e*), *g*), *j*) y *k*) son no lineales; todo el resto es lineal. Obsérvese que (*f*) tiene la forma $y' - (2 + x)y = 0$.

8.34. *a*), *c*) y *f*) son homogéneas. Obsérvese que (*l*) tiene la forma $y'' = -e^x$.

8.35. *b*), *c*) y *l*) tienen coeficientes constantes.

8.36. $W = 0$

8.37. $W = -x^2$; el conjunto es linealmente independiente.

8.38. $W = -x^4$; el conjunto es linealmente independiente.

8.39. $W = -2x^3$; el conjunto es linealmente independiente.

8.40. $W = -10x$; el conjunto es linealmente independiente.

8.41. $W = 0$

8.42. $W = -4$; el conjunto es linealmente independiente.

8.43. $W = e^{5x}$; el conjunto es linealmente independiente.

8.44. $W = 0$

8.45. $W = 0$

8.46. $W = 0$

8.47. $W = 2x^6$; el conjunto es linealmente independiente.

8.48. $W = 6e^{2x}$; el conjunto es linealmente independiente.

8.49. $W = 0$

8.50. $[4]3x + [-3]4x \equiv 0$

8.51. $[1]x^2 + [1](-x^2) \equiv 0$

8.52. $[5](3e^{2x}) + [-3](5e^{2x}) \equiv 0$

8.53. $[-2]x + [7](1) + [1](2x - 7) \equiv 0$

8.54. $[3](x+1) + [-2](x^2 + x)$
$+ [1](2x^2 - x - 3) \equiv 0$

8.55. $[-6]\operatorname{sen} x + [-1](2\cos x) + [2](3\operatorname{sen} x + \cos x) \equiv 0$

8.56. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

8.57. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

8.58. $y = c_1 \operatorname{sen} 4x + c_2 \cos 4x$

8.59. $y = c_1 e^{8x} + c_2$

8.60. Dado que y_1 y y_2 son linealmente dependientes, no hay bastante información proporcionada como para exhibir la solución general.

8.61. $y = c_1 x + c_2 e^x + c_3 y_3$ donde y_3 es una tercera solución particular, linealmente independiente de las otras dos.

8.62. Puesto que el conjunto dado es linealmente dependiente, no hay suficiente información para exhibir la solución general.

8.63. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$

8.64. $y = c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4 + c_4 y_4 + c_5 y_5$, donde y_4 y y_5 son otras dos soluciones que tienen la propiedad de que el conjunto $\{x^2, x^3, x^4, y_4, y_5\}$ sea linealmente independiente.

8.65. $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + x^2 - 2$

8.66. Dado que e^x y $3e^x$ son linealmente dependientes, no hay suficiente información como para encontrar la solución general.

8.67. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^x + 5$

8.68. El teorema 8.1 no aplica, dado que $a_0(x) = -(2/x)$ no es continua alrededor de $x_0 = 0$.

8.69. Sí; $a_0(x)$ es continua alrededor de $x_0 = 1$.

8.70. El teorema 8.1 no aplica, puesto que $b_1(x)$ es cero en el origen.

CAPÍTULO 9

9.17. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

9.18. $y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{6x}$

9.19. $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$

9.20. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$

9.21. $y = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \operatorname{sen} x$

9.22. $y = c_1 e^{\sqrt{7}x} + c_2 e^{-\sqrt{7}x}$

9.23. $y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$

9.24. $y = c_1 e^{-x} \cos \sqrt{2}x + c_2 e^{-x} \operatorname{sen} \sqrt{2}x$

9.25. $y = c_1 e^{[(3+\sqrt{29})/2]x} + c_2 e^{[(3-\sqrt{29})/2]x} = e^{(3/2)x}\left(k_1 \cosh \frac{\sqrt{29}}{2}x + k_2 \operatorname{senh} \frac{\sqrt{29}}{2}x\right)$

9.26. $y = c_1 e^{-(1/2)x} + c_2 x e^{-(1/2)x}$

9.27. $x = c_1 e^{4t} + c_2 e^{16t}$

9.28. $x = c_1 e^{-50t} + c_2 e^{-10t}$

9.29. $x = c_1 e^{(3+\sqrt{5})t/2} + c_2 e^{(3-\sqrt{5})t/2}$

9.30. $x = c_1 e^{5t} + c_2 t e^{5t}$

9.31. $x = c_1 \cos 5t + c_2 \operatorname{sen} 5t$

9.32. $x = c_1 + c_2 e^{-25t}$

9.33. $x = c_1e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t + c_2e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{7}}{2}t$

9.34. $u = c_1e^t\cos\sqrt{3}t + c_2e^t\operatorname{sen}\sqrt{3}t$

9.35. $u = c_1e^{(2+\sqrt{2})t} + c_2e^{(2-\sqrt{2})t}$

9.36. $u = c_1 + c_2e^{36t}$

9.37. $u = c_1e^{6t} + c_2e^{-6t} = k_1c\cosh 6t + k_2\operatorname{sen} 6t$

9.38. $Q = c_1e^{5t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2e^{5t/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}t$

9.39. $Q = c_1e^{(7+\sqrt{29})/2} + c_2e^{(7-\sqrt{29})t/2}$

9.40. $P = c_1e^{9t} + c_2te^{9t}$

9.41. $P = c_1e^{-x}\cos 2\sqrt{2}x + c_2e^{-x}\operatorname{sen} 2\sqrt{2}x$

9.42. $N = c_1e^{3x} + c_2e^{-8x}$

9.43. $N = c_1e^{-5x/2}\cos\frac{\sqrt{71}}{2}x + c_2e^{-5x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{71}}{2}x$

9.44. $T = c_1e^{-15\theta} + c_2\theta e^{-15\theta}$

9.45. $R = c_1 + c_2e^{-5\theta}$

CAPÍTULO 10

10.16. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{x} + c_3e^{2x}$

10.17. $y = c_1e^{x} + c_2xe^{x} + c_3e^{-x}$

10.18. $y = c_1e^{x} + c_2xe^{x} + c_3x^2e^{x}$

10.19. $y = c_1e^{x} + c_2\cos x + c_3\operatorname{sen} x$

10.20. $y = (c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\operatorname{sen} x$

10.21. $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\operatorname{sen} x$

10.22. $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3xe^{-x} + c_4x^2e^{-x}$

10.23. $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + c_3e^{2x}\cos 2x + c_4e^{2x}\operatorname{sen} 2x$

10.24. $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-5x}$

10.25. $y = (c_1 + c_3x)e^{-(1/2)x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$
$+ (c_2 + c_4x)e^{-(1/2)x}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$

10.26. $y = c_1e^{2x}\cos 2x + c_2e^{2x}\operatorname{sen} 2x + c_3e^{-2x}$
$+ c_4xe^{-2x} + c_5e^{x} + c_6e^{-x}$

10.27. $x = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + c_3t^2e^{-t} + c_4t^3e^{-t}$

10.28. $x = c_1 + c_2t + c_3t^2$

10.29. $x = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t + c_3\cos 3t + c_4\operatorname{sen} 3t$

10.30. $x = c_1e^{5t} + c_2\cos 5t + c_3\operatorname{sen} 5t$

10.31. $q = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3\cos\sqrt{2}x + c_4\operatorname{sen}\sqrt{2}x$

10.32. $q = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3e^{\sqrt{2}x} + c_4e^{-\sqrt{2}x}$

10.33. $N = c_1e^{-6x} + c_2e^{8x} + c_3e^{10x}$

10.34. $r = c_1e^{-\theta} + c_2\theta e^{-\theta} + c_3\theta^2e^{-\theta} + c_4\theta^3e^{-\theta} + c_5\theta^4e^{-\theta}$

10.35. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{8x} + c_3e^{-14x}$

10.36. $y = c_1 + c_2\cos 19x + c_3\operatorname{sen} 19x$

10.37. $y = c_1 + c_2x + c_3e^{2x}\cos 9x + c_4e^{2x}\operatorname{sen} 9x$

10.38. $y = c_1e^{2x}\cos 9x + c_2e^{2x}\operatorname{sen} 9x$
$+ c_3xe^{2x}\cos 9x + c_4xe^{2x}\operatorname{sen} 9x$

10.39. $y = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x} + c_3x^2e^{5x} + c_4e^{-5x}$
$+ c_5xe^{-5x}$

10.40. $y = c_1\cos 6x + c_2\operatorname{sen} 6x + c_3x\cos 6x$
$+ c_4x\operatorname{sen} 6x + c_5x^2\cos 6x + c_6x^2\operatorname{sen} 6x$

10.41. $y = e^{-3x}(c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + c_3x\cos x$
$+ c_4x\operatorname{sen} x) + e^{3x}(c_5\cos x + c_6\operatorname{sen} x$
$+ c_7x\cos x + c_8x\operatorname{sen} x)$

10.42. $y''' + 4y'' - 124y' + 224y = 0$

10.43. $y''' + 361y' = 0$

10.44. $y^{(4)} - 4y''' + 85y'' = 0$

10.45. $y^{(4)} - 8y''' + 186y'' - 680y' + 7\,225y = 0$

10.46. $y^{(5)} - 5y^{(4)} - 50y^{(3)} + 250y'' + 625y' - 3125y = 0$

10.47. $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x} + c_4x^3e^{-x}$

10.48. $y = c_1\cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x + c_3\cos 3x + c_4 \operatorname{sen} 3x$

10.49. $y = c_1\cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x + c_3x\cos 4x + c_4x \operatorname{sen} 4x$

10.50. $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{5x} + c_4xe^{5x}$

CAPÍTULO 11

11.15. $y_p = A_1x + A_0$

11.16. $y_p = A_2x^2 + A_1x + A_0$

11.17. $y_p = A_2x^2 + A_1x + A_0$

11.18. $y_p = Ae^{-2x}$

11.19. $y_p = Ae^{5x}$

11.20. $y_p = Axe^{2x}$

11.21. $y_p = A\operatorname{sen} 3x + B\cos 3x$

11.22. $y_p = A\operatorname{sen} 3x + B\cos 3x$

11.23. $y_p = (A_1x + A_0)\operatorname{sen} 3x + (B_1x + B_0)\cos 3x$

11.24. $y_p = A_1x + A_0 + Be^{8x}$

11.25. $y_p = (A_1x + A_0)e^{5x}$

11.26. $y_p = x(A_1x + A_0)e^{3x}$

11.27. $y_p = Ae^{3x}$

11.28. $y_p = x(A_1x + A_0)e^{3x}$

11.29. $y_p = Ae^{5x}$

11.30. $y_p = (A_2x^2 + A_1x + A_0)e^{5x}$

11.31. $y_p = A\operatorname{sen}\sqrt{2}x + B\cos\sqrt{2}x$

11.32. $y_p = (A_2x^2 + A_1x + A_0)\operatorname{sen}\sqrt{2}x + (B_2x^2 + B_1x + B_0)\cos\sqrt{2}$

11.33. $y_p = A\operatorname{sen} 3x + B\cos 3x$

11.34. $y_p = A\operatorname{sen} 4x + B\cos 4x + C\operatorname{sen} 7x + D\cos 7x$

11.35. $y_p = Ae^{-x}\operatorname{sen} 3x + Be^{-x}\cos 3x$

11.36. $y_p = x(Ae^{5x}\operatorname{sen} 3x + Be^{5x}\cos 3x)$

11.37. $x_p = t(A_1t + A_0)$

11.38. $x_p = t(A_2t^2 + A_1t + A_0)$

11.39. $x_p = (A_1t + A_0)e^{-2t} + Bt$

11.40. $x_p = t^2(Ae^t)$

11.41. $x_p = t^2(A_1t + A_0)e^t$

11.42. $x_p = At + (B_1t + B_0)\operatorname{sen} t + (C_1t + C_0)\cos t$

11.43. $x_p = (A_1t + A_0)e^{2t}\operatorname{sen} 3t + (B_1t + B_0)e^{2t}\cos 3t$

11.44. $y = c_1e^x + c_2xe^x + x^2 + 4x + 5$

11.45. $y = c_1e^x + c_2xe^x + 3e^{2x}$

11.46. $y = c_1e^x + c_2xe^x - 2\operatorname{sen} x$

11.47. $y = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{3}{2}x^2e^x$

11.48. $y = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{6}x^3e^x$

11.49. $y = c_1e^x + xe^x$

11.50. $y = c_1e^x + xe^{2x} - e^{2x} - 1$

11.51. $y = c_1e^x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{2}{5}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{5}\cos 2x$

11.52. $y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x - 1$

CAPÍTULO 12

12.9. $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{12} x^{-3} e^x$

12.10. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + (\cos x) \ln|\cos x| + x \operatorname{sen} x$

12.11. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{4} e^{3x}$

12.12. $y = c_1 e^{30x} + c_2 x e^{30x} + \frac{1}{80} e^{10x}$

12.13. $y = c_3 + c_2 e^{7x} + \frac{3}{7} x$

$\left(\text{con } c_3 = c_1 + \frac{3}{49}\right)$

12.14. $y = c_1 x + \frac{c_2}{x} + \frac{x^2}{3} \ln|x| - \frac{4}{9} x^2$

12.15. $y = c_1 + c_2 x^2 + x e^x - e^x$

12.16. $y = c_1 x + \frac{1}{2} x^3$

12.17. $y = c_1 e^{-x^2} + \frac{1}{2}$

12.18. $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + 2x^3$

12.19. $y = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{e^t}{2t}$

12.20. $x = c_3 e^{3t} + c_2 t e^{3t} - e^{3t} \ln|t| \quad (\text{con } c_3 = c_1 - 1)$

12.21. $x = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t - 1$

$+ (\operatorname{sen} 2t) \ln|\sec 2t + \tan 2t|$

12.22. $x = c_3 e^t + c_4 e^{3t} + \frac{e^t}{2} \ln(1 + e^{-t})$

$- \frac{e^{3t}}{2} \ln(1 + e^{-t}) + \frac{e^{2t}}{2}$

$\left(\text{con } c_3 = c_1 - \frac{1}{4};\ c_4 = c_2 + \frac{3}{4}\right)$

12.23. $x = c_1 t + c_2(t^2 + 1) + \frac{t^4}{6} - \frac{t^2}{2}$

12.24. $x = c_1 e^t + \frac{c_2}{t} - \frac{t^2}{3} - t - 1$

12.25. $r = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t + \frac{t^2}{2} e^t \ln|t|$

12.26. $r = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + c_3 t^2 e^{-2t} + 2t^3 e^{-2t}$

12.27. $r = c_1 e^{5t} + c_2 \cos 5t + c_3 \operatorname{sen} 5t - 8$

12.28. $z = c_1 + c_2 e^{\theta} + c_3 e^{2\theta}$

$+ \frac{1}{4}(1 + e^{\theta})^2[-3 + 2\ln(1 + e^{\theta})]$

12.29. $y = \frac{c_1}{t} + c_2 + c_3 t - \ln|t|$

12.30. $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_6 e^{2x} + c_5 e^{-2x} + x e^{2x}$

$\left(\text{con } c_6 = c_4 - \frac{7}{4}\right)$

CAPÍTULO 13

13.7. $y = \frac{1}{12} e^{-x} + \frac{2}{3} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{3x}$

13.8. $y = \frac{13}{12} e^{-x} + \frac{2}{3} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{3x}$

13.9. $y = e^{-x} + e^{2x}$

13.10. $y = \left(1 + \frac{1}{12} e^3\right) e^{-(x-1)}$

$+ \left(1 - \frac{1}{3} e^3\right) e^{2(x-1)} + \frac{1}{4} e^{3x}$

13.11. $y = -\cos 1 \cos x - \operatorname{sen} 1 \operatorname{sen} x + x$

$= -\cos(x - 1) + x$

13.12. $y = -\frac{1}{6} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x$

$- \frac{1}{12} \cos^4 2x + \frac{1}{12} \operatorname{sen}^4 2x$

$= \frac{1}{12}(1 + \cos^2 2x - 2\cos 2x)$

13.13. $y \equiv 0$

13.14. $y = -2 + 6x - 6x^2 + 2x^3$

13.15. $y = e^{-t}\left(\frac{3}{10}\cos t + \frac{11}{10}\operatorname{sen} t\right) + \frac{1}{10}\operatorname{sen} 2t - \frac{3}{10}\cos 2t$

CAPÍTULO 14

14.26. 60 lb/pies

14.27. 17.07 lb/pies

14.28. 130.7 dinas/cm

14.29. 19.6 N/m

14.30. $x = \frac{1}{6}\cos 8t$

14.31. $x = -\frac{1}{6}\cos 8t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 8t$

14.32. $x = 3\cos 12t + \frac{5}{6}\operatorname{sen} 12t$

14.33. $x = \operatorname{sen} 2t - \cos 2t$

14.34. *a)* $\omega = 8$ Hz; *b)* $f = 4/\pi$ Hz; *c)* $T = \pi/4$ seg

14.35. *a)* $\omega = 12$ Hz; *b)* $f = 6/\pi$ Hz; *c)* $T = \pi/6$ seg

14.36. *a)* $\omega = 2$ Hz; *b)* $f = 1/\pi$ Hz; *c)* $T = \pi$ seg

14.37. $x = x_0 \cos\sqrt{k/m}\,t + v_0\sqrt{m/k}\operatorname{sen}\sqrt{k/m}\,t$

14.38. $x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}e^{-4t}\operatorname{sen} 4\sqrt{3}\,t$

14.39. $x = -\frac{1}{2}e^{-4t} - 2te^{4t}$

14.40. $x = \frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-6t}$

14.41. $x = -0.1e^{-4t} - 2.4te^{-4t}$

14.42. $x = -0.1e^{-4t}\cos\sqrt{0.02}t - \frac{2.4}{\sqrt{0.02}}e^{-4t}\operatorname{sen}\sqrt{0.02}t$

14.43. $x = -8.62e^{3.86t} + 8.52e^{-4.14t}$

14.44. $x = e^{-2t}\left(\frac{2}{5}\cos 2t - \frac{6}{5}\operatorname{sen} 2t\right) + \frac{4}{5}\operatorname{sen} 4t - \frac{2}{5}\cos 4t$

14.45. $x = -\frac{4}{105}\operatorname{sen} 5t + \frac{2}{21}\operatorname{sen} 2t$

14.46. $x = \frac{1}{16}\operatorname{sen} 4t - \frac{1}{2}\cos 4t - \frac{t}{4}\cos 4t$

14.47. $x = e^{-4t}\cos 4\sqrt{3}t - \cos 8t$

14.48. $x = -\frac{5}{4}e^{-2t}\cos 4t - \frac{3}{4}e^{-2t}\operatorname{sen} 4t + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t$

14.49. $x_s = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t = \frac{\sqrt{5}}{4}\cos(2t - 0.46)$

14.50. $x = -4e^{-3t}\cos\sqrt{3}t - 6\sqrt{3}e^{-3t}\operatorname{sen}\sqrt{3}\,t + 4\cos 3t + 2\operatorname{sen} 3t$

14.51. $x_s = 4\cos 3t + 2\operatorname{sen} 3t = \sqrt{20}\cos(3t - 0.46)$

14.52. $q = \frac{1}{100}(3e^{-50t} - 15e^{-10t} + 12)$; $I = \frac{3}{2}(e^{-10t} - e^{-50t})$

14.53. $I = 10.09e^{-50t}\operatorname{sen} 50\sqrt{19}\,t$; $q = \frac{11}{250}\left(1 - e^{-50t}\cos 50\sqrt{19}t - \frac{1}{\sqrt{19}}e^{-50t}\operatorname{sen} 50\sqrt{19}\,t\right)$

14.54. $I = \frac{5}{4}(e^{-50t} - e^{-10t})$

14.55. $I = 24te^{-500t}$

14.56. $I = -\frac{2}{5}e^{-4t}\cos 6t + \frac{82}{15}e^{-4t}\operatorname{sen} 6t + \frac{2}{5}\cos 2t - \frac{6}{5}\operatorname{sen} 2t$

14.57. $I_s = \frac{2}{5}\cos 2t - \frac{6}{5}\operatorname{sen} 2t = \frac{\sqrt{40}}{5}\cos(2t + 1.25)$

14.58. $I = -\frac{150}{52}e^{-4t}\cos 3t - \frac{425}{52}e^{-4t}\operatorname{sen} 3t + \frac{150}{52}\cos 3t + \frac{225}{52}\operatorname{sen} 3t$

14.59. $I_s = \frac{150}{52}\cos 3t + \frac{225}{52}\operatorname{sen} 3t = 5.2\cos(3t - 0.983)$

14.60. $I = -e^{-200t}\cos 400t + \frac{11}{2}e^{-200t}\operatorname{sen} 400t + \cos 200t - 2\operatorname{sen} 200t$

14.61. $I_s = \cos 200t - 2\operatorname{sen} 200t = \sqrt{5}\cos(200t + 1.11)$

14.62. $q = \frac{30}{61}e^{-10t}\cos 50t + \frac{36}{61}e^{-10t}\operatorname{sen} 50t - \frac{30}{61}\cos 60t - \frac{25}{61}\operatorname{sen} 60t$

14.63. $q_s = -\frac{30}{61}\cos 60t - \frac{25}{61}\operatorname{sen} 60t = -0.64\cos(60t - 0.69)$

14.64. 0

14.65. $\frac{1}{640\,001}(6\,392\cos t + 320\operatorname{sen} t)$

14.66. 1.28 pies = 15.36 pulg sumergido

14.67. $x = -\frac{1}{6}\cos 5t - \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t$

14.68. $x = -0.260\cos(5t - 0.876)$

14.69. 0.764 pie sumergido

14.70. $x = -0.236\cos 6.47t$

14.71. *a*) $\omega = 6.47$ Hz; *b*) $f = 1.03$Hz; *c*) $T = 0.97$ seg

14.72. *a*) $\omega = 5$Hz; *b*) $f = 5/(2\pi)$Hz; *c*) $T = 2\pi/5$ seg

14.73. Ninguna posición de equilibrio; se hunde.

14.74. Ninguna posición de equilibrio; se hunde.

14.75. 9.02 cm sumergido.

14.76. $x = -4.80\operatorname{sen} 10.42t$

14.77. $x = c_1\cos\sqrt{\frac{\pi\rho r^2}{m}}t + c_2\operatorname{sen}\sqrt{\frac{\pi\rho r^2}{m}}t;$ $T = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{\pi m}{\rho}}$

14.78. 0.236 pies = 2.84 pulg

14.79. 159.15 lb

14.80. $\ddot{x} + \frac{w/\rho}{m}x = 0$

14.81. *a*) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{w/\rho}}$; *b*) periodo reducido por $1/\sqrt{2}$

CAPÍTULO 15

15.18. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

15.19. $\begin{bmatrix} 4 & 17 \\ -9 & -8 \end{bmatrix}$

15.20. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \\ -3 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

15.21. $\begin{bmatrix} 11 & 10 & 10 \\ 1 & -6 & 5 \\ 12 & 2 & 22 \end{bmatrix}$

15.22. No definida

15.23. No definida

15.24. *a*) $\begin{bmatrix} 11 & -5 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

15.25. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$

15.26. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

15.27. $\begin{bmatrix} -11 & -8 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$

15.28. *a*) $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 11 \\ -5 & 0 & -7 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 10 & 14 & 4 \end{bmatrix}$

15.29. *a*) $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ *b*) No definida

15.30. No definida

15.31. $\begin{bmatrix} 13 \\ -2 \\ 14 \end{bmatrix}$

15.32. $\lambda^2 - 1 = 0$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

15.33. $\lambda^2 - 2\lambda + 13 = 0$; $\lambda_1 = 1 + 2\sqrt{3}i$, $\lambda_2 = 1 - 2\sqrt{3}i$

15.34. $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$; $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$

15.35. $\lambda^2 - 9 = 0$; $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$

15.36. $\lambda^2 - 10\lambda + 24 = 0$; $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 6$

15.37. $(1-\lambda)(\lambda^2 + 1) = 0$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = -i$
Cada valor propio tiene multiplicidad uno.

15.38. $(-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda) = 0$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 5$
El valor propio $\lambda = 0$ tiene multiplicidad dos, en tanto que $\lambda = 5$ tiene multiplicidad uno.

15.39. $\lambda^2 - 3t\lambda + t^2 = 0$; $\lambda_1 = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)t$,
$\lambda_2 = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)t$

15.40. $(5t - \lambda)(\lambda^2 - 25t^2) = 0$; $\lambda_1 = 5t$, $\lambda_2 = 5t$, $\lambda_3 = -5t$

15.41. $\begin{bmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

15.42. $\begin{bmatrix} -2\,\text{sen}\,2t \\ (1+6t^2)e^{3t^2} \end{bmatrix}$

15.43. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\text{sen}\,2 \\ \frac{1}{6}(e^3 - 1) \end{bmatrix}$

CAPÍTULO 16

16.13. $\lambda_1 = 2t$, $\lambda_2 = -3t$; $\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$

16.14. $\lambda_1 = -t$, $\lambda_2 = 5t$;
$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4e^{5t} + 2e^{-t} & 2e^{5t} - 2e^{-t} \\ 4e^{5t} - 4e^{-t} & 2e^{5t} + 4e^{-t} \end{bmatrix}$

16.15. $\lambda_1 = t$, $\lambda_2 = -t$; $\begin{bmatrix} 3e^{t} - 2e^{-t} & 3e^{t} - 3e^{-t} \\ -2e^{t} + 2e^{-t} & -2e^{t} + 3e^{-t} \end{bmatrix}$

16.16. $\lambda_1 = 2t$, $\lambda_2 = -4t$;
$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4e^{2t} + 2e^{-4t} & e^{2t} - e^{-4t} \\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} & 2e^{2t} + 4e^{-4t} \end{bmatrix}$

16.17. $\lambda_1 = -2t$, $\lambda_2 = -7t$;
$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7e^{-2t} - 2e^{-7t} & e^{-2t} - e^{-7t} \\ -14e^{-2t} + 14e^{-7t} & -2e^{-2t} + 7e^{-7t} \end{bmatrix}$

16.18. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2t$; $e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

16.19. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2t;\ e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

16.20. $\lambda_1 = 2ti,\ \lambda_2 = -2ti;$
$\begin{bmatrix} \cos 2t + 2\,\text{sen}\,2t & (5/2)\,\text{sen}\,2t \\ -2\,\text{sen}\,2t & \cos 2t - 2\,\text{sen}\,2t \end{bmatrix}$

16.21. $\lambda_1 = 4it,\ \lambda_2 = -4it;\ \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 4\cos 2t & \text{sen}\,4t \\ -16\,\text{sen}\,4t & 4\cos 4t \end{bmatrix}$

16.22. $\lambda_1 = \lambda_2 = -8t;\ e^{-8t}\begin{bmatrix} 1+8t & t \\ -64t & 1-8t \end{bmatrix}$

16.23. $\lambda_1 = \lambda_2 = -2t;\ e^{-2t}\begin{bmatrix} 1+2t & t \\ -4t & 1-2t \end{bmatrix}$

16.24. $\lambda_1 = 6it,\ \lambda_2 = -6it;\ \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 6\cos 6t & \text{sen}\,6t \\ -36\,\text{sen}\,6t & 6\cos 6t \end{bmatrix}$

16.25. $\lambda_1 = (-4+3i)t,\ \lambda_2 = (-4-3i)t;\ \dfrac{e^{-4t}}{3}\begin{bmatrix} 3\cos 3t + 4\,\text{sen}\,3t & \text{sen}\,3t \\ -25\,\text{sen}\,3t & 3\cos 3t - 4\,\text{sen}\,3t \end{bmatrix}$

16.26. $\lambda_1 = (3+\sqrt{15}i)t,\ \lambda_2 = (3-\sqrt{15}i)t;\ \dfrac{e^{3t}}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix} \sqrt{15}\cos\sqrt{15}t + \text{sen}\,\sqrt{15}t & -2\,\text{sen}\,\sqrt{15}t \\ 8\,\text{sen}\,\sqrt{15}t & \sqrt{15}\cos\sqrt{15}t - \text{sen}\,\sqrt{15}t \end{bmatrix}$

16.27. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2t;\ e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

16.28. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2t;\ e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

16.29. $\lambda_1 = -t,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2t;$
$\dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 9e^{-t} & -3e^{-t} + 3e^{2t} & e^{-t} - e^{2t} + 3e^{2t} \\ 0 & 9e^{2t} & 9te^{2t} \\ 0 & 0 & 9e^{2t} \end{bmatrix}$

16.30. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0;\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(véase problema 16.12)

16.31. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = t;\ \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$

16.32. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = t;\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ e^t - 1 & 0 & e^t \end{bmatrix}$

CAPÍTULO 17

17.10. $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}\quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t+1 \end{bmatrix}\quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\quad t_0 = 1$

17.11. $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}\quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^t \end{bmatrix}\quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\quad t_0 = 0$

17.12. $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}\quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ t & 3/t \end{bmatrix}\quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\text{sen}\,t}{t} \end{bmatrix}\quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\quad t_0 = 2$

17.13. $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}\quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2t & -5 \end{bmatrix}\quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t^2+1 \end{bmatrix}\quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix}\quad t_0 = 0$

17.14. $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}\quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}\quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **c** y t_0 no especificados

17.15. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}$ $\mathbf{A}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-e^{-t}&te^{-t}\end{bmatrix}$ $\mathbf{f}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ $t_0=-1$

17.16. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\\y_3(t)\end{bmatrix}$ $\mathbf{A}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2.5&2&-1.5\end{bmatrix}$ $\mathbf{f}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\0.5t^2+8t+10\end{bmatrix}$ $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\end{bmatrix}$ $t_0=\pi$

17.17. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}$ $\mathbf{A}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$ $\mathbf{f}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\t\end{bmatrix}$ $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ $t_0=0$

17.18. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\y_1(t)\\y_2(t)\\z_1(t)\end{bmatrix}$ $\mathbf{A}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&0&1&-1\\0&0&0&1&0\\t&0&-2&1&0\\1&0&-1&1&1\end{bmatrix}$ $\mathbf{f}(t)=\begin{bmatrix}0\\t\\0\\t^2+1\\0\end{bmatrix}$ $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}1\\15\\0\\-7\\4\end{bmatrix}$ $t_0=1$

17.19. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\y_1(t)\end{bmatrix}$ $\mathbf{A}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&2&5\\1&-1&-2\end{bmatrix}$ $\mathbf{f}(t)=\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$ $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ $t_0=0$

17.20. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\y_1(t)\end{bmatrix}$ $\mathbf{A}(t)=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ $\mathbf{f}(t)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$ $t_0=7$

CAPÍTULO 18

18.17. Véase la figura 18-20.

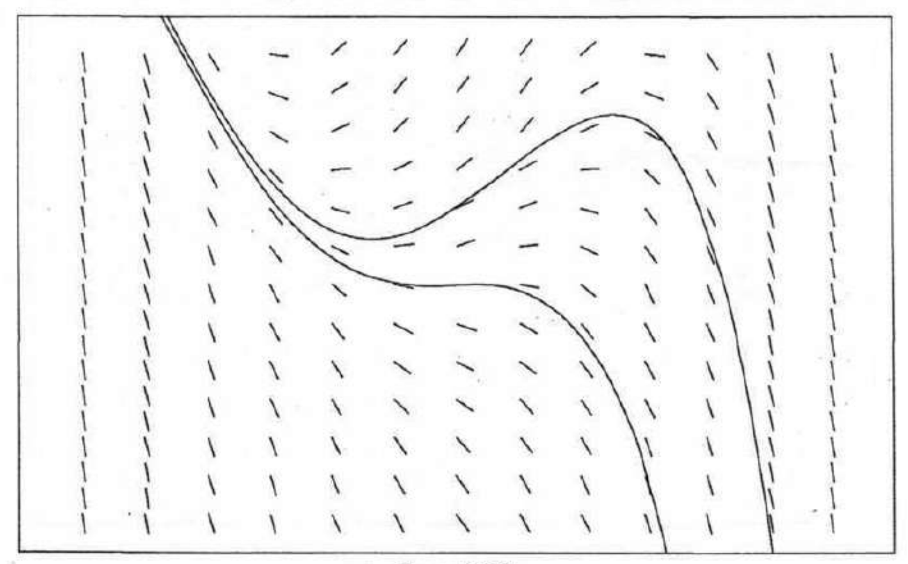


Figura 18-20.

18.18. Véase la figura 18-21.

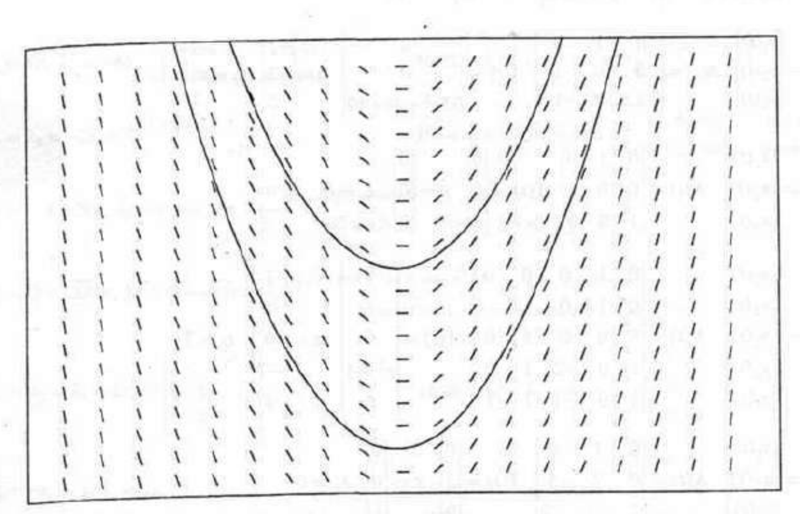


Figura 18-21.

18.19. Véase la figura 18-22.

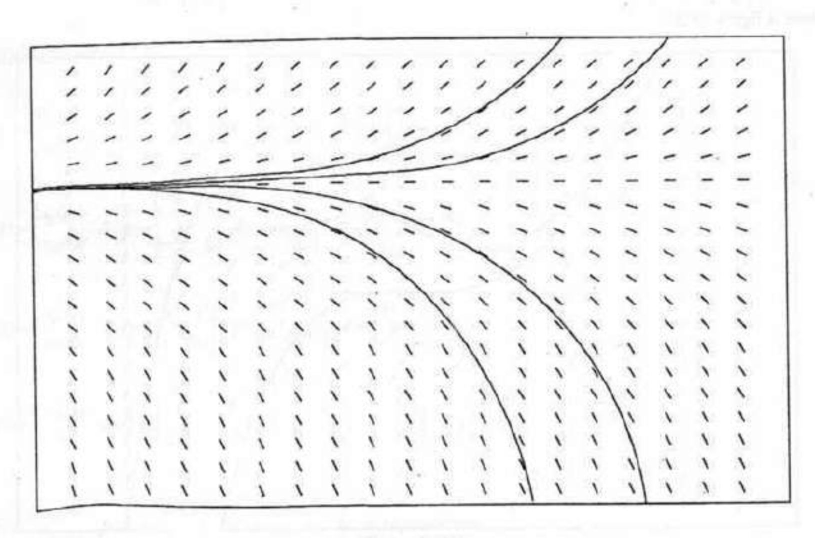


Figura 18-22.

18.20. Véase la figura 18-23.

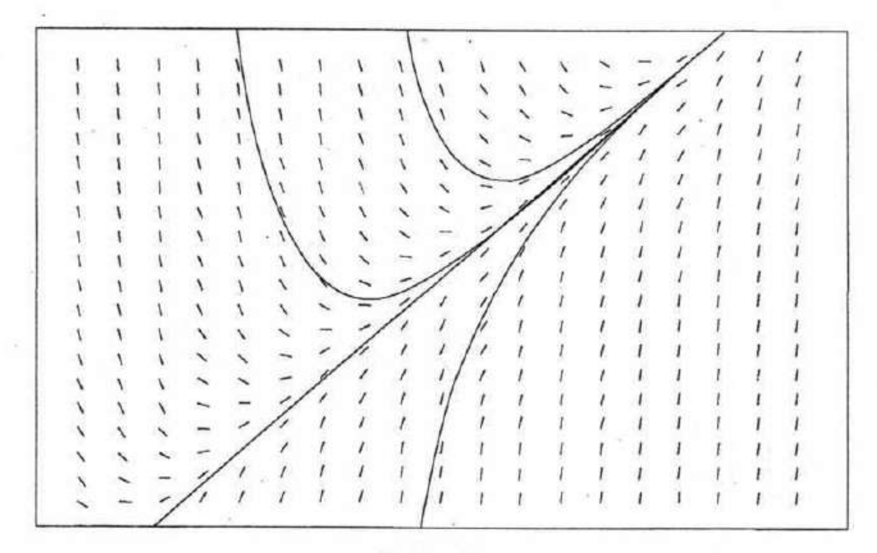


Figura 18-23.

18.21. Véase la figura 18-24.

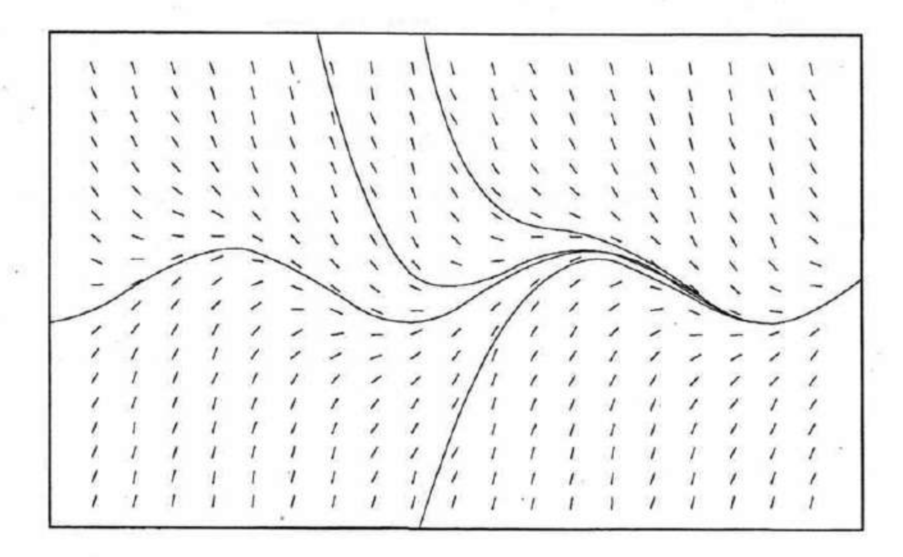


Figura 18-24.

18.22. Se dibujan cuatro curvas de la solución, comenzando en los puntos (1, 3), (1, −3), (−1, −3) y (−1, 3), respectivamente, y continuando en la dirección x positiva. Véase la figura 18-25.

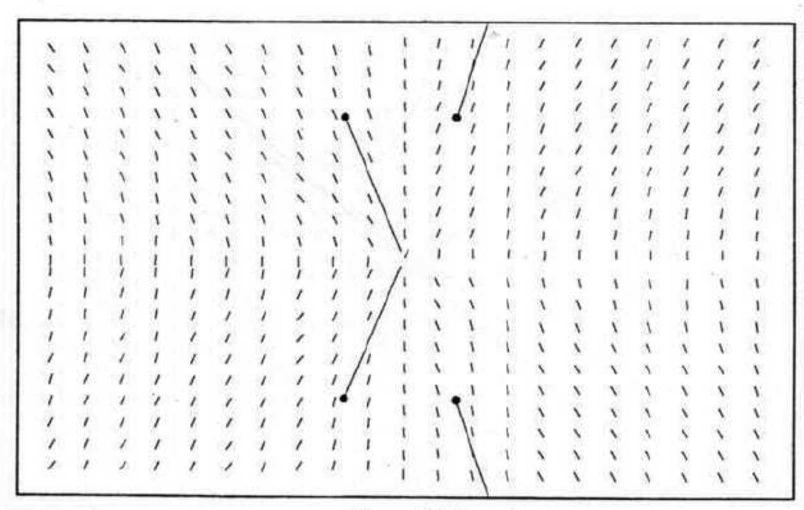


Figura 18-25.

18.23. Véase la figura 18-17.

18.24. Líneas rectas de la forma $y = x + (1 - c)$

18.25. Véase la figura 18-15.

18.26. Líneas rectas verticales.

18.27. Véase la figura 18-16.

18.28. Líneas rectas horizontales.

18.29. Véase la figura 18-14.

18.30. Parábolas de la forma $y = x^2 + c$

18.31. Véase la figura 18-18.

18.32. Curvas de la forma $y = \operatorname{sen} x - c$

Por comparación con métodos que se presentarán en capítulos subsiguientes, las respuestas se dan a través de $x = 1.0$, y se dan para valores adicionales de h.

8.33.

Método: MÉTODO DE EULER				
Problema: $y' = -y$; $y(0) = 1$				
x_n	y_n			Solución verdadera $Y(x) = e^{-x}$
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.01$	
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0.9000	0.9025	0.9044	0.9048
0.2	0.8100	0.8145	0.8179	0.8187
0.3	0.7290	0.7351	0.7397	0.7408
0.4	0.6561	0.6634	0.6690	0.6703
0.5	0.5905	0.5987	0.6050	0.6065
0.6	0.5314	0.5404	0.5472	0.5488
0.7	0.4783	0.4877	0.4948	0.4966
0.8	0.4305	0.4401	0.4475	0.4493
0.9	0.3874	0.3972	0.4047	0.4066
1.0	0.3487	0.3585	0.3660	0.3679

8.34.

Método: MÉTODO DE EULER				
Problema: $y' = 2x$; $y(0) = 2$				
x_n	y_n			Solución verdadera $Y(x) = x^2$
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.01$	
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0000	0.0050	0.0090	0.0100
0.2	0.0200	0.0300	0.0380	0.0400
0.3	0.0600	0.0750	0.0870	0.0900
0.4	0.1200	0.1400	0.1560	0.1600
0.5	0.2000	0.2250	0.2450	0.2500
0.6	0.3000	0.3300	0.3540	0.3600
0.7	0.4200	0.4550	0.4830	0.4900
0.8	0.5600	0.6000	0.6320	0.6400
0.9	0.7200	0.7650	0.8010	0.8100
1.0	0.9000	0.9500	0.9900	1.0000

18.35.

Método: MÉTODO DE EULER				
Problema: $y' = -y + x + 2;\ y(0) = 2$				
x_n	y_n			Solución verdadera
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.01$	$Y(x) = e^{-x} + x + 1$
0.0	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
0.1	2.0000	2.0025	2.0044	2.0048
0.2	2.0100	2.0145	2.0179	2.0187
0.3	2.0290	2.0351	2.0397	2.0408
0.4	2.0561	2.0634	2.0690	2.0703
0.5	2.0905	2.0987	2.1050	2.1065
0.6	2.1314	2.1404	2.1472	2.1488
0.7	2.1783	2.1877	2.1948	2.1966
0.8	2.2305	2.2401	2.2475	2.2493
0.9	2.2874	2.2972	2.3047	2.3066
1.0	2.3487	2.3585	2.3660	2.3679

18.36.

Método: MÉTODO DE EULER				
Problema: $y' = 4x^2;\ y(0) = 0$				
x_n	y_n			Solución verdadera
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.01$	$Y(x) = x^4$
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001
0.2	0.0004	0.0009	0.0014	0.0016
0.3	0.0036	0.0056	0.0076	0.0081
0.4	0.0144	0.0196	0.0243	0.0256
0.5	0.0400	0.0506	0.0600	0.0625
0.6	0.0900	0.1089	0.1253	0.1296
0.7	0.1764	0.2070	0.2333	0.2401
0.8	0.3136	0.3600	0.3994	0.4096
0.9	0.5184	0.5852	0.6416	0.6561
1.0	0.8100	0.9025	0.9801	1.0000

CAPÍTULO 19

19.13.

Método: MÉTODO MODIFICADO DE EULER			
Problema: $y' = -y + x + 2$; $y(0) = 2$			
x_n	$h = 0.1$		Solución verdadera
	py_n	y_n	$Y(x) = e^{-x} + x + 1$
0.0	—	2.000000	2.000000
0.1	2.000000	2.005000	2.004837
0.2	2.014500	2.019025	2.018731
0.3	2.037123	2.041218	2.040818
0.4	2.067096	2.070802	2.070320
0.5	2.103722	2.107076	2.106531
0.6	2.146368	2.149404	2.148812
0.7	2.194463	2.197210	2.196585
0.8	2.247489	2.249975	2.249329
0.9	2.304978	2.307228	2.306570
1.0	2.366505	2.368541	2.367879

19.14.

Método: MÉTODO MODIFICADO DE EULER			
Problema: $y' = -y$; $y(0) = 1$			
x_n	$h = 0.1$		Solución verdadera
	py_n	y_n	$Y(x) = e^{-x}$
0.0	—	1.0000000	1.0000000
0.1	0.9000000	0.9050000	0.9048374
0.2	0.8145000	0.8190250	0.8187308
0.3	0.7371225	0.7412176	0.7408182
0.4	0.6670959	0.6708020	0.6703201
0.5	0.6037218	0.6070758	0.6065307
0.6	0.5463682	0.5494036	0.5488116
0.7	0.4944632	0.4972102	0.4965853
0.8	0.4474892	0.4499753	0.4493290
0.9	0.4049777	0.4072276	0.4065697
1.0	0.3665048	0.3685410	0.3678794

19.15.

Método: MÉTODO MODIFICADO DE EULER			
Problema: $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$; $y(1) = 3$			
x_n	$h = 0.2$		Solución verdadera
	py_n	y_n	$Y(x) = x\sqrt{9 + \ln x^2}$
1.0	—	3.0000	3.0000
1.2	3.6667	3.6716	3.6722
1.4	4.3489	4.3530	4.3542
1.6	5.0393	5.0429	5.0444
1.8	5.7367	5.7399	5.7419
2.0	6.4404	6.4432	6.4456

19.16. La solución verdadera es $Y(x) = x^2/2 - 1$, un polinomio de segundo grado. Dado que el método de Euler modificado es un método de segundo orden, éste generará la solución exacta.

19.17.

Método: MÉTODO MODIFICADO DE EULER			
Problema: $y' = -4x^3$; $y(2) = 6$			
x_n	$h = 0.2$		Solución verdadera
	py_n	y_n	$Y(x) = x^4 - 10$
2.0	—	6.0000	6.0000
2.2	12.4000	13.4592	13.4256
2.4	21.9776	23.2480	23.1776
2.6	34.3072	35.8080	35.6976
2.8	49.8688	51.6192	51.4656
3.0	69.1808	71.2000	71.0000

19.18.

Método: MÉTODO DE RUNGE-KUTTA		
Problema: $y' = y + x + 2;\ y(0) = 2$		
x_n	$h = 0.1$ y_n	Solución verdadera $Y(x) = e^{-x} + x + 1$
0.0	2.000000	2.000000
0.1	2.004838	2.004837
0.2	2.018731	2.018731
0.3	2.040818	2.040818
0.4	2.070320	2.070320
0.5	2.106531	2.106531
0.6	2.148812	2.148812
0.7	2.196586	2.196585
0.8	2.249329	2.249329
0.9	2.306570	2.306570
1.0	2.367880	2.367879

19.19.

Método: MÉTODO DE RUNGE-KUTTA		
Problema: $y' = -y\ ;\ y(0) = 1$		
x_n	$h = 0.1$ y_n	Solución verdadera $Y(x) = e^{-x}$
0.0	1.0000000	1.0000000
0.1	0.9048375	0.9048374
0.2	0.8187309	0.8187308
0.3	0.7408184	0.7408182
0.4	0.6703203	0.6703201
0.5	0.6065309	0.6065307
0.6	0.5488119	0.5488116
0.7	0.4965856	0.4965853
0.8	0.4493293	0.4493290
0.9	0.4065700	0.4065697
1.0	0.3678798	0.3678794

19.20.

Método: MÉTODO DE RUNGE-KUTTA		
Problema: $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$; $y(1) = 3$		
x_n	$h = 0.2$ py_n	Solución verdadera $Y(x) = x\sqrt{9 + \ln x^2}$
1.0	3.0000000	3.0000000
1.2	3.6722028	3.6722045
1.4	4.3541872	4.3541901
1.6	5.0444406	5.0444443
1.8	5.7418469	5.7418514
2.0	6.4455497	6.4455549

19.21. Dado que la solución verdadera $Y(x) = x^4 - 10$ es un polinomio de cuarto grado, el método de Runge-Kutta, que es un método numérico de cuarto orden, genera una solución exacta.

19.22.

Método: MÉTODO DE RUNGE-KUTTA		
Problema: $y' = 5x^4$; $y(0) = 0$		
x_n	$h = 0.1$ y_n	Solución verdadera $Y(x) = x^5$
0.0	0.0000000	0.0000000
0.1	0.0000104	0.0000100
0.2	0.0003208	0.0003200
0.3	0.0024313	0.0024300
0.4	0.0102417	0.0102400
0.5	0.0312521	0.0312500
0.6	0.0777625	0.0777600
0.7	0.1680729	0.1680700
0.8	0.3276833	0.3276800
0.9	0.5904938	0.5904900
1.0	1.0000042	1.0000000

19.23.

Método: MÉTODO DE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON			
Problema: $y' = y$; $y(0) = 1$			
x_n	$h = 0.1$		Solución verdadera $Y(x) = e^{-x}$
	py_n	y_n	
0.0	—	1.0000000	1.0000000
0.1	—	1.1051708	1.1051709
0.2	—	1.2214026	1.2214028
0.3	—	1.3498585	1.3498588
0.4	1.4918201	1.4918245	1.4918247
0.5	1.6487164	1.6487213	1.6487213
0.6	1.8221137	1.8221191	1.8221188
0.7	2.0137473	2.0137533	2.0137527
0.8	2.2255352	2.2255418	2.2255409
0.9	2.4595971	2.4595044	2.4596031
1.0	2.7182756	2.7182836	2.7182818

19.24.

Método: MÉTODO DE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON			
Problema: $y' = -y + x + 2$; $y(0) = 2$			
x_n	$h = 0.1$		Solución verdadera $Y(x) = e^{-x} + x + 1$
	py_n	y_n	
0.0	—	2.000000	2.000000
0.1	—	2.004838	2.004837
0.2	—	2.018731	2.018731
0.3	—	2.040818	2.040818
0.4	2.070323	2.070320	2.070320
0.5	2.106533	2.106530	2.106531
0.6	2.148814	2.148811	2.148812
0.7	2.196587	2.196585	2.196585
0.8	2.249330	2.249328	2.249329
0.9	2.306571	2.306569	2.306570
1.0	2.367880	2.367878	2.367879

19.25.

Método: MÉTODO DE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON			
Problema: $y' = -y$; $y(0) = 1$			
x_n	$h = 0.1$		Solución verdadera
	py_n	y_n	$Y(x) = e^{-x}$
0.0	—	1.0000000	1.0000000
0.1	—	0.9048375	0.9048374
0.2	—	0.8187309	0.8187308
0.3	—	0.7408184	0.7408182
0.4	0.6703231	0.6703199	0.6703201
0.5	0.6065332	0.6065303	0.6065307
0.6	0.5488136	0.5488110	0.5488116
0.7	0.4965869	0.4965845	0.4965853
0.8	0.4493302	0.4493281	0.4493290
0.9	0.4065706	0.4065687	0.4065697
1.0	0.3678801	0.3678784	0.3678794

19.26.

Método: MÉTODO DE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON			
Problema: $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$; $y(1) = 3$			
x_n	$h = 0.2$		Solución verdadera
	py_n	y_n	$Y(x) = x\sqrt{9 + \ln x^2}$
1.0	—	3.0000000	3.0000000
1.2	—	3.6722028	3.6722045
1.4	—	4.3541872	4.3541901
1.6	—	5.0444406	5.0444443
1.8	5.7419118	5.7418465	5.7418514
2.0	6.4455861	6.4455489	6.4455549

19.27.

Método: MÉTODO DE MILNE			
Problema: $y' = -y + x + 2$; $y(0) = 2$			
x_n	$h = 0.1$		Solución verdadera
	py_n	y_n	$Y(x) = e^{-x} + x + 1$
0.0	—	2.000000	2.000000
0.1	—	2.004838	2.004837
0.2	—	2.018731	2.018731
0.3	—	2.040818	2.040818
0.4	2.070323	2.070320	2.070320
0.5	2.106533	2.106531	2.106531
0.6	2.148814	2.148811	2.148812
0.7	2.196588	2.196585	2.196585
0.8	2.249331	2.249329	2.249329
0.9	2.306571	2.306570	2.306570
1.0	2.367881	2.367879	2.367879

19.28.

Método: MÉTODO DE MILNE			
Problema: $y' = -y$; $y(0) = 1$			
x_n	$h = 0.2$		Solución verdadera
	py_n	y_n	$Y(x) = e^{-x}$
0.0	—	1.0000000	1.0000000
0.1	—	0.9048375	0.9048374
0.2	—	0.8187309	0.8187308
0.3	—	0.7408184	0.7408182
0.4	0.6703225	0.6703200	0.6703201
0.5	0.6065331	0.6065307	0.6065307
0.6	0.5488138	0.5488114	0.5488116
0.7	0.4965875	0.4965852	0.4965853
0.8	0.4493306	0.4493287	0.4493290
0.9	0.4065714	0.4065695	0.4065697
1.0	0.3678807	0.3678791	0.3678794

CAPÍTULO 20

20.15. $y' = z,\ z' = -y;\ y(0) = 1,\ z(0) = 0$

20.16. $y' = z,\ z' = y + x;\ y(0) = 0,\ z(0) = -1$

20.17. $y' = z,\ z' = 2xyz - (\operatorname{sen} x)y^3 + \dfrac{3}{y};\ y(1) = 0,\ z(1) = 15$

20.18. $y' = z,\ z' = w,\ w' = xw - \dfrac{x^2 y}{x};\ y(0) = 1,\ z(0) = 2,\ w(0) = 3$

20.19.

Método: MÉTODO DE EULER			
Problema: $y'' + y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$			
x_n	$h = 0.1$		Solución verdadera $Y(x) = \cos x$
	y_n	z_n	
0.0	1.0000	0.0000	1.0000
0.1	1.0000	−0.1000	0.9950
0.2	0.9900	−0.2000	0.9801
0.3	0.9700	−0.2990	0.9553
0.4	0.9401	−0.3960	0.9211
0.5	0.9005	−0.4900	0.8776
0.6	0.8515	−0.5801	0.8253
0.7	0.7935	−0.6652	0.7648
0.8	0.7270	−0.7446	0.6967
0.9	0.6525	−0.8173	0.6216
1.0	0.5708	−0.8825	0.5403

20.20. Dado que la solución verdadera $Y(x) = -x$, un polinomio de primer grado, el método de Euler es exacto y genera la solución verdadera $y_n = -x_n$ en cada x_n.

20.21.

Método: MÉTODO DE RUNGE-KUTTA			
Problema: $y'' + y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$			
x_n	$h = 0.1$		Solución verdadera
	y_n	z_n	$Y(x) = \cos x$
0.0	1.0000000	0.0000000	1.0000000
0.1	0.9950042	−0.0998333	0.9950042
0.2	0.9800666	−0.1986692	0.9800666
0.3	0.9553365	−0.2955200	0.9553365
0.4	0.9210611	−0.3894180	0.9210610
0.5	0.8775827	−0.4794252	0.8775826
0.6	0.8253359	−0.5646420	0.8253356
0.7	0.7648425	−0.6442172	0.7648422
0.8	0.6967071	−0.7173556	0.6967067
0.9	0.6216105	−0.7833264	0.6216100
1.0	0.5403030	−0.8414705	0.5403023

20.22. Dado que la solución verdadera $Y(x) = -x$, un polinomio de primer grado, el método de Runge-Kutta es exacto y genera la solución verdadera $y_n = -x_n$ en cada x_n.

20.23.

Método: MÉTODO DE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON					
Problema: $y'' - 3y' + 2y = 0$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$					
x_n	$h = 0.1$				Solución verdadera
	py_n	pz_n	y_n	z_n	$Y(x) = e^{2x} - 2e^x$
0.0	—	—	−1.0000000	0.0000000	−1.0000000
0.1	—	—	−0.9889417	0.2324583	−0.9889391
0.2	—	—	−0.9509872	0.5408308	−0.9509808
0.3	—	—	−0.8776105	0.9444959	−0.8775988
0.4	−0.7582805	1.4670793	−0.7581212	1.4674067	−0.7581085
0.5	−0.5793682	2.1386965	−0.5791739	2.1390948	−0.5791607
0.6	−0.3243735	2.9954802	−0.3241340	2.9959702	−0.3241207
0.7	0.0273883	4.0822712	0.0276819	4.0828703	0.0276946
0.8	0.5015797	5.4542298	0.5019396	5.4549628	0.5019506
0.9	1.1299923	7.1791788	1.1304334	7.1800757	1.1304412
1.0	1.9519493	9.3404498	1.9524898	9.3415469	1.9524924

20.24.

Método: MÉTODO DE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON					
Problema: $y'' + y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$					
x_n	$h = 0.1$				Solución verdadera $Y(x) = \cos x$
	py_n	pz_n	y_n	z_n	
0.0	—	—	1.0000000	0.0000000	1.0000000
0.1	—	—	0.9950042	−0.0998333	0.9950042
0.2	—	—	0.9800666	−0.1986692	0.9800666
0.3	—	—	0.9553365	−0.2955200	0.9553365
0.4	0.9210617	−0.3894147	0.9210611	−0.3894184	0.9210610
0.5	0.8775837	−0.4794223	0.8775827	−0.4794259	0.8775826
0.6	0.8253371	−0.5646396	0.8253357	−0.5646431	0.8253356
0.7	0.7648439	−0.6442153	0.7648422	−0.6442186	0.7648422
0.8	0.6967086	−0.7173541	0.6967066	−0.7173573	0.6967067
0.9	0.6216119	−0.7833254	0.6216096	−0.7833284	0.6216100
1.0	0.5403043	−0.8414700	0.54033017	−0.8414727	0.5403023

20.25. Dado que la solución verdadera $Y(x) = -x$, un polinomio de primer grado, el método de Adams-Bashforth-Moulton es exacto y genera la solución verdadera $y_n = -x_n$ en cada x_n.

20.26.

Método: MÉTODO DE MILNE					
Problema: $y'' - 3y' + 2y = 0;\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0$					
x_n	$h = 0.1$				Solución verdadera $Y(x) = e^{2x} - 2e^x$
	py_n	pz_n	y_n	z_n	
0.0	—	—	−1.0000000	0.0000000	−1.0000000
0.1	—	—	−0.9889417	0.2324583	−0.9889391
0.2	—	—	−0.9509872	0.5408308	−0.9509808
0.3	—	—	−0.8776105	0.9444959	−0.8775988
0.4	−0.7582563	1.4671290	−0.7581224	1.4674042	−0.7581085
0.5	−05793451	2.1387436	−0.5791820	2.1390779	−0.5791607
0.6	−0.3243547	2.9955182	−0.3241479	2.9959412	−0.3241207
0.7	0.0274045	4.0823034	0.0276562	4.0828171	0.0276946
0.8	0.5505908	5.4542513	0.5019008	5.4548828	0.5019506
0.9	0.1299955	7.1791838	1.1303739	7.1799534	1.1304412
1.0	0.9519398	9.3404286	1.9524049	9.3413729	1.9524924

20.27.

Método: MÉTODO DE MILNE					
Problema: $y'' + y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$					
x_n	$h = 0.1$				Solución verdadera $Y(x) = \cos x$
	py_n	pz_n	y_n	z_n	
0.0	—	—	1.0000000	0.0000000	1.0000000
0.1	—	—	0.9950042	−0.0998333	0.9950042
0.2	—	—	0.9800666	−0.1986692	0.9800666
0.3	—	—	0.9553365	−0.2955200	0.9553365
0.4	0.9210617	−0.3894153	0.9210611	−0.3894183	0.9210610
0.5	0.8775835	−0.4794225	0.8775827	−0.4794254	0.8775826
0.6	0.8253369	−0.5646395	0.8253358	−0.5646426	0.8253356
0.7	0.7648437	−0.6442148	0.7648423	−0.6442178	0.7648422
0.8	0.6967086	−0.7173535	0.6967069	−0.7173564	0.6967067
0.9	0.6216120	−0.7833245	0.6216101	−0.7833272	0.6216100
1.0	0.5403047	−0.8414690	0.5403024	−0.8414715	0.5403023

20.28. predictores:

$$py_{n+1} = y_n + hy'_n$$
$$pz_{n+1} = z_n + hz'_n$$

correctores:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(py'_{n+1} + y'_n)$$

20.29.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$
$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

donde

$$k_1 = hf(x_n, y_n, z_n, w_n)$$
$$l_1 = hg(x_n, y_n, z_n, w_n)$$
$$m_1 = hr(x_n, y_n, z_n, w_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + \frac{1}{2}k_1,\ z_n + \frac{1}{2}l_1,\ w_n + \frac{1}{2}m_1\right)$$
$$l_2 = hg\left(x_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + \frac{1}{2}k_1,\ z_n + \frac{1}{2}l_1,\ w_n + \frac{1}{2}m_1\right)$$
$$m_2 = hr\left(x_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + \frac{1}{2}k_1,\ z_n + \frac{1}{2}l_1,\ w_n + \frac{1}{2}m_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + \frac{1}{2}k_2,\ z_n + \frac{1}{2}l_2,\ w_n + \frac{1}{2}m_2\right)$$
$$l_3 = hg\left(x_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + \frac{1}{2}k_2,\ z_n + \frac{1}{2}l_2,\ w_n + \frac{1}{2}m_2\right)$$
$$m_3 = hr\left(x_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + \frac{1}{2}k_2,\ z_n + \frac{1}{2}l_2,\ w_n + \frac{1}{2}m_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h,\ y_n + k_3,\ z_n + l_3,\ w_n + m_3)$$
$$l_4 = hg(x_n + h,\ y_n + k_3,\ z_n + l_3,\ w_n + m_3)$$
$$m_4 = hr(x_n + h,\ y_n + k_3,\ z_n + l_3,\ w_n + m_3)$$

20.30. Algunas ecuaciones como las dadas en el problema 20.13 con el agregado de

$$pw_{n+1} = w_{n-3} + \frac{4h}{3}(2w'_n - w'_{n-1} + 2w'_{n-2})$$
$$w_{n+1} = w_{n-1} + \frac{h}{3}(pw'_{n+1} + 4w'_n + w'_{n-1})$$

CAPÍTULO 21

21.27. $\frac{3}{s}$

21.28. $\frac{\sqrt{5}}{s}$

21.29. $\frac{1}{s-2}$

21.30. $\frac{1}{s+6}$

21.31. $\frac{1}{s^2}$

21.32. $-\frac{8}{s^2}$

21.33. $\frac{s}{s^2+9}$

21.34. $\frac{s}{s^2+16}$

21.35. $\frac{s}{s^2+b^2}$

21.36. $\frac{1}{(s+8)^2}$

21.37. $\frac{1}{(s-b)^2}$

21.38. $\frac{6}{s^4}$

21.39. $\frac{1-e^{-2s}}{s^2}$

21.40. $\frac{1-e^{-s}}{s} + \frac{e^{-(s-1)} - e^{-4(s-1)}}{s-1}$

21.41. $\frac{2}{s}(1-e^{-3s})$

21.42. $\frac{2(1-e^{-2s})}{s^2}$

21.43. $\frac{7!}{s^8}$

21.44. $\frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}$

21.45. $\frac{120}{(s+1)^6}$

21.46. $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$

21.47. $\frac{1}{1+3s}$

21.48. $\frac{15}{1+3s}$

21.49. $2\left[\frac{6}{s(s^2+12)}\right] = \frac{12}{s^3+12s}$

21.50. $\frac{8}{s+5}$

21.51. $3\dfrac{1/2}{s^2+1/4}=\dfrac{6}{4s^2+1}$

21.52. $\dfrac{-s}{s^2+19}$

21.53. $-0.9\sqrt{\pi}s^{-3/2}$

21.54. $\dfrac{2}{(s+1)^2+4}$

21.55. $\dfrac{2}{(s-1)^2+4}$

21.56. $\dfrac{s-1}{(s-1)^2+4}$

21.57. $\dfrac{s-3}{(s-3)^2+4}$

21.58. $\dfrac{s-3}{(s-3)^2+25}$

21.59. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}(s-5)^{-3/2}$

21.60. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}(s+5)^{-3/2}$

21.61. $\dfrac{2}{(s+2)[8s+2)^2+4]}$

21.62. $\dfrac{6}{s^4}+\dfrac{3s}{s^2+4}$

21.63. $\dfrac{5}{s-2}+\dfrac{7}{s+1}$

21.64. $\dfrac{2}{s}+\dfrac{3}{s^2}$

21.65. $\dfrac{3}{s}-\dfrac{8}{s^3}$

21.66 $\dfrac{2}{s^2}+\dfrac{15}{s^2+9}$

21.67. $\dfrac{2s-3}{s^2+9}$

21.68. $\dfrac{4s(s^2+3)}{(s^2-1)^3}$

21.69. $\dfrac{4(s+1)[(s+1)^2+3]}{[(s+1)^2-1]^3}$

21.70. $\dfrac{8(3s^2-16)}{(s^2+16)^3}$

21.71. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}(s-2)^{-3/2}$

21.72. $\dfrac{s}{(s^2-1)^2}$

21.73. $\dfrac{1}{s}\left[\dfrac{s-3}{(s-3)^2+1}\right]$

21.74. $\dfrac{1}{s(1+e^{-s})}$

21.75. $\dfrac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}$

21.76. $\dfrac{(s+1)e^{-2s}+s-1}{(1-e)^{-2s}}$

CAPÍTULO 22

22.20. x

22.21. $2x$

22.22. x^2

22.23. $x^2/2$

22.24. $x^3/6$

22.25. e^{-2x}

22.26. $-2e^{2x}$

22.27. $4e^{-3x}$

22.28. $\dfrac{1}{2}e^{3x/2}$

22.29. $\dfrac{1}{2}x^2e^{2x}$

22.30. $2x^3e^{-5x}$

22.31. $\dfrac{3}{2}(\operatorname{sen} x+x\cos x)$

22.32. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}(\text{sen}\,\sqrt{3}x+\sqrt{3}x\cos\sqrt{3}x)$

22.33. $\dfrac{1}{2}\text{sen}\,2x$

22.34. $\dfrac{2}{3}e^{2x}\,\text{sen}\,3x$

22.35. $e^{-x}\cos\sqrt{5}x-\dfrac{1}{\sqrt{5}}e^{-x}\,\text{sen}\,\sqrt{5}x$

22.36. $2e^{x}\cos\sqrt{7}x+\dfrac{3}{\sqrt{7}}e^{x}\,\text{sen}\,\sqrt{7}x$

22.37. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{sen}\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$

22.38. $e^{x}\,\text{sen}\,x$

22.39. $e^{-x}\cos 2x+e^{-x}\,\text{sen}\,2x$

22.40. $e^{(1/2)x}\cos 2x+\dfrac{1}{4}e^{(1/2)x}\,\text{sen}\,2x$

22.41. $e^{-(3/2)x}\cos\dfrac{\sqrt{11}}{2}x-\dfrac{1}{\sqrt{11}}e^{-(3/2)x}\,\text{sen}\,\dfrac{\sqrt{11}}{2}x$

22.42. $e^{x}+\cos x+\text{sen}\,x$

22.43. $\dfrac{1}{2}e^{x}-\dfrac{1}{2}e^{-x}$

22.44. $\cos x-e^{x}+xe^{x}$

22.45. $x+x^2$

22.46. $-x+3x^2$

22.47. $x^2/2+x^4/8$

22.48. $2x^3+\dfrac{8}{\sqrt{\pi}}x^{3/2}$

22.49. $-1+e^{2x}\cos 3x$

22.50. $2e^{(1/2)x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{(1/2)x}\,\text{sen}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

22.51. $\dfrac{1}{6}x\,\text{sen}\,3x$

22.52. $-\dfrac{1}{2}e^{x}+\dfrac{1}{2}e^{(1/2)x}\cosh\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+\dfrac{1}{2\sqrt{5}}e^{(1/2)x}\,\text{senh}\,\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$

22.53. $\dfrac{1}{2}e^{-x}\cos\dfrac{1}{2}x-e^{-x}\,\text{sen}\,\dfrac{1}{2}x$

CAPÍTULO 23

23.20. $x^3/6$

23.21. x^2

23.22. $e^{2x}-(2x+1)$

23.23. $\dfrac{1}{6}(e^{4x}-e^{-2x})$

23.24. $e^{x}-x-1$

23.25. $xe^{-x}+2e^{-x}+x-2$

23.26. $\dfrac{3}{2}(1-\cos 2x)$

23.27. $1-\cos x$

23.28. $e^{2x}-e^{x}$

23.29. x

23.30. $2(1-e^{-x})$

23.31. $\dfrac{1}{13}(e^{5x}-e^{-8x})$

23.32. $x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\text{sen}\,\sqrt{3}x$

23.33. $\dfrac{1}{4}(1-\cos 2x)$

23.34. $1-\cos 3x$

23.35. $x-\dfrac{1}{3}\text{sen}\,3x$

23.36. Véase la figura 23-9.

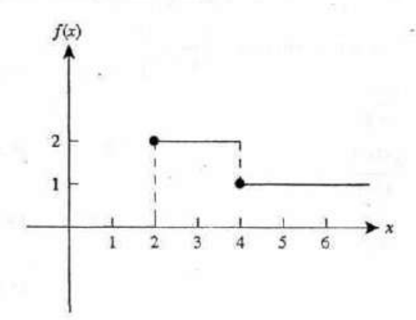


Figura 23-9.

23.37. Véase la figura 23-10.

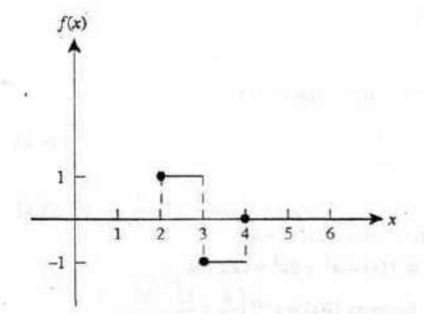


Figura 23-10.

23.38. $u(x)-u(x-c)$

23.39. Véase la figura 23-11.

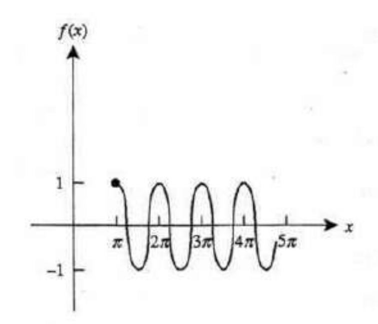


Figura 23-11.

23.40. Véase la figura 23-12.

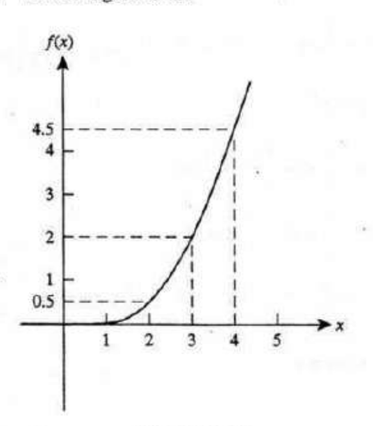


Figura 23-12.

23.41. $\dfrac{e^{-s}}{s^2+1}$

23.42. $\dfrac{e^{-3s}}{s^2}$

23.43. $g(x)=u(x-3)f(x-3)$ si $f(x)=x+3$

Entonces $G(s)=e^{-3s}\left(\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{3}{s}\right)$

23.44. $g(x)=u(x-3)f(x-3)$ si $f(x)=x+4$.

23.45. $\dfrac{e^{-5s}}{s-1}$

23.46. $\dfrac{e^{-5(s-1)}}{s-1}$

23.47. $\dfrac{e^{-2s-3}}{s-1}$

23.48. $g(x)=u(x-2)f(x-2)$

si $f(x)=x^3+6x^2+12x+9$.

Entonces $G(s)=e^{-2s}\left(\dfrac{6}{s^4}+\dfrac{12}{s^3}+\dfrac{12}{s^2}+\dfrac{9}{s}\right)$

23.49. $u(x-3)\cos 2(x-3)$

23.50. $\dfrac{1}{2}u(x-5)\,\text{sen}\,2(x-5)$

23.51. $\dfrac{1}{2}u(x-\pi)\,\text{sen}\,2(x-\pi)$

23.52. $2u(x-2)e^{3(x-2)}$

23.53. $8u(x-1)e^{-3(x-1)}$

23.54. $u(x-2)$

23.55. $(x-\pi)u(x-\pi)$

23.57. $y(x)=-3e^{-x}+3e^{x}-6x$

23.58. $y(x)=e^x+xe^x$

23.59. $y(x)=\cos x$

23.60. $y(x)=0$

CAPÍTULO 24

24.17. $y=e^{-2x}$

24.18. $y=1$

24.19. $y=\dfrac{2}{3}e^{-2x}+\dfrac{1}{3}e^{x}$

24.20. $y=e^{-2(x-1)}$

24.21. $y=0$

24.22. $y=2e^{5x}+xe^{5x}$

24.23. $y=-2e^{-x}+\dfrac{x^2}{2}e^{-x}$

24.24. $y=\dfrac{1}{2}\text{sen}\,x-\dfrac{1}{2}\cos x+d_0e^{-x}\quad\left(d_0=c_0+\dfrac{1}{2}\right)$

24.25. $y=\dfrac{1}{101}(609e^{-20x}+30\,\text{sen}\,2x-3\cos 2x)$

24.26. $y=e^x$

24.27. $y=\dfrac{3}{4}e^{x}-\dfrac{3}{4}e^{-x}-\dfrac{1}{2}\text{sen}\,x$

24.28. $y=\dfrac{1}{4}e^{x}+\dfrac{3}{4}e^{-x}+\dfrac{1}{2}xe^{x}$

24.29. $y=\dfrac{1}{10}e^{x}-\dfrac{1}{26}e^{-x}-\dfrac{4}{65}\cos 2x-\dfrac{7}{65}\text{sen}\,2x$

24.30. $y=\dfrac{5}{2}\text{sen}\,x-\dfrac{1}{2}x\cos x$

24.31. $y=4e^{-(1/2)x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{-(1/2)x}\,\text{sen}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

24.32. $y=\dfrac{3}{5}e^{-2x}+\dfrac{2}{5}e^{-x}\cos 2x+\dfrac{13}{10}e^{-x}\,\text{sen}\,2x$

24.33. $y=\left[-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}e^{-(5/2)(x-4)}\cosh\dfrac{\sqrt{37}}{2}(x-4)+\dfrac{5}{3\sqrt{37}}e^{-(5/2)(x-4)}\,\text{senh}\,\dfrac{\sqrt{37}}{2}(x-4)\right]u(x-4)$

24.34. $y=\text{sen}\,x$

24.35. $y=-5+\frac{5}{3}e^{x}+\frac{10}{3}e^{-(1/2)x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$

24.36. $y=\frac{1}{4}e^{x}+\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{1}{2}\cos x$

24.37. $y=e^{x}\left(1+x+\frac{x^5}{60}\right)$

24.38. $N=5000e^{0.085t}$

24.39. $T=100e^{3t}$

24.40. $T=70e^{-3t}+30$

24.41. $v=d_0e^{-2t}+16 \quad (d_0=c_0-16)$

24.42. $q=-\frac{4}{5}e^{-t}+\frac{8}{5}\operatorname{sen}2t+\frac{4}{5}\cos 2t$

24.43. $x=\frac{1}{5}e^{-7t}-\frac{1}{5}e^{-2t}$

24.44. $x=2(1+t)e^{-2t}$

24.45. $x=-2e^{-4(t-\pi)}\operatorname{sen}3t$

24.46. $q=\frac{1}{500}(110e^{-2t}-101e^{-7t}+13\operatorname{sen}t-9\cos t)$

CAPÍTULO 25

25.7. $u(x)=x^2+x \quad v(x)=x-1$

25.8. $u(x)=e^{2x}+2e^{-x} \quad v(x)=e^{2x}+e^{-x}$

25.9. $u(x)=2e^{x}+6e^{-x} \quad v(x)=e^{x}+2e^{-x}$

25.10. $y(x)=1 \quad z(x)=x$

25.11. $y(x)=e^{x} \quad z(x)=e^{x}$

25.12. $w(x)=e^{5x}-e^{-x}+1$
$y(x)=2e^{5x}+e^{-x}-1$

25.13. $w(x)=\cos x+\operatorname{sen}x$
$y(x)=\cos x-\operatorname{sen}x \quad z(x)=1$

25.14. $u(x)=-e^{x}+e^{-x} \quad v(x)=e^{x}-e^{-x}$

25.15. $u(x)=e^{2x}+1 \quad v(x)=2e^{2x}-1$

25.16. $w(x)=x^2 \quad y(x)=x \quad z(x)=1$

25.17. $w(x)=\operatorname{sen}x \quad y(x)=-1+\cos x$
$z(x)=\operatorname{sen}x-\cos x$

CAPÍTULO 26

26.9. $x=\frac{1}{3}e^{-4(t-1)}+\frac{2}{3}e^{2(t-1)}$

26.10. $x=\frac{1}{6}e^{-4t}+\frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{2}$

26.11. $x=\frac{1}{6}e^{-4(t-1)}+\frac{1}{3}e^{2(t-1)}-\frac{1}{2}$

26.12. $x=\frac{1}{6}e^{-4t}+\frac{4}{3}e^{2t}-\frac{1}{2}$

26.13. $x=\frac{1}{2}e^{-4t}+\frac{1}{2}e^{2t}-e^{-t}$

26.15. $x=k_1\cos t+k_2\operatorname{sen}t$

26.16. $x=0$

26.17. $x=-\cos(t-1)+t$

26.18. $y=k_3e^{-t}+k_4e^{2t}$

26.19. $y=e^{-t}+e^{2t}$

26.20. $y=\frac{13}{12}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{3t}$

26.21. $y = \frac{1}{12}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t}$

26.22. $z = \frac{1}{500}(13\operatorname{sen} t - 9\cos t - 90e^{-2t} + 99e^{-7t})$

26.23. $x = e^{2t} + 2e^{-t} \quad y = e^{2t} + 2e^{-t}$

26.24. $x = 2e^{t} + 6e^{-t} \quad y = e^{t} + 2e^{-t}$

26.25. $x = t^2 + t \quad y = t - 1$

26.26. $x = k_3e^{5t} + k_4e^{-t} \quad y = 2k_3e^{5t} - k_4e^{-t}$

26.27. $x = \frac{1}{4}t^4 + 6t^2$

26.28. $x = -e^{t} + e^{-t} \quad y = e^{t} - e^{-t}$

26.29. $x = -8\cos t - 6\operatorname{sen} t + 8 + 6t \quad y = 4\cos t - 2\operatorname{sen} t - 3$

CAPÍTULO 27

27.26. Punto ordinario

27.27. Punto ordinario

27.28. Punto singular

27.29. Punto singular

27.30. Punto singular

27.31. Punto singular

27.32. Punto ordinario

27.33. Punto singular

27.34. Punto singular

27.35. $y = a_0 + a_1\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\right) = c_1 + c_2e^x$, donde $c_1 = a_0 - a_1$ y $c_2 = a_1$

27.36. FR (fórmula de recurrencia): $a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)}a_{n-1}$

$$y = a_0\left(1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 + \cdots\right)$$

27.37. FR: $a_{n+2} = \frac{2}{(n+2)}a_n$

$$y = a_0\left(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \cdots\right) + a_1\left(x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{8}{105}x^7 + \cdots\right)$$

27.38. FR: $a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)}a_{n-1}$

$$y = a_0\left(1 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{28}x^7 + \cdots\right)$$

27.39. FR: $a_{n+2} = \frac{n-1}{(n+2)(n+1)}a_{n-1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)}a_n$

$$y = a_0\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \cdots\right) + a_1\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right)$$

27.40. FR: $a_{n+2} = \dfrac{-2}{(n+2)(n+1)} a_{n-2}$

$$y = a_0\left(1 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{168}x^8 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{360}x^9 + \cdots\right)$$

27.41. FR: $a_{n+2} = \dfrac{n-1}{n+2} a_n$

$$y = a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \cdots\right) + a_1 x$$

27.42. FR: $a_{n+2} = \dfrac{1}{(n+2)(n+1)} a_{n-1}$

$$y = a_0\left(1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + \cdots\right) + a_1\left(x + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{504}x^7 + \cdots\right)$$

27.43. FR: $a_{n+2} = \dfrac{1}{(n+2)(n+1)} (a_n + a_{n-1})$

$$y = a_0\left[1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{24}(x-1)^4 + \cdots\right]$$
$$+ a_1\left[(x-1) + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{12}(x-1)^4 + \cdots\right]$$

27.44. FR: $a_{n+2} = \dfrac{n-1}{(n+2)(n+1)} a_{n-1} - \dfrac{4n}{(n+2)(n+1)} a_n + \dfrac{4}{n+2} a_{n+1}$

$$y = a_0\left[1 - \frac{1}{6}(x+2)^3 - \frac{1}{6}8+2)^4 + \cdots\right]$$
$$+ a_1\left[(x+2) + 2(x+2)^2 + 2(x+2)^3 + \frac{2}{3}(x+2)^4 + \cdots\right]$$

27.45. FR: $a_{n+2} = \dfrac{n^2-n+1}{4(n+2)(n+1)} a_n, \quad n > 1$

$$y = \left(\frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{1920}x^5 + \cdots\right) + a_0\left(1 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{128}x^4 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{24}x^3 + \frac{7}{1920}x^5 + \cdots\right)$$

27.46. FR: $a_{n+2} = \dfrac{n}{(n+2)(n+1)} a_n, \quad n > 2$

$$y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + a_0 + a_1\left[(x-1) + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{40}(x-1)^5 + \cdots\right]$$

27.47. FR: $a_{n+2} = \dfrac{n}{(n+2)(n+1)} a_n + \dfrac{(-1)^n}{n!(n+2)(n+1)}$

$$y = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots\right) + a_0 + a_1\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{40}x^5 + \cdots\right)$$

27.48. $y = 1 - x - \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{12}x^4 - \cdots$

27.49. $y = 2(x-1) + \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + (x-1)^3 + \cdots$

CAPÍTULO 28

28.25. FR (fórmula de recurrencia): $a_n = \dfrac{1}{[2(\lambda+n)-1][(\lambda+n)-1]}a_{n-1}$

$$y_1(x) = a_0x\left(1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{30}x^2+\frac{1}{630}x^3+\cdots\right)$$
$$y_2(x) = a_0\sqrt{x}\left(1+x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{90}x^3+\cdots\right)$$

28.26. FR: $a_n = \dfrac{-1}{2(\lambda+n)-1}a_{n-1}$

$$y_1(x) = a_0x\left(1-\frac{1}{3}x+\frac{1}{15}x^2-\frac{1}{105}x^3+\cdots\right)$$
$$y_2(x) = a_0\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{48}x^3+\cdots\right)$$

28.27. FR: $a_n = \dfrac{-1}{[3(\lambda+n)+1][(\lambda+n)-2]}a_{n-2}$

$$y_1(x) = a_0x^2\left(1+\frac{1}{26}x^2+\frac{1}{1\,976}x^4+\cdots\right)$$
$$y_2(x) = a_0x^{-1/3}\left(1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{40}x^4-\frac{1}{2\,640}x^6-\cdots\right)$$

28.28. Por conveniencia, primero multiplique la ecuación diferencial por x. Entonces

FR: $a_n = \dfrac{-1}{(\lambda+n)^2}a_{n-1}$

$$y_1(x) = a_0x\left(1+x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{36}x^3+\cdots\right)$$
$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + a_0\left(-2x-\frac{3}{4}x^2+\cdots\right)$$

28.29. FR: $a_n = \dfrac{-1}{(\lambda+n)^2}a_{n-3}$

$$y_1(x) = a_0\left(1-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{324}x^6+\cdots\right)$$
$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + a_0\left(\frac{2}{27}x^3-\frac{1}{324}x^6+\cdots\right)$$

28.30. FR: $a_n = \dfrac{-1}{(\lambda+n)+1}a_{n-1}$

$$y_1(x) = a_0x\left(1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{60}x^3+\cdots\right) = \frac{2}{x}a_0(e^x-1-x)$$
$$y_2(x) = a_0x^{-1}\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots\right) = a_0x^{-1}e^x$$

28.31. Por conveniencia, primero multiplique la ecuación diferencial por x. Entonces

FR: $a_n = \dfrac{1}{(\lambda+n)-2}a_{n-1}$

$$y_1(x) = a_0x^2\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots\right) = a_0x^2e^x$$
$$y_2(x) = -y_1(x)\ln x + a_0(1-x-x^2+0x^3+\cdots)$$

28.32. FR: $a_n = \dfrac{-1}{2(\lambda+n)-1}a_{n-1}$

$$y_1(x) = a_0\sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + \cdots\right)$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2}y_1(x) + a_0x^{-1/2}\left(1 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{32}x^3 + \cdots\right)$$

28.33. FR: $a_n = \dfrac{-1}{(\lambda+n)-2}a_{n-1}$

$$y_1(x) = a_0x^2\left(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right) = a_0x^2e^{-x}$$

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + a_0x^2\left(x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{36}x^3 + \cdots\right)$$

28.34. $y = c_1x^{1/2} + c_2x^{-1/2}$

28.35. $y = c_1x^2 + c_2x^2\ln x$

28.36. $y = c_1x^{-1/2} + c_2x^{-4}$

28.37. $y = c_1x^{-1} + c_2x^2$

28.38. $y = c_1 + c_2x^7$

CAPÍTULO 29

29.9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(4x^2-2)(8x^3-12x)e^{-x^2}dx = 0$

29.10. $H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$

29.11. $P_5(x) = \dfrac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

29.12. $P_6(x) = \dfrac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 10x^2 - 5)$

29.14. $T_5(x) = 15x^5 - 20x^3 + 5x$

29.15. $\dfrac{2}{7}$

29.16. 4

29.18. $H_1(x) = 2x$

29.19. $L_3^2(x) = -6x + 18$; $L_4^1(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x - 96$

29.20. *a*) no; *b*) sí (3 y 6); *c*) no; *d*) sí (7 y 8); *e*) sí (2 y 11)

CAPÍTULO 30

30.19. 1.4296

30.20. 2.6593

30.21. 7.1733

30.22. −0.8887

30.23. 3.0718

30.24. $\dfrac{1}{3}\Gamma\left(\dfrac{1}{3}\right)$

30.25. $\dfrac{1}{2}\Gamma(2) = \dfrac{1}{2}$

30.26. Primero separe de la serie el término $k = 0$, luego haga el cambio de variables $j = k - 1$, y finalmente cambie el índice mudo de j a k.

30.29*b*). $\dfrac{1}{2}[J_0^2(1) + J_1^2(1)]$

CAPÍTULO 31

31.16. *a*) armónica; *b*) armónica; *c*) no armónica; *d*) armónica; *e*) no armónica

31.17. $x \cos y + f(y)$, donde $f(y)$ es cualquier función derivable de y

31.18. $\operatorname{sen} y + f(x)$, donde $f(x)$ es cualquier función derivable de x

31.19. $3y + 4x + 1$

31.20. $x^2y + x + \cosh y$

31.21. $\frac{3}{2}x^2 + xg(y) + h(y)$, donde $g(y)$ y $h(y)$ son cualesquiera funciones derivables de y

31.22. $u(x, y) = x^2y^4 + g(x) + h(y)$, donde $g(x)$ es una función derivable de x, y $h(y)$ es una función derivable de y

31.23. $u(x, y) = -x^2y + g(x) + xh(y)$, donde $g(x)$ es una función derivable de x, y $h(y)$ es una función derivable de y

31.24. $u(x, t) = 5 \operatorname{sen} 3x \cos 3kt - 6 \operatorname{sen} 8 \cos 8kt$

CAPÍTULO 32

32.22. $y \equiv 0$

32.23. $y = x - \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x$

32.24. $y = \operatorname{sen} x$

32.25. $y = x + \left(1 - \frac{1}{2}\pi\right) \operatorname{sen} x - \cos x$

32.26. $y = B \cos x$, B arbitrario

32.27. Sin solución

32.28. Sin solución

32.29. $y = x + B \cos x$, B arbitraria

32.30. $\lambda = 1$, $y = c_1 e^{-x}$

32.31. No hay valores propios o funciones propias

32.32. $\lambda = 2$, $y = c_2 x e^{-2x}$ y $\lambda = \frac{1}{2}$, $y = c_2(-3 + x)e^{-x/2}$

32.33. $\lambda = 1$, $y = c_2 e^{-x}$ (c_2 arbitrario)

32.34. $\lambda_n = -n^2\pi^2$, $y_n = A_n \operatorname{sen} n\pi x \quad (n = 1, 2, \ldots)$ (A_n arbitrario)

32.35. $\lambda_n = \left(\frac{1}{5}n - \frac{1}{10}\right)^2 \pi^2$, $y_n = B_n \cos\left(\frac{1}{5}n - \frac{1}{10}\right)\pi x \quad (n = 1, 2, \ldots)$ (B_n arbitrario)

32.36. $\lambda_n = n^2$, $y_n = B_n \cos nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (B_n arbitrario)

32.37. Sí

32.38. No, $p(x) = \operatorname{sen} px$ es cero en $x = \pm 1, 0$.

32.39. No, $p(x) = \operatorname{sen} x$ es cero en $x = 0$.

32.40. Sí

32.41. No, la ecuación no es equivalente a (*29.6*).

32.42. No, $w(x) = \frac{3}{x^2}$ no es continua en $x = 0$.

32.43. Sí

32.44. $I(x) = e^x; (e^x y')' + xe^{-x}y + \lambda e^{-x}y = 0$

32.45. $I(x) = x;\ (xy')' + \lambda y = 0$

32.46. $\lambda_n = n^2;\ e_n(x) = \cos nx\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$

32.47. $\lambda_n = \dfrac{n^2}{4};\ e_n(x) = \operatorname{sen}\dfrac{nx}{2}\quad (n = 1, 2, \ldots)$

CAPÍTULO 33

33.12. $\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}[1-(-1)^n]\operatorname{sen} n\pi x$

33.13. $-\dfrac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{3}$

33.14. $\dfrac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$

33.15. $\dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\operatorname{sen}\dfrac{2n\pi}{3}\cos\dfrac{n\pi x}{3}$

33.16. 1

33.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{2}{n\pi}\cos\dfrac{n\pi}{2} - \dfrac{4}{n\pi}\cos n\pi\right)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{2}$

33.18. $-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\frac{1}{2}}\cos\left(n-\dfrac{1}{2}\right)x$

33.19. $-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\operatorname{sen}\left(n-\dfrac{1}{2}\right)x$

33.20. *a*) sí, *b*) no, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \infty$; *c*) no, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \infty$; *d*) sí, $f(x)$ es continua en [–1, 5]

33.21. *a*) sí; *b*) sí; *c*) no, dado que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln|x| = -\infty$; *d*) no, dado que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{1}{3(x-1)^{2/3}} = \infty$

CAPÍTULO 34

34.17. *a*) n; *b*) u; *c*) 7; *d*) no lineal; *e*) homogénea

34.18. *a*) k; *b*) w; *c*) 1; *d*) no lineal; *e*) no homogénea

34.19. *a*) t; *b*) z; *c*) 3; *d*) lineal; *e*) homogénea

34.20. *a*) m; *b*) g; *c*) 13; *d*) lineal; *e*) homogénea

34.24. $k(-17)^n$, donde k es cualquier constante

34.25. $c_1(-1)^n + c_2(12)^n$, donde c_1 y c_2 son cualesquiera constantes

34.26. $c_1(10)^n + c_2 n(10)^n$, donde c_1 y c_2 son cualesquiera constantes

34.27. $\dfrac{1}{2}(6)^n$

34.28. $k(2)^n - n^2 - 2n - 3$, donde k es una constante cualquiera

34.29. $10(2)^n - n^2 - 2n - 3$

34.30. $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$

34.31. \$18 903.10

ÍNDICE ANALÍTICO

¡Estudie a su propio ritmo y apruebe su examen con Schaum!

Los Schaum son la herramienta esencial para la preparación de sus exámenes.
Cada Schaum incluye:

- Teoría de la asignatura con definiciones, principios y teoremas claves.
- Problemas resueltos y totalmente explicados en grado creciente de dificultad.
- Problemas propuestos con sus respuestas.

Hay un mundo de Schaum a su alcance... ¡BUSQUE SU COLOR!

Info Informática | Eco Economía & Empresa | Mat Matemáticas | Inge Ingeniería | Cien Ciencia



The McGraw-Hill Companies

Visite nuestra página WEB
www.mcgraw-hill-educacion.com